

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ЧАСТЬ 1

Учебное пособие для студентов обучающихся по специальностям
«Энергомашиностроение», «Машиностроительные технологии
и оборудование»

Учебное пособие является первой частью общего курса указанных учебных дисциплин и содержит лекционный материал. Теоретическое изложение частично сопровождается решением практических примеров. Некоторые разделы пособия набраны мелким шрифтом: этот учебный материал не входит в новый образовательный стандарт, но имеет практическое приложение и используется в других учебных дисциплинах.

Материал учебного пособия может использоваться студентами для самостоятельной работы при подготовке к экзаменам, практическим занятиям и лабораторным работам, для выполнения учебных заданий и курсовых работ.

Введение

Сопротивление материалов (для некоторых инженерных специальностей – *механика материалов и конструкций*) является одной из основных учебных дисциплин инженерно-технических вузов. Наряду с другими фундаментальными – естественно-научными и техническими дисциплинами – сопротивление материалов помогает формировать инженерное мышление, необходимое в разработке, производстве и обслуживании технических изделий различного назначения.

В сопротивлении материалов, являющимся одним из разделов механики твёрдого деформируемого тела, рассматриваются простейшие расчётные модели конструктивных элементов, изучаются общие методы расчёта инженерных конструкций. Такие методы, являясь в основном приближёнными, опираются на экспериментальные данные, что позволяет использовать простые и ясные подходы в оценке прочностных возможностей различных конструктивных элементов при внешних воздействиях.

При проектировании реальных конструкций необходимо рассматривать вопросы *прочности, жёсткости, устойчивости* конструктивных элементов, определяющие способность конструкции выполнять свои рабочие функции. Для этих основополагающих понятий можно дать такие определения. *Прочность* – способность тела воспринимать внешние воздействия, не разрушаясь. *Жёсткость* – способность тела воспринимать внешние воздействия в области допустимых (ограниченных) деформаций (перемещений). *Устойчивость* – способность тела воспринимать внешние воздействия, сохраняя первоначальное положение равновесия. Более подробно расчёты конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость рассматриваются в специальных инженерных дисциплинах (строительная механика конструкций, прочность конструкций, теория устойчивости упругих систем, теория упругости и пластичности, механика разрушения и др.).

В сопротивлении материалов рассматриваются *деформируемые тела*, т.е. способные изменять свои размеры и форму при внешних воздействиях. При этом широко используются методы теоретической механики (механики абсолютно твёрдого тела), расчётный аппарат математического анализа. Непрерывная связь различных наук, их постоянное развитие позволяют совершенствовать методы анализа в сопротивлении материалов, использовать возможности вычислительной техники, а также расширять круг об-

ших вопросов, необходимых при подготовке современных специалистов инженерного профиля.

1. Основные понятия

1.1. Моделирование реального объекта

Реальные объекты (конструкции, конструктивные элементы) обладают большим многообразием характеристик, учесть которые в полном объёме невозможно. Для расчетного анализа реального объекта используется его соответствующее физическое и математическое представление (моделирование), т.е. создаётся *расчётная модель* (или *расчётная схема*). Моделирование осуществляется за счет некоторой схематизации реальной конструкции. Можно выделить три основных направления моделирования, связанных с основными допущениями о свойствах материала, геометрическими моделями тела, представлением нагрузки и связей.

1.1.1. Моделирование материала

При построении инженерных моделей деформируемого тела вводится ряд допущений о свойствах материала, т.е. реальный материал заменяется некоторой моделью среды с важнейшими (но идеальными) свойствами.

Во-первых, для тела используется *гипотеза сплошности среды*: материал считается непрерывной средой, заполняющей весь объем тела. При этом материал наделяется некоторыми осреднёнными, среднестатистическими свойствами, не зависящими от микроструктуры материала.

Во-вторых, материалы наделяют такими относительными свойствами, как однородность, изотропность, упругость, пластичность.

Однородность – независимость свойств материала от величины и местоположения выделенного из тела объема. Такая схематизация свойств материала основана на том, что размеры рассматриваемых тел (или их частей) значительно превосходят размеры структурных элементов (например, кристаллических зерен), где проявляются особенности строения материала.

Изотропность – одинаковость свойств материала во всех направлениях.

Упругость – способность тела восстанавливать первоначальные форму и размеры после снятия нагрузки.

Пластичность – способность тела не восстанавливать (частично или полностью) первоначальные форму и размеры после снятия нагрузки. При этом в теле появляются остаточные (пластические) деформации.

Существуют и *анизотропные* материалы, в которых свойства материала неодинаковы по различным направлениям. Различают естественную

анизотропию (например, для дерева) и искусственную (например, для фанеры, ткани и т. д.). Получение искусственно анизотропных материалов является очень перспективным направлением создания новых материалов, обладающих необходимыми свойствами. Среди них следует выделить так называемые *композиционные волокнистые материалы (композиты)*, соединяющие в себе относительную легкость, высокую прочность и жёсткость как наиболее полезные качества для силовых элементов конструкций. Композиты состоят из наполнителя (армирующего материала) и связующего (матрицы). Наполнителем являются волокна из различных материалов (углеродные, стеклянные, борные, органические, металлические и др.). В качестве связующего чаще всего используются полимерные материалы (эпоксидные, полиэфирные, фенольные смолы), а также металлические (алюминиевые, титановые, стальные) или керамические материалы. Подбирая определенные компоненты «волокно-связующее», по-разному ориентируя волокна, используя различную технологию изготовления композитов, можно получить материалы с требуемыми свойствами, максимально соответствующими проектируемым конструкциям.

1.1.2. Геометрическое моделирование тел

В расчётном анализе используются три геометрические модели тела: брус (стержень), оболочка и пространственное (массивное) тело.

Брус – модель тела, длина которого существенно превышает поперечные размеры. Характерные типы бруса различают по таким признакам:

- в зависимости от формы оси – *прямолинейный брус* (рис. 1.1,а), *криволинейный брус* (рис. 1.1,б), *ломаный брус* (рис. 1.1,в);

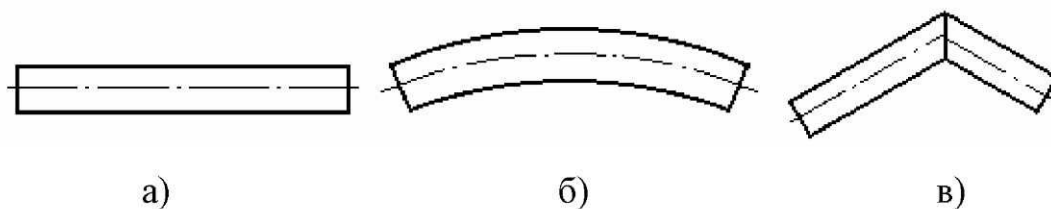


Рис. 1.1

- в зависимости от изменения поперечного сечения бруса по длине – *брус постоянного сечения* (рис. 1.2,а), *брус переменного сечения* (рис. 1.2,б), *ступенчатый брус* (рис. 1.2,в).

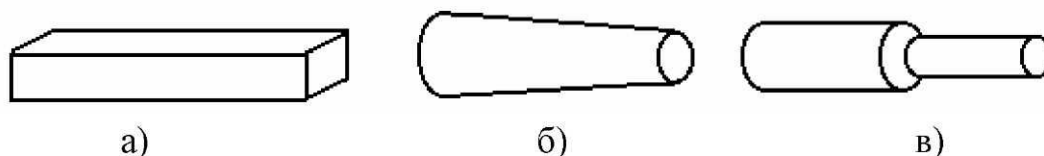


Рис. 1.2

Естественно, отмеченные характерные признаки могут сочетаться: например, криволинейный брус переменного сечения. Брус и конструкции, состоящие из элементов в виде бруса (стержневые системы), являются основными объектами изучения в сопротивлении материалов.

Оболочка – модель тела, толщина которого намного меньше других размеров. Оболочки, как тонкостенные конструкции различаются, главным образом, формой срединной поверхности (цилиндрическая, сферическая, коническая оболочки и т. д.), могут быть постоянной и переменной толщины. Оболочки широко применяются в различных областях техники, так как способны наиболее эффективно выполнять различные функции (прочностные, технологические, эксплуатационные, эстетические) в сочетании с малой материалоемкостью конструкций. Часто оболочки выполняются в совокупности с силовыми элементами в виде бруса (подкрепленные оболочки), оболочечные конструкции могут состоять и из нескольких оболочек различной формы. В частном случае, когда поверхность является плоскостью, оболочка вырождается в *пластинку*. Оболочки и оболочечные конструкции в основном изучаются в теории оболочек и специальных курсах строительной механики различных конструкций.

Модель *пространственного тела* имеет соизмеримые размеры. Методы расчета таких моделей рассматриваются в теории упругости.

Брус, оболочка и пространственное тело рассматриваются также, как *одномерная, двумерная и трёхмерная расчетные модели* тела в соответствии с математическим описанием таких моделей.

1.1.3. Моделирование нагрузки и связей

Нагрузка является мерой внешнего воздействия на рассматриваемый объект (тело) со стороны окружающих его тел или среды. *Нагрузка* моделируется системой внешних сил, которые разделяются на объемные и поверхностные. *Объемные силы* распределены по объему тела, приложены к каждой его частице (силы тяжести, инерции, магнитного взаимодействия). *Поверхностные силы* действуют на участках поверхности тела (силы воздействия среды, контактного взаимодействия тел и т.д.). При моделирова-

нии нагрузки вводятся понятия сосредоточенной силы, сосредоточенного момента (пары сил) и распределенной (погонной) нагрузки.

Под *сосредоточенной силой* P (рис. 1.3,а) понимается равнодействующая поверхностных сил, действующих на относительно малой площадке поверхности тела (площадка условно стягивается в точку).

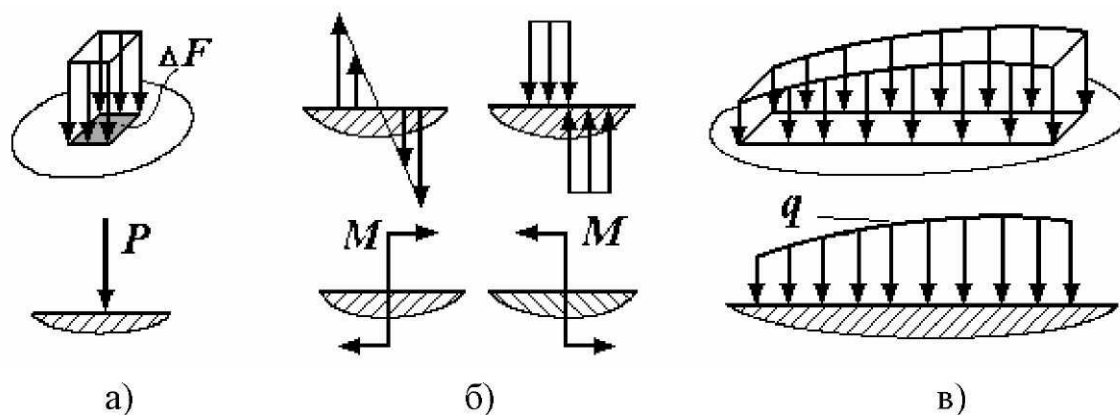


Рис. 1.3

Аналогично, *сосредоточенный момент* M может рассматриваться как статический эквивалент поверхностных сил (рис. 1.3,б). *Распределенная нагрузка* q (рис. 1.3,в) получается приведением поверхностных сил к линии действия (площадка нагружения условно стягивается в линию). Распределенная нагрузка может быть постоянной или переменной интенсивности.

В системе СИ единицами измерения силы являются *ньютоны* (Н) или *килоньютоны* (кН), т.е. для рассматриваемых типов нагрузки используются такие единицы: P (Н, кН); M (Н·м, кН·м); q (Н/м, кН/м).

В расчетной модели используется понятие *связи* как ограничения перемещений в некоторых точках тела. Наиболее часто рассматриваются *модели типовых опор* как систем связей. В качестве примера на рис. 1.4 показаны плоские модели опор.

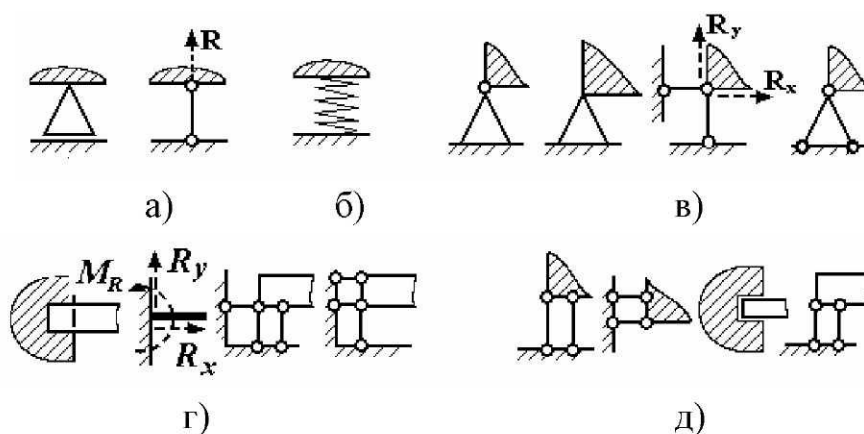


Рис. 1.4

Шарнирно-подвижная опора, или каток (рис. 1.4,а) накладывает одну связь (на рисунке такая связь соответствует запрещению вертикального перемещения). В частности, связь может быть упругой (рис. 1.4,б), допускающей определённые (конечные) перемещения. *Шарнирно-неподвижная опора* моделируется двумя связями (рис. 1.4,в), которые запрещают любые линейные перемещения в плоскости. Опора типа *жёсткого закрепления* или *заделки* (рис. 1.4,г) запрещает линейные и угловые перемещения. Возможны и другие варианты опор за счёт наложенных связей, например, подвижная заделка – закрепление, ограничивающее поворот и линейное перемещение в направлении наложенных связей (рис. 1.4,д).

При моделировании вариантов пространственного закрепления используется различное число связей, вплоть до шести.

В теле в месте наложения связей в соответствующих направлениях возникают *реакции связей* (силы и моменты), которые относятся к внешним силам. Например, в шарнирно-неподвижной опоре (см. рис. 1.4,в) возникают две реактивные силы; в заделке (см. рис. 1.4,г) – две реактивные силы и реактивный момент.

Если реакции связей в теле (системе тел) могут быть определены с использованием уравнений статики (равновесия), то такое тело (система тел) называется *статически определимым*. Если же число реакций больше числа независимых уравнений статики, то такое тело (система тел) называется *статически неопределимым*.

По характеру изменения во времени нагрузка разделяется на статическую и динамическую. Считается, что *статическая нагрузка* постепенно возрастает от нуля до номинального значения и затем не изменяется с течением времени или мало изменяется. *Динамическая нагрузка* характеризуется заметным изменением во времени, возникновением значительных ускорений частиц тела. Например: ударные, повторно-переменные, быстроизменяющиеся нагрузки.

Таким образом, моделирование позволяет описать качественные особенности реального объекта и создать соответствующую расчетную модель. В дальнейшем в основном рассматриваются модели тела в виде бруса или модели механических систем, состоящих из элементов типа бруса.

1.2. Внутренние силы. Метод сечений

Для деформируемого тела существует понятие внутренних связей, соединяющих частицы тела в единое целое. При нагружении деформируемого тела в нём возникают *внутренние силы* взаимодействия частиц тела. Приём выявления внутренних сил путем мысленного рассечения тела на две части носит название *метода сечений*. Например, если по плоскости рассечь брус на две части (рис. 1.5,а), то в сечениях для левой и правой частей бруса возникают системы внутренних сил P_L и P_R , которые всегда взаимны по принципу действия и противодействия (рис. 1.5,б). (Рассечение бруса на две части означает отбрасывание внутренних связей.) Если привести систему внутренних сил по правилам статики к центру площади сечения (т.0), то получим главный вектор \bar{R} и главный момент \bar{M} внутренних сил (рис. 1.5,в). Выберем в сечении бруса систему координат $0xyz$, где ось z направлена по нормали к сечению, а оси x и y расположены в его плоскости.

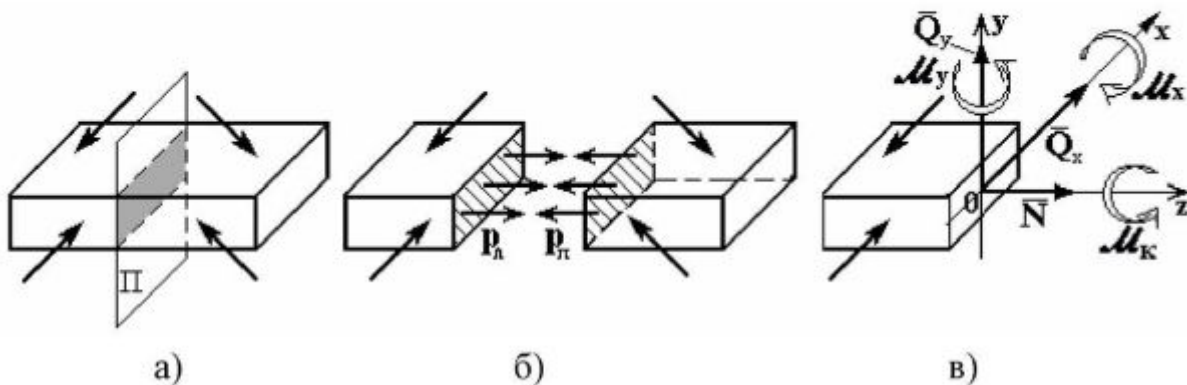


Рис. 1.5

Составляющие \bar{R} и \bar{M} по осям x , y , z называются *внутренними силовыми факторами* (три силы и три момента). Они имеют определённые названия: N – нормальная или продольная сила; Q_x , Q_y – поперечные силы; M_x , M_y – изгибающие моменты относительно осей x и y ; M_k – крутящий момент (см. рис. 1.5,в). Эти шесть внутренних силовых факторов могут быть определены из шести *уравнений равновесия*, составленных для отсеченной части бруса.

Определение в бруске внутренних силовых факторов по методу сечений сводится к четырем основным операциям:

- 1) *рассекается брус* по плоскости в некотором сечении;
- 2) *отбрасывается одна из частей бруса* (левая или правая);

- 3) заменяется действие отброшенной части бруса на оставшуюся внутренними силовыми факторами;
- 4) уравнивается оставшаяся часть бруса, т. е. из уравнений равновесия определяются внутренние силовые факторы.

При необходимости наглядного представления возникающих внутренних силовых факторов для бруса в целом строятся *эпюры* отдельных внутренних силовых факторов – графики их изменения по длине бруса.

1.3. Напряжения

Напряжения являются мерой интенсивности действия внутренних сил в теле. Выделим малую площадку ΔF в окрестности т.А сечения бруса и равнодействующую внутренних сил $\Delta \bar{R}$ на этой площадке (рис. 1.6,а).

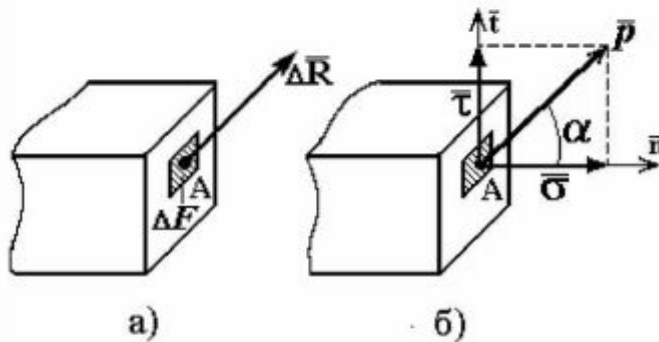


Рис. 1.6

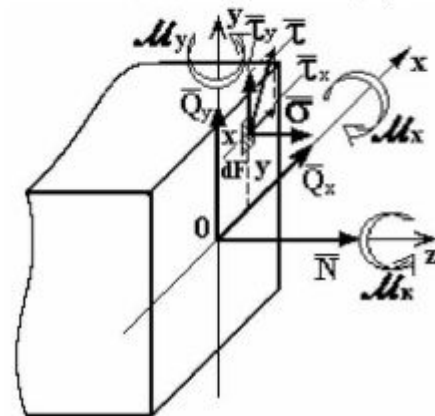


Рис. 1.7

Существуют понятия *среднего напряжения* \bar{p}_{cp} на площадке и *полного напряжения* \bar{p} в точке, которые определяются соотношениями:

$$\bar{p}_{cp} = \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F}; \quad \bar{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F} = \frac{d\bar{R}}{dF}. \quad (1.1)$$

Вектор *полного напряжения* \bar{p} может быть представлен в виде двух составляющих (рис. 1.6,б): *нормального напряжения* $\bar{\sigma}$, направленного по нормали \bar{n} к площадке, и *касательного напряжения* $\bar{\tau}$, действующего в плоскости сечения. Нормальные и касательные напряжения необходимо различать, потому что материал по-разному сопротивляется их действию. Если обозначить через α угол между вектором \bar{p} и нормалью \bar{n} , то имеют место следующие соотношения:

$$\sigma = p \cos \alpha, \quad \tau = p \sin \alpha, \quad p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (1.2)$$

Напряжения в точке зависят от положения площадки. Совокупность напряжений, возникающих во множестве площадок, проходящих через точку, характеризует *напряжённое состояние в точке*.

Внутренние силовые факторы являются равнодействующими внутренних сил в сечении. Поэтому с учетом формул (1.1) они могут быть выражены через нормальные и касательные напряжения следующими соотношениями (рис. 1.7):

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF, \quad Q_x = \int_F \tau_x dF, \quad Q_y = \int_F \tau_y dF, \\ \mathcal{M}_x &= \int_F \sigma y dF, \quad \mathcal{M}_y = - \int_F \sigma x dF, \quad \mathcal{M}_k = \int_F (\tau_y x - \tau_x y) dF. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В системе СИ единицей измерения напряжения является *паскаль* (Па): $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$. Это очень маленькая величина для реальных напряжений, поэтому в расчетах на прочность практически используются *килопаскали* (кПа), *мегапаскали* (МПа) или *гигапаскали* (ГПа):

$$1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па}; \quad 1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}; \quad 1 \text{ ГПа} = 10^9 \text{ Па}.$$

Связь единиц напряжения систем СИ и МКГСС такова:

$$1 \text{ МПа} \approx 10 \text{ кгс/см}^2 = 0,1 \text{ кгс/мм}^2.$$

1.4. Перемещения и деформации

Под действием нагрузки тело изменяет свою форму и размеры, т.е. деформируется. При этом точки тела меняют свое положение в пространстве. Для точек деформируемого тела различают линейное и угловое перемещения.

Вектор $\vec{\delta}$, соединяющий начальное (до нагружения) и конечное (после нагружения) положения точки, называется *линейным перемещением* точки (рис. 1.8,а).

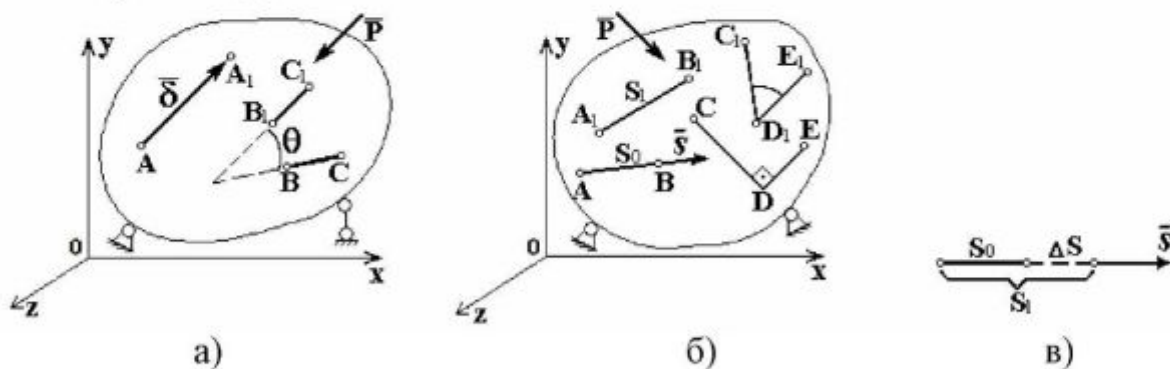


Рис. 1.8

В системе координат $Oxyz$ полное линейное перемещение имеет составляющие по осям $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ (также будем использовать их обозначения u, v, w).

Под угловым перемещением θ понимается угол поворота элементарного (бесконечно малого) отрезка в пространстве (см. рис. 1.8,а). Угловое перемещение также может быть представлено составляющими $\theta_x, \theta_y, \theta_z$. Перемещения точек тела при его деформировании обычно являются малыми величинами по сравнению с линейными размерами тела (такие тела называются относительно жёсткими).

В качестве характеристики интенсивности изменения формы и размеров тела при его нагружении вводятся понятия линейной и угловой деформаций. *Линейная деформация* в произвольной точке A в направлении \bar{s} (рис. 1.8,б) определяется следующим образом:

$$\epsilon_s = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{S_1 - S_0}{S_0} = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S_0}, \quad (1.4)$$

где S_0, S_1 – начальная и конечная длины элементарного отрезка.

Условно изменение длины малого отрезка показано на рис. 1.8,в.

Соответственно, в направлении координатных осей x, y, z получаем компоненты (составляющие) линейной деформации $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$.

Угловая деформация (или деформация сдвига) представляет изменение элементарного прямого угла (см. рис. 1.8,б)

$$\gamma_{CDE} = \lim_{CD \rightarrow 0, DE \rightarrow 0} (\angle CDE - \angle C_1 D_1 E_1) \quad (1.5)$$

(в данном случае – *угловая деформация* в точке D в плоскости CDE).

В координатных плоскостях компоненты угловой деформации обозначаются $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$.

Деформация является безразмерной величиной. Положительная линейная деформация (*деформация растяжения*) соответствует увеличению длины отрезка, отрицательная линейная деформация (*деформация сжатия*) – уменьшению длины отрезка, положительная угловая деформация – уменьшению прямого угла (переходу его в острый угол). Совокупность линейных и угловых деформаций во всех направлениях и плоскостях, проходящих через точку, характеризует *деформированное состояние в точке*.

Примечания:

1. Силы, напряжения, перемещения являются векторными величинами. В дальнейшем для упрощения записи и рисунков черточки для обозначения векторов не ставятся.

2. Следует иметь в виду, что термин «деформация» часто употребляется в двояком смысле. Во-первых, как физическая величина (линейная и угловая деформация). Во-вторых, как синоним деформирования; в этом смысле существуют понятия простейших видов деформации бруса – растяжение и сжатие, срез, кручение, изгиб.

1.5. Закон Гука. Основные принципы

Проводя опыты над различного типа пружинами, стержнями и нитями, английский учёный Р. Гук пришёл к выводу, что при их нагружении и при упругих деформациях в материале перемещения пропорциональны величине действующей силы $\delta = kP$. Эта зависимость получила название *закона Гука*. Коэффициент пропорциональности k зависит как от свойств материала, так и от геометрических параметров системы. В современной трактовке *закон Гука устанавливает линейную или прямо пропорциональную зависимость между напряжениями и деформациями* в точке тела. В этом случае коэффициент пропорциональности зависит только от свойств материала. Таким образом, закон Гука отражает свойства идеальной упругости материала.

Тела (системы), для которых выполняется закон Гука, называются *линейно упругими*. Системы, для которых зависимость между напряжениями и деформациями является нелинейной, называются *физически нелинейными*. Если выполняется закон Гука для материала, но зависимость между перемещениями и силами является нелинейной (при относительно больших перемещениях), то система называется *геометрически нелинейной*. В общем случае, для *нелинейных систем* могут присутствовать нелинейности обоих типов – физическая и геометрическая.

В механике деформируемых тел при анализе расчётной модели используются три основных принципа: принцип начальных размеров, принцип суперпозиции и принцип Сен-Венана.

Согласно *принципу начальных размеров для упругих систем, в которых перемещения малы, уравнения статики (равновесия) можно составлять для недеформированного состояния системы*. Смысл этого принципа показан на примере стержневой системы (рис. 1.9). Применяя метод сечений и составляя уравнение равновесия для отсечённой части системы при $\alpha_1 \approx \alpha$

$$\sum F_y = 0; \quad 2N \cos \alpha - P = 0; \quad N = \frac{P}{2 \cos \alpha},$$

можно достаточно просто найти внутренние силы в упругих элементах (стержнях).

Принцип начальных размеров неприменим для гибких систем, в которых имеют место большие перемещения, и для кинематически изменяемых систем, допускающих перемещение системы как жёсткого целого.

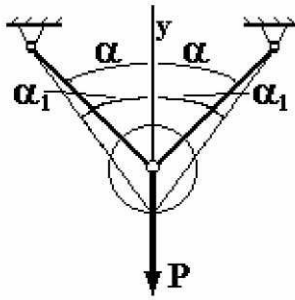


Рис. 1.9

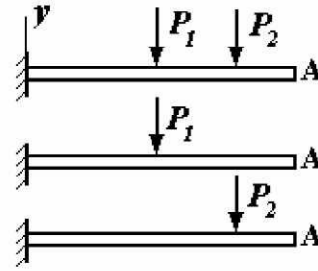
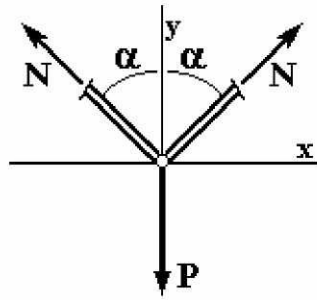


Рис. 1.10

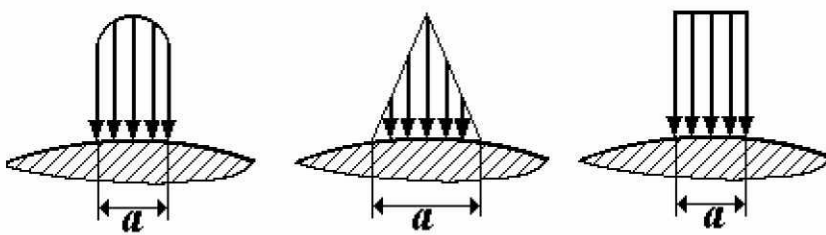
В соответствии с *принципом суперпозиции* (*принципом независимости действия сил*) эффект от действия нескольких сил равен суммарному эффекту от раздельного действия каждой силы. При этом значения искоемых величин (перемещений, внутренних сил и т.д.) не зависят от порядка приложения внешних сил. Например, вертикальное перемещение концевого сечения (V_A) консольной балки при совместном действии сил P_1 и P_2 (рис. 1.10) равно алгебраической сумме перемещений при действии каждой силы:

$$V_A(P_1, P_2) = V_A(P_1) + V_A(P_2).$$

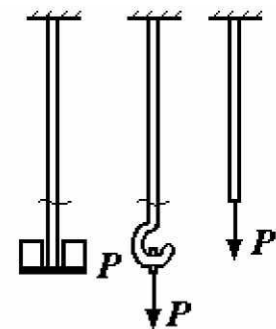
Принцип суперпозиции справедлив только для систем, которые подчиняются закону Гука и принципу начальных размеров.

Принцип Сен-Венана устанавливает, что особенности приложения нагрузки не сказываются в упругом теле на расстояниях, превышающих характерные поперечные размеры. Например, если рассматривать случаи действия на малой площадке различных распределённых нагрузок (рис. 1.11,а), причём равнодействующие этих поверхностных нагрузок одинаковые, то отличаться будут местные напряжения и деформации в пределах малой области.

При удалении от места приложения нагрузки, на расстоянии порядка размера a площадки нагружения (см. рис. 1.11,а), напряжения и деформации будут практически одинаковы.



а)



б)

Рис. 1.11

Нагрузки, имеющие одинаковые равнодействующие усилия, называются *статически эквивалентными*.

Таким образом, применяя принцип Сен-Венана, можно не учитывать особенности приложения внешних сил вне зоны их действия. Например, при расчёте троса на растяжение не играет роли способ приложения нагрузки: за счет подвески грузов или тяги через крюк (рис. 1.11,б). Отбрасывая части троса, примыкающие к его концам, и прикладывая статически эквивалентную нагрузку P , получаем единую расчётную модель стержня (см. рис. 1.11,б).

Принцип Сен-Венана распространяется и на тела, имеющие области резкого изменения геометрической формы. Например, брус с отверстиями, зоной ступенчатого изменения сечения (рис. 1.12).

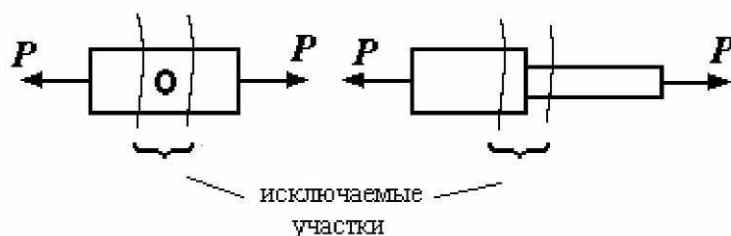


Рис. 1.12

В приближённых методах расчета бруса, применяемых в сопротивлении материалов, часто используется *гипотеза плоских сечений* (гипотеза Бернулли): сечения бруса, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации. Эта гипотеза хорошо соблюдается, за исключением зон возмущения, оговариваемых принципом Сен-Венана.

2. Механические свойства материалов

Для оценки прочности и жесткости конструкции необходимо знать механические свойства используемых материалов, которые определяются при специальных испытаниях образцов. Рассмотрим процессы изучения механических свойств материалов при наиболее простых видах нагружения – растяжении и сжатии.

2.1. Напряженно-деформированное состояние образца

На рис. 2.1,а показана схема нагружения цилиндрического образца, который подвергается растяжению на испытательной машине. На достаточном удалении от концов образца выделяется его рабочий участок длиной l и диаметром поперечного сечения d . В зависимости от соотношения этих размеров образец называется *нормальным* при $l = 10d$ и *коротким* при $l = 5d$. Иногда для испытаний используются плоские образцы прямоугольного поперечного сечения, изготовленные из полосы.

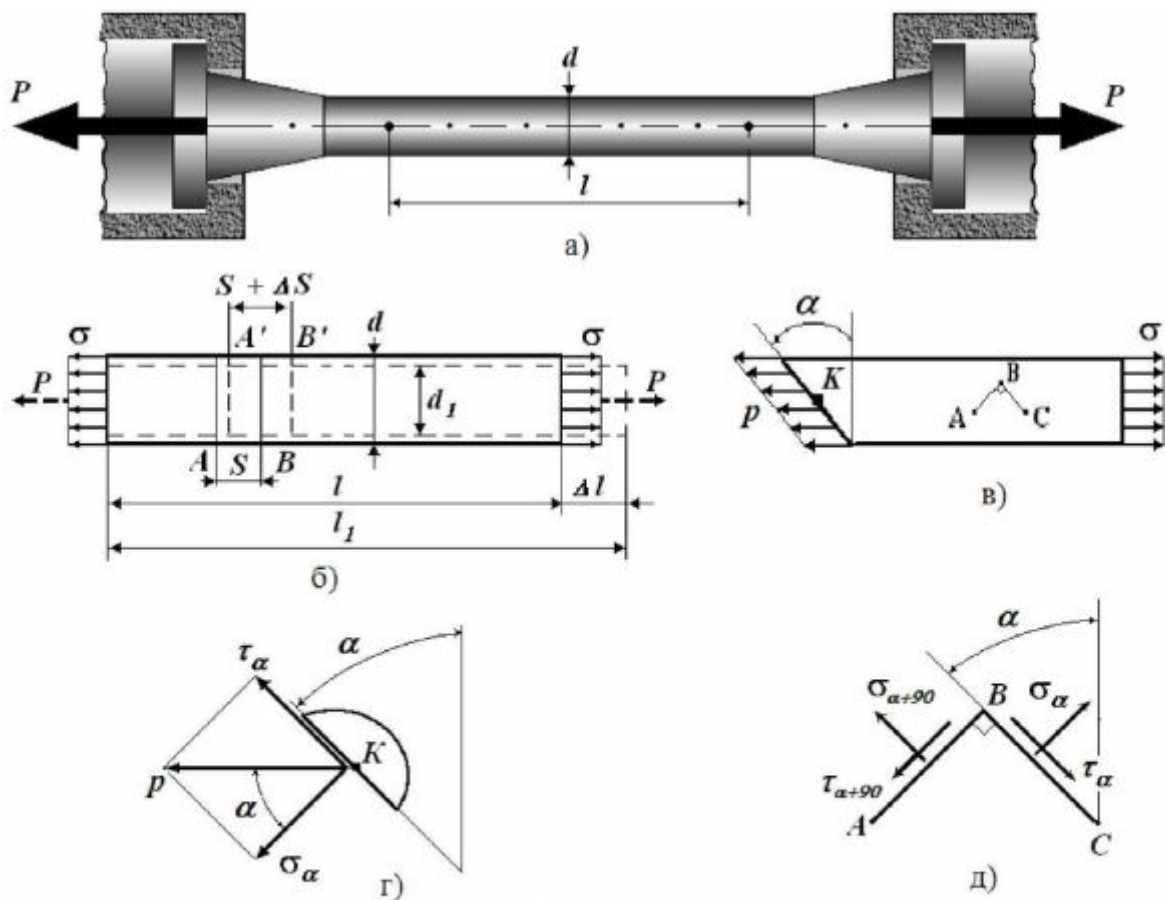


Рис. 2.1

На рис. 2.1,б показано нагружение и деформирование *рабочей части* образца (левое сечение условно принимается неподвижным). В соответст-

вии с принципом Сен-Венана нагружение рабочей части образца не зависит от особенностей приложения нагрузки к образцу, а определяется равнодействующей внешних сил P . В поперечных сечениях на рабочей части образца возникают внутренние силы, интенсивность распределения которых характеризуется нормальными напряжениями σ . При растяжении рабочая часть образца удлиняется ($\Delta l = l_1 - l$) в продольном направлении и сужается ($\Delta d = d_1 - d$) в поперечном направлении. Если нанести на поверхность образца поперечные параллельные линии, то можно заметить, что они не искривляются и остаются параллельными, а расстояния между ними увеличиваются. Это является экспериментальным подтверждением гипотезы плоских сечений (гипотезы Бернулли). Согласно этой гипотезе *сечение плоское до деформации остается плоским и после деформации*.

Рассмотрим упругую деформацию образца при его осевом нагружении. Линейная деформация отрезка AB длиной S (см. рис. 2.1,б) $\varepsilon = \Delta S/S$ постоянна по сечению образца и не зависит от того, в каком месте рабочей части образца выделен этот отрезок. Отсюда следует, что продольная деформация в любой точке рабочей части образца одинакова и может определяться по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} . \quad (2.1)$$

В данном случае, *продольная деформация ε* равна отношению изменения длины участка к его первоначальной длине, т.е. представляет собой *относительное изменение длины участка образца (стержня)*.

Соответственно, поперечные деформации определяются отношением

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d} . \quad (2.2)$$

Экспериментальные данные показывают, что *поперечные и продольные деформации* связаны соотношением

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon , \quad (2.3)$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Коэффициент Пуассона может быть определен с использованием экспериментально замеренных поперечных и продольных деформаций:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| . \quad (2.4)$$

Для изотропных материалов значения коэффициента Пуассона лежат в пределах $0 < \mu < 0,5$. Например, для сталей $\mu = 0,25-0,31$.

Примечание. Найдем объемную деформацию рабочей части образца:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V} = \frac{F_1 l_1}{Fl} - 1,$$

где $V = Fl$ - начальный объем рабочей части образца; F - площадь поперечного сечения образца до нагружения; $V_1 = F_1 l_1$ - объем рабочей части образца после деформирования; F_1 - площадь поперечного сечения образца после нагружения.

Учитывая соотношения $d_1 = d + \Delta d$, $l_1 = l + \Delta l$ и формулы (2.1) - (2.3), получим:

$$\varepsilon = \frac{(d + \Delta d)^2}{d^2} \cdot \frac{l + \Delta l}{l} - 1 = (1 - \mu\varepsilon)^2 (1 + \varepsilon) - 1.$$

Пренебрегая членами с ε^2 и ε^3 как величинами более высокого порядка малости по сравнению с ε , получим следующее выражение:

$$\varepsilon_v = (1 - 2\mu)\varepsilon. \quad (2.5)$$

Очевидно, что при растяжении $\varepsilon_v > 0$ и $\varepsilon > 0$, поэтому получим, что $\mu \leq 0,5$.

В соответствии с постоянством деформаций по объему рабочей части образца приходим к заключению о неизменности напряжений во всех точках рабочей части образца. Такое напряженное состояние стержня (образца) называется *однородным* ($\sigma = \text{const}$). Напряженное состояние участков образца переменного сечения является неоднородным (см. рис. 2.1,а).

Нормальные напряжения σ и полные напряжения p соответственно в поперечных и наклонных сечениях рабочей части образца распределены равномерно (рис. 2.1,в), что соответствует гипотезе плоских сечений. Отсюда выражение для нормальных напряжений в поперечном сечении стержня при растяжении (сжатии):

$$\sigma = \frac{P}{F}, \quad (2.6)$$

где F - площадь поперечного сечения.

Полные напряжения p в наклонном сечении стержня под углом α к поперечному сечению (см. рис. 2.1,в) находятся из условия равновесия выделенной части стержня:

$$pF_\alpha = \sigma F,$$

где $F_\alpha = F/\cos\alpha$ - площадь наклонного сечения.

Откуда получим соотношение

$$p = \sigma \cos\alpha. \quad (2.7)$$

Полные напряжения p в произвольной точке K могут быть разложены на нормальные и касательные напряжения (рис. 2.1,г):

$$\sigma_{\alpha} = p \cos \alpha, \quad \tau_{\alpha} = p \sin \alpha.$$

Эти напряжения с учетом выражений (2.7) определяются по формулам:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha; \quad \tau_{\alpha} = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha. \quad (2.8)$$

Анализ формул (2.8) показывает, что нормальные напряжения σ_{α} максимальны в поперечных сечениях ($\alpha = 0$) стержня (образца), а касательные напряжения τ_{α} максимальны в сечениях под углом $\alpha = 45^{\circ}$, где они равны:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sigma. \quad (2.9)$$

В продольных сечениях ($\alpha = 90^{\circ}$) касательные и нормальные напряжения отсутствуют.

Используя соотношения (2.8), можно получить, что для взаимно перпендикулярных площадок (см. рис. 2.1,д) справедливы равенства:

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+90} = \sigma, \quad |\tau_{\alpha}| = |\tau_{\alpha+90}|. \quad (2.10)$$

Из первого равенства следует, что сумма нормальных напряжений во взаимно перпендикулярных площадках есть величина постоянная.

Во втором равенстве проявляется общее свойство касательных напряжений, так называемый *закон парности касательных напряжений*: на взаимно перпендикулярных площадках действуют касательные напряжения, равные по величине и направленные либо от ребра, либо к ребру пересечения этих площадок.

2.2. Испытание на растяжение

Образец из соответствующего материала растягивается на испытательной машине (см. рис. 2.1,а). Обычно испытание образца проводится до разрушения. В результате испытания образца получается *диаграмма растяжения* – графическая зависимость между растягивающей силой P и удлинением образца Δl , записанная автоматически с помощью диаграммного аппарата испытательной машины. На рис. 2.2,а показана характерная диаграмма растяжения для пластичного материала. Диаграмма растяжения зависит не только от свойств материала, но и от размеров образца.

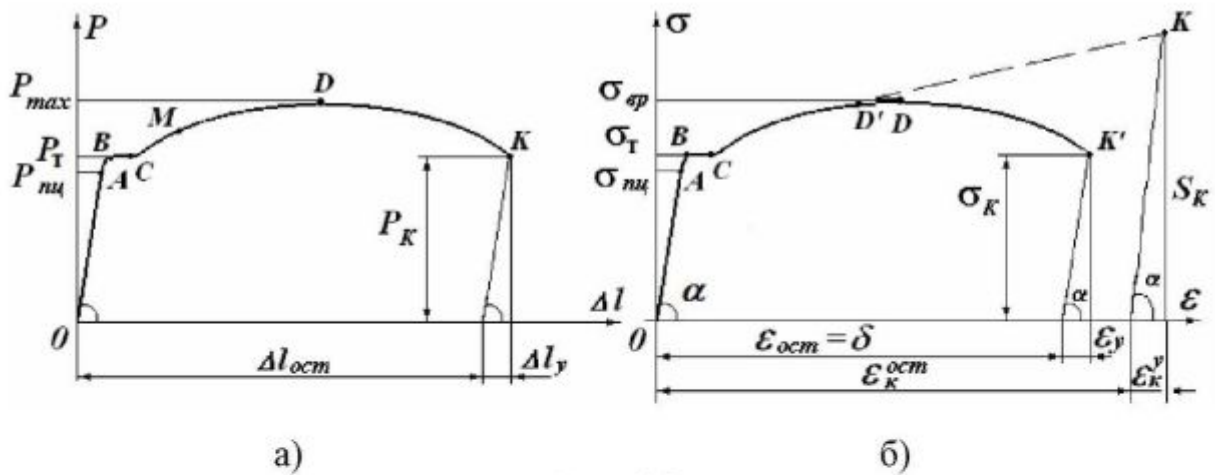


Рис. 2.2

Для получения прочностных характеристик материала диаграмму растяжения перестраивают в *диаграмму условных напряжений* в координатах σ - ε , используя формулы (2.1) и (2.6)

$$\sigma = \frac{P}{F}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где F и l – площадь поперечного сечения и длина рабочей части образца до нагружения.

Диаграмма условных напряжений показана на рис. 2.2,б сплошной линией. Если по оси ординат откладывать напряжения, определяемые с учетом изменения площади поперечного сечения образца, а по оси абсцисс – наибольшие линейные деформации в данный момент нагружения, то получим *диаграмму истинных напряжений*. Эта диаграмма показана на рис. 2.2,б пунктирной линией (заметное отличие от диаграммы условных напряжений наблюдается только от точки D на участке DK).

Рассмотрим характерные участки и точки на диаграммах.

Участок OA диаграммы носит название *зоны упругости*, так как материал образца подчиняется *закону Гука* при одноосном напряженном состоянии:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.11)$$

т.е. напряжения прямо пропорциональны деформациям.

Коэффициент пропорциональности E – *модуль Юнга* (модуль продольной упругости, модуль упругости первого рода). Численно $E = \operatorname{tg} \alpha$ (см. рис. 2.2,б).

Модуль Юнга зависит только от свойств материала. Например, для сталей $E = 190\text{--}210$ ГПа; для алюминиевых сплавов $E = 70\text{--}72$ ГПа и т.д.

Наибольшее напряжение, до которого выполняется закон Гука, называется *пределом пропорциональности*

$$\sigma_{mц} = \frac{P_{mц}}{F} . \quad (2.12)$$

При нагружении до силы $P = P_{mц}$ и последующей разгрузке образец принимает первоначальные размеры, т.е. деформируется упруго.

Вычисляя напряжения по формуле (2.6) при заданной нагрузке и экспериментально определяя деформации ϵ , можно найти величину модуля Юнга для данного материала:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} . \quad (2.13)$$

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона являются упругими характеристиками материала.

Участок **BC** диаграммы называется *площадкой текучести* или участком общей текучести. На этой стадии нагружения происходит существенное изменение длины образца без заметного увеличения нагрузки. Явление роста деформации без увеличения нагрузки (напряжений) называется *текучестью* материала.

Напряжение, при котором наблюдается явление текучести материала, называется *пределом текучести*

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F} . \quad (2.14)$$

При испытании специальных образцов можно наблюдать, что на стадии общей текучести полированная поверхность образца покрывается сеткой тонких линий или *полос скольжения* (рис. 2.3,а), называемых также *линиями Чернова*.

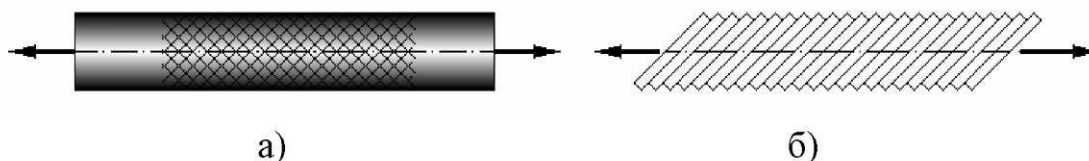


Рис. 2.3

Эти линии являются следами плоскостей скольжения (сдвига) частиц материала относительно друг друга. Они совпадают с плоскостями действия максимальных касательных напряжений τ_{max} и наклонены под углом 45° к оси образца, как было показано при анализе выражения (2.8). В упругом виде схема деформирования образца в результате соскальзыва-

ния кристаллических слоев материала по наклонным плоскостям изображена на рис. 2.3,б. Соответствующие деформации образца, связанные с действием касательных напряжений, называются пластическими.

Если в материале появились *пластические деформации*, то при разгрузке образец не принимает первоначальные размеры. При этом образец получает *остаточные удлинения* $\Delta l_{ост}$ и *деформации* $\epsilon_{ост}$. Для многих элементов конструкций возникновение пластических деформаций недопустимо, поэтому напряжения σ_T считаются *предельными* для материала.

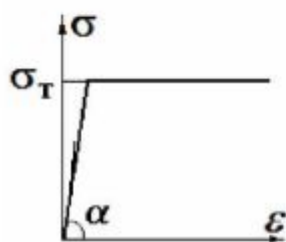


Рис. 2.4

Примечание. При расчетах часто используют схематизированную диаграмму упругопластичного материала – *диаграмму Прандтля* (рис. 2.4). Экспериментально установлено, что пластическое деформирование протекает без изменения объема материала и $\mu \rightarrow 0,5$, как следует из выражения (2.5). Это физически объяснимо, так как пластические деформации определяются сдвигом слоев материала, а не увеличением расстояний между частицами, как в упругой зоне.

В тех случаях, когда на диаграмме растяжения отсутствует площадка текучести (рис. 2.5,а), для материала определяют *условный предел текучести* (рис. 2.5,б)

$$\sigma_{0,2} = \frac{P_{0,2}}{F} \quad (2.15)$$

Напряжение, при котором остаточная деформация равна 0,2% ($\epsilon_{ост} = 0,002 = 0,2\%$) называется *условным пределом текучести*.

Значение силы $P_{0,2}$ определяют с учетом *закона разгрузки*, который определяет, что при снятии нагрузки материал деформируется упруго в соответствии с *законом Гука* (см. рис. 2.5,а).

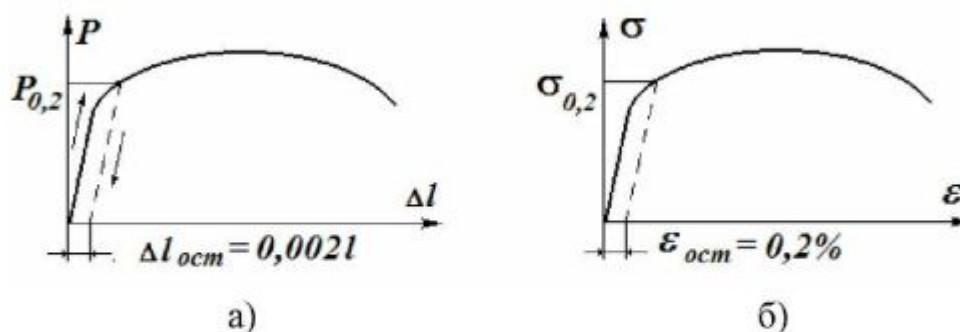


Рис. 2.5

Участок *CD* диаграммы называется *зоной упрочнения*. На этой стадии деформирования образца происходит возрастание нагрузки и напряжений,

но гораздо менее интенсивно, чем при упругой деформации.

В конце зоны упрочнения сила, воспринимаемая образцом, достигает максимального значения (см. рис. 2.2). Напряжения при максимальной силе, действующей на образец, называются *временным сопротивлением* $\sigma_{вр}$ или *пределом прочности при растяжении*

$$\sigma_{вр} = \frac{P_{max}}{F} \quad (2.16)$$

Участок *DK (D'K')* диаграммы называется зоной *местной текучести*. На этой стадии нагружения происходит интенсивное развитие местного сужения образца – так называемой *шейки* (рис. 2.6,а).

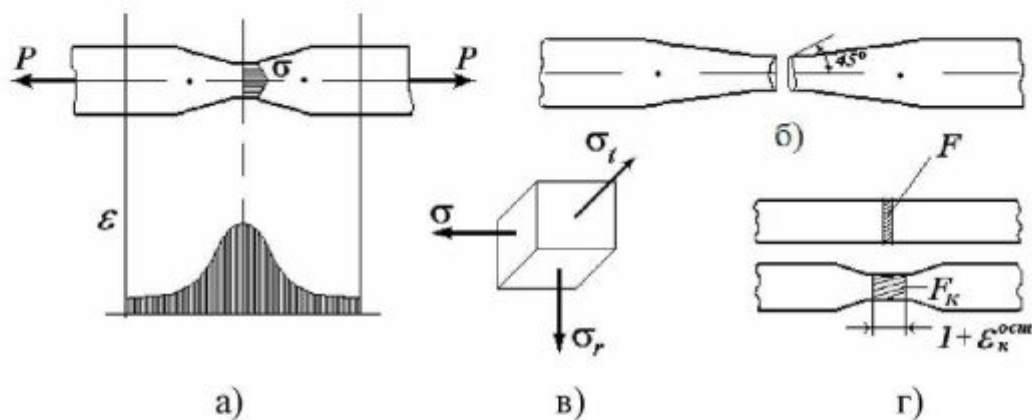


Рис. 2.6

Удлинение образца происходит, в основном, за счет увеличения местных деформаций в зоне шейки. Вследствие резкого сужения образца в шейке сила P уменьшается. Разрушение образца происходит при нагрузке $P_{к}$ (см. рис. 2.2,а). До момента разрушения полное удлинение образца состоит из двух частей $\Delta l = \Delta l_y + \Delta l_{ост}$, где Δl_y – упругое удлинение, $\Delta l_{ост}$ – остаточное удлинение. Соответственно, получают $\epsilon = \epsilon_y + \epsilon_{ост}$, т.е. различают упругую и остаточную деформацию (см. рис. 2.2,б). После разрушения в образце остаётся пластическое (остаточное) удлинение $\Delta l_{ост}$, а упругая часть удлинения Δl_y исчезает.

В момент разрушения *среднее напряжение в шейке* или *истинное сопротивление разрыву* (см. рис. 2.2,б) определяется по формуле

$$S_{к} = \frac{P_{к}}{F_{к}} \quad (2.17)$$

где $F_{к}$ – площадь поперечного сечения шейки.

Примечание. При снижении нагрузки P уменьшаются условные напряжения на участке DK' , которые можно считать напряжениями вне зоны шейки. В самой же шейке напряжения возрастают, а разрушение образца происходит по типу "чашка и конус" (рис. 2.6,б). Это объясняется влиянием сдвигов на периферии сечений шейки и *объемным напряженным состоянием* (рис. 2.6,в) ближе к центру, где и начинается образование трещины от действия продольных σ , окружных σ_t и радиальных σ_r напряжений. Таким образом, в поверхностном слое шейки наблюдается пластический характер разрушения, а в центральной части разрушение носит хрупкий характер.

Величина ϵ_k находится из условия равенства объема материала до и после испытания (рис. 2.6,г). Вблизи места разрыва часть образца единичной длины до испытания имеет объем $F \cdot 1$, а после разрыва $F_k (1 + \epsilon_k^{ост})$.

$$\text{Тогда } F = F_k (1 + \epsilon_k^{ост}) \text{ или } \epsilon_k^{ост} = \frac{F}{F_k} - 1.$$

С учетом закона разгрузки получим:

$$\epsilon_k = \epsilon_k^y + \epsilon_k^{ост} = \frac{S_k}{E} + \frac{F}{F_k} - 1.$$

Касательная $D'K$ (см. рис. 2.2,б) приближенно характеризует диаграмму истинных напряжений. До т. D условная и истинная диаграммы практически совпадают. Координаты т. K' определяются по формулам:

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F}; \quad \epsilon_k = \epsilon_y + \epsilon_{ост} = \frac{\sigma_k}{E} + \frac{\Delta l_{ост}}{l}.$$

Основными прочностными характеристиками пластичного материала при растяжении являются предел пропорциональности $\sigma_{пл}$, предел текучести σ_T (или условный предел текучести $\sigma_{0,2}$) и предел прочности $\sigma_{вр}$.

Рассмотрим теперь характеристики пластичности материала.

Средняя остаточная деформация после разрыва $\epsilon_{ост} = \Delta l_{ост} / l$ (см. рис. 2.2,б), выраженная в процентах, обозначается δ и называется *относительным остаточным удлинением при разрыве*

$$\delta\% = \frac{\Delta l_{ост}}{l} 100\% = \frac{l_k - l}{l} 100\%, \quad (2.18)$$

где l_k – длина рабочей части образца после его разрыва.

Относительное остаточное поперечное сужение, выраженное в процентах, определяется по формуле

$$\psi\% = \frac{F - F_k}{F} \cdot 100\%. \quad (2.19)$$

Параметры δ и ψ являются важнейшими характеристиками пластических свойств материала.

Обычно для *пластичных материалов* $\delta > 10\%$, для *малопластичных материалов* $\delta = 5-10\%$, для *хрупких материалов* $\delta < 5\%$.

Хрупкие материалы по своим свойствам резко отличаются от пластичных материалов. На рис. 2.7 показаны характерные диаграмма растяжения и диаграмма напряжений для хрупкого материала. Прочностными характеристиками являются *предел пропорциональности* $\sigma_{пц}$ и *предел прочности* $\sigma_{вр}$ при растяжении.

Сравнивая поведение образцов из пластичного и хрупкого материалов при растяжении и соответствующие диаграммы напряжений, отметим следующее.

1. При растяжении хрупкие материалы обладают малым сопротивлением разрыву и разрушаются внезапно по поперечному сечению образца (рис. 2.7,а). Основной прочностной характеристикой хрупкого материала при растяжении является предел прочности $\sigma_{вр}$, который определяется по формуле (2.16).

2. Явления текучести, упрочнения и образования шейки у образцов из хрупкого материала не наблюдаются.

3. Строго говоря, для хрупкого материала не соблюдается закон Гука, и принимаемая линейная зависимость $\sigma = E\varepsilon$ является приближенной (см. рис. 2.7,б).

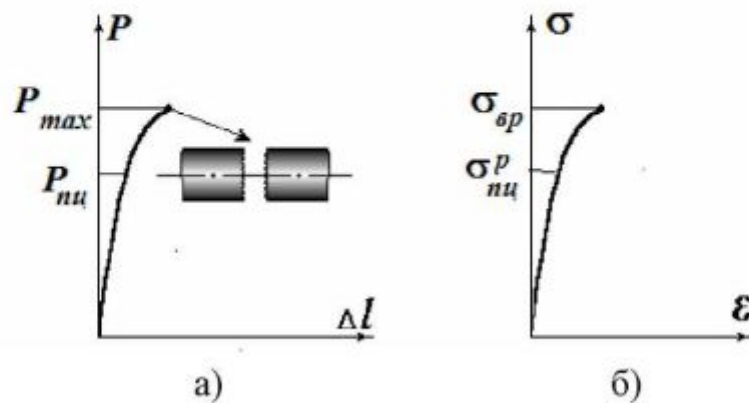


Рис. 2.7

2.3. Испытание на сжатие

При испытании металлических материалов на сжатие применяют короткие цилиндрические образцы (рис. 2.8,а) высотой $h = (2-3)d$. Это позволяет избежать продольного изгиба образцов при сжатии. При испытании строительных материалов используются образцы кубической формы (рис. 2.8,б).

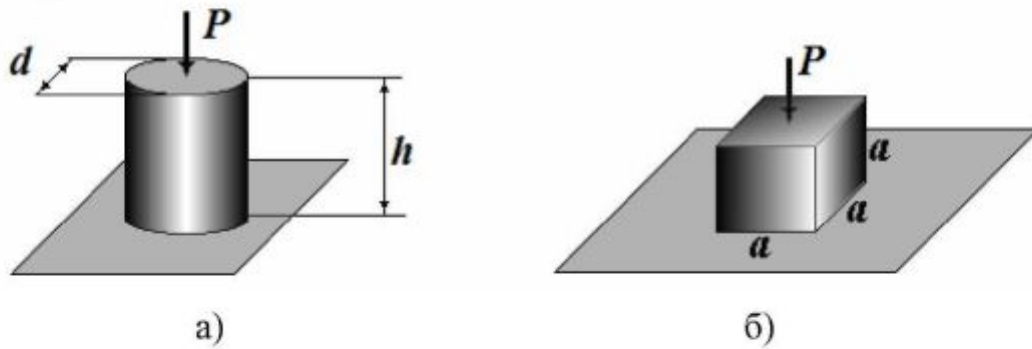


Рис. 2.8

На рис. 2.9,а показана *диаграмма сжатия* для пластичного материала, а на рис. 2.9,б – соответствующая *диаграмма условных напряжений*.

Эти диаграммы получаются так же, как аналогичные диаграммы при испытании на растяжение.

При сжатии образцы из пластичного материала не разрушаются. После появления пластических деформаций и дальнейшего нагружения образец принимает бочкообразную форму (см. рис. 2.9,а) вследствие наличия сил трения на торцевых поверхностях. Предела прочности на сжатие для пластичных материалов не существует, так как отсутствует P_{max} .

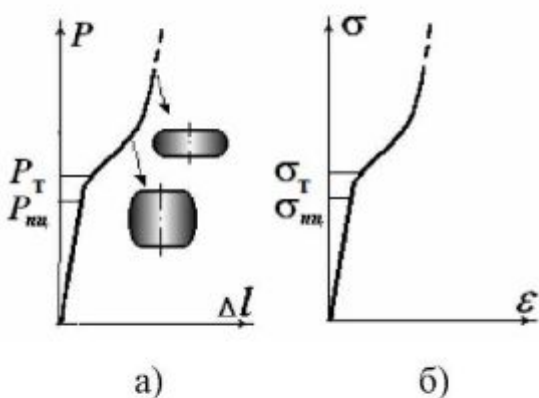


Рис. 2.9

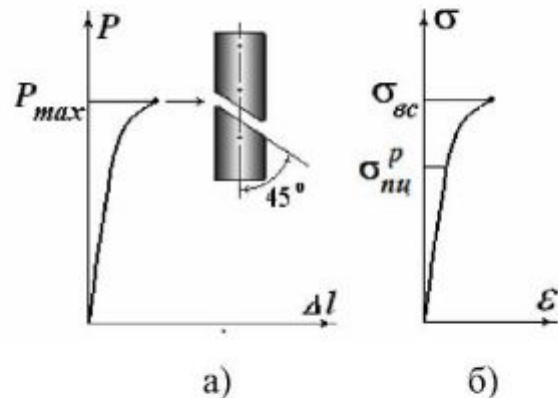


Рис. 2.10

Сравним диаграммы, полученные при испытании на сжатие и растяжение (см. рис. 2.2 и рис. 2.9).

Для пластичного материала при сжатии также справедлив закон Гука

(2.3), причем при сжатии и растяжении равны модули упругости E .

Для большинства пластичных материалов пределы пропорциональности ($\sigma_{\text{пл}}$) и пределы текучести (σ_{T}) при растяжении и сжатии приблизительно одинаковы, и в этом смысле говорят, что пластичные материалы одинаково работают на растяжение и сжатие. Однако площадка текучести на диаграмме сжатия отчетливо не выражена.

Для малопластичных материалов обычно $\sigma_{\text{Tс}} > \sigma_{\text{Tр}}$ (как правило, это условные пределы текучести материала при сжатии и растяжении).

Диаграмма сжатия хрупкого материала (рис. 2.10,а) внешне похожа на диаграмму растяжения (рис. 2.7,а). Но поведение и разрушение образцов при растяжении и сжатии различное. При сжатии образец разрушается от сдвига частиц в плоскости действия максимальных касательных напряжений τ_{max} под углом 45° к оси. Основной прочностной характеристикой хрупкого материала является *предел прочности при сжатии* $\sigma_{\text{вс}}$ (рис. 2.10,б). Причем обычно $\sigma_{\text{вс}} > \sigma_{\text{вр}}$, т.е. хрупкий материал лучше работает на сжатие, чем на растяжение. Например, для различных марок чугуна соотношение прочностных характеристик меняется в пределах $\sigma_{\text{вс}}/\sigma_{\text{вр}}=2-5$.

2.4. Влияние различных факторов на механические свойства материалов

Отмеченные выше свойства материалов относились к испытаниям в нормальных условиях, т.е. при температуре 20°C и при скоростях деформации, обеспечивающих статический характер нагружения. В то же время эксплуатационные режимы работы реальных конструкций чаще всего отличаются от указанных условий, поэтому экспериментально изучается влияние различных факторов на механические и упругие характеристики материалов.

2.4.1. Упрочнение материала

Если образец нагрузить силой $P > P_{\text{T}}$ (τM на диаграмме, см. рис. 2.2,а), то процесс разгрузки на диаграмме изобразится прямой линией – линия ML параллельна линии OA (рис. 2.11,а). При полной разгрузке образца длина его рабочей части будет больше первоначальной длины на величину $\Delta l_{\text{ост}}$.

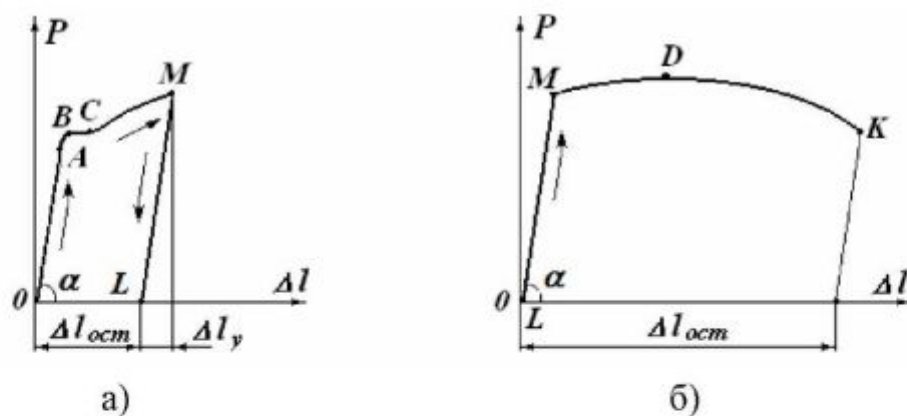


Рис. 2.11

При повторном нагружении образца диаграмма растяжения представлена на рис. 2.11,б. Отрезок **OM** больше отрезка **OA**, т.е. для материала происходит увеличение предела пропорциональности $\sigma_{пц}$ и соответствующей величины Δl_y .

Явление повышения упругих и прочностных свойств материала в результате предварительного пластического деформирования носит название упрочнения или наклепа. После предварительного пластического деформирования ухудшаются пластические свойства материала, т.к. уменьшается $\Delta l_{ост}$ (см. рис. 2.11,б), а значит, уменьшается величина δ .

К наклёпу, часто имеющему место в технике, относятся по-разному. В некоторых случаях он полезен и его создают искусственно (предварительная вытяжка цепей, тросов, опрессовка трубопроводов и т.п.), в других – нежелателен и его устраняют (отжиг деталей перед штамповкой и др.).

2.4.2. Влияние термической обработки и температуры

Термическая обработка широко применяется для получения необходимых механических характеристик материалов. Закалка стали значительно повышает предел текучести и предел прочности, но сильно снижает пластические свойства. При этом модуль упругости практически не меняется. Обратный эффект имеет применение отжига.

На механические характеристики металлов оказывает влияние температура. На рис. 2.12 показаны зависимости механических и упругих характеристик от температуры для малоуглеродистой стали. При $T > 300^\circ\text{C}$ сильно уменьшаются прочностные характеристики стали. При низких температурах ($T < 0^\circ\text{C}$) прочностные характеристики несколько повышаются, но ухудшаются пластические свойства стали.

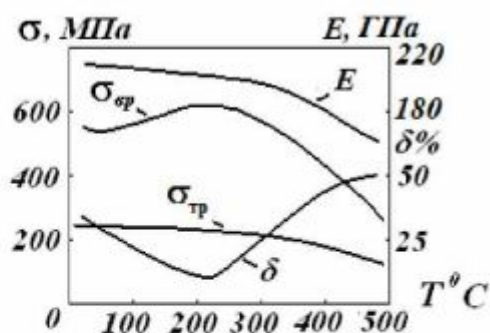


Рис. 2.12

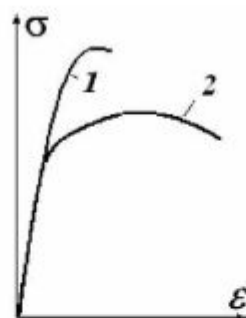


Рис. 2.13

2.4.3. Влияние скорости деформирования

При увеличении скорости нарастания нагрузки, а следовательно, скорости роста напряжений и деформаций для всех пластичных материалов заметно увеличиваются прочностные характеристики ($\sigma_{тп}$, $\sigma_{сп}$) и ухудшаются пластические свойства. Для сравнения на рис. 2.13 приведены диаграммы напряжений динамического и статического растяжения (соответственно, кривые 1 и 2). Наиболее заметно сказывается влияние скорости деформирования при высоких температурах.

2.4.4. Ползучесть материала и релаксация напряжений

На напряжения и деформации в нагруженных деталях оказывает влияние временной фактор, т.е. проявляется влияние длительного воздействия нагрузки. Для материала деталей могут иметь место такие явления как ползучесть материала и релаксация напряжений.

Ползучестью материала называется явление увеличения деформации с течением времени при постоянном напряжении. Зависимости $\epsilon(t)$ показаны на рис. 2.14,а. В начальный промежуток времени $0 - t_0$, в течение которого прикладывается нагрузка, соответствующая уровню напряжений σ_0 , в материале создается начальная деформация ϵ_0 (упругая или упруго-пластическая). Далее с течением времени без увеличения нагрузки происходит рост деформаций. В течение какого-то времени в материале наблюдается установившаяся ползучесть, характеризуемая постоянной скоростью деформации (участок *AB* на интервале $t_1 - t_2$, см. рис. 2.14,а), которая может происходить очень длительное время (иногда годами).

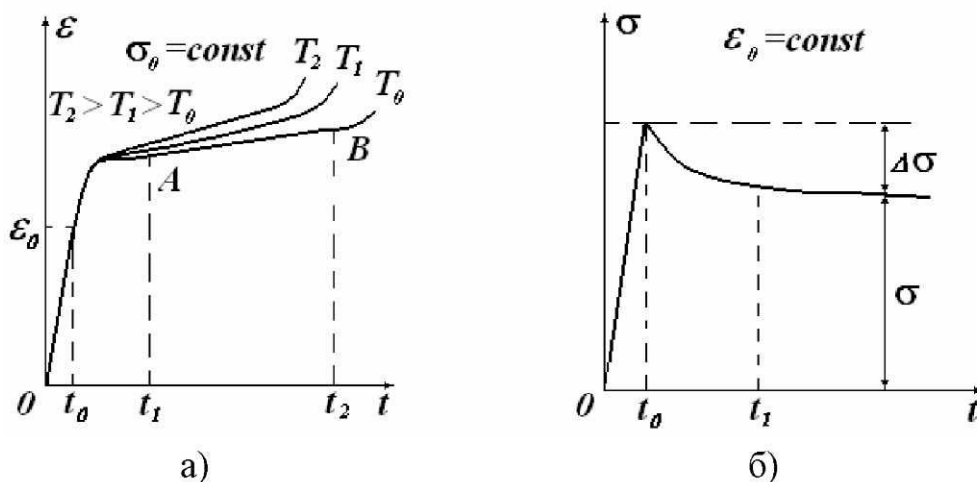


Рис. 2.14

Чем выше напряжение σ_0 , тем более интенсивно происходит ползучесть. Особенно интенсивно явление ползучести проявляется для конструкций, работающих при высоких температурах (деталей двигателей, химического аппарата и др.). С увеличением температуры T кривые ползучести идут круче (см. рис. 2.14,а).

Релаксацией напряжений называется явление снижения напряжений с течением времени при постоянной деформации. Зависимость $\sigma(t)$ показана на рис. 2.14,б. Снижение напряжений наиболее интенсивно происходит в начальный промежуток времени t_0-t_1 , а затем скорость снижения напряжений уменьшается. Чем выше деформация ϵ_0 , тем более заметно проявляется релаксация напряжений (увеличивается $\Delta\sigma$). У многих материалов релаксация напряжений особенно заметна при высоких температурах. Например, происходит ослабление затяжки болтовых соединений, работающих в условиях высоких температур.

2.5. Расчёт на прочность. Коэффициент запаса

При проектировании конструкции устанавливают необходимые критерии ее работоспособности, т.е. определяют условия, при которых конструкция будет способна выполнять рабочие функции. В связи с этим существуют различные методы расчета конструкций (расчеты на прочность, жесткость, устойчивость и др.). В машиностроении широко применяется метод расчета на прочность по допускаемым напряжениям.

2.5.1. Условие прочности

В результате расчетного анализа конструкции определяют напряжения в её элементах. С другой стороны, в результате испытаний получают

прочностные характеристики материалов (σ_T , σ_B), определяющие предельное поведение материала (возникновение остаточных деформаций или разрушение). Для того чтобы конструкция способна была выдержать действующие нагрузки и гарантировать её прочность с некоторым запасом, принимается так называемое *условие прочности*.

Для конструкции из пластичного материала условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] , \quad (2.20)$$

где σ_{max} – наибольшее напряжение в конструкции (в опасной точке); $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

Напряжения σ_{max} определяют на основе общего расчёта конструкции и анализа напряжений в её элементах. Допускаемое напряжение выбирают меньше предельного напряжения для данного материала. Допускаемое напряжение для конструкций из пластичного материала либо назначают согласно нормам прочности, либо определяют по формуле:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]} , \quad (2.21)$$

где σ_T – предел текучести (или условный предел текучести $\sigma_{0,2}$) для данного материала; $[n_T]$ – нормативный (заданный) коэффициент запаса по пределу текучести.

Для конструкции из хрупкого материала используется система из двух условий прочности:

$$\begin{cases} \sigma_{max}^p \leq [\sigma]_p \\ \sigma_{max}^c \leq [\sigma]_c \end{cases} , \quad (2.22)$$

где $\sigma_{max}^p, \sigma_{max}^c$ – максимальные значения растягивающих и сжимающих напряжений в конструкции; $[\sigma]_p, [\sigma]_c$ – допускаемые значения напряжения при растяжении и сжатии.

Допускаемые напряжения либо назначают согласно нормам прочности, либо определяют по формулам:

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_{вр}}{[n_B]} ; \quad [\sigma]_c = \frac{\sigma_{вс}}{[n_B]} , \quad (2.23)$$

где $[n_B]$ – нормативный коэффициент запаса по пределу прочности.

Таким образом, для конструкций из пластичных и хрупких материалов смысл условия прочности очевиден: *максимальные напряжения не должны превышать допускаемых напряжений для конструкции (или детали).*

На рис. 2.15 показаны диаграммы напряжений для пластичного (а) и хрупкого (б, в) материалов.

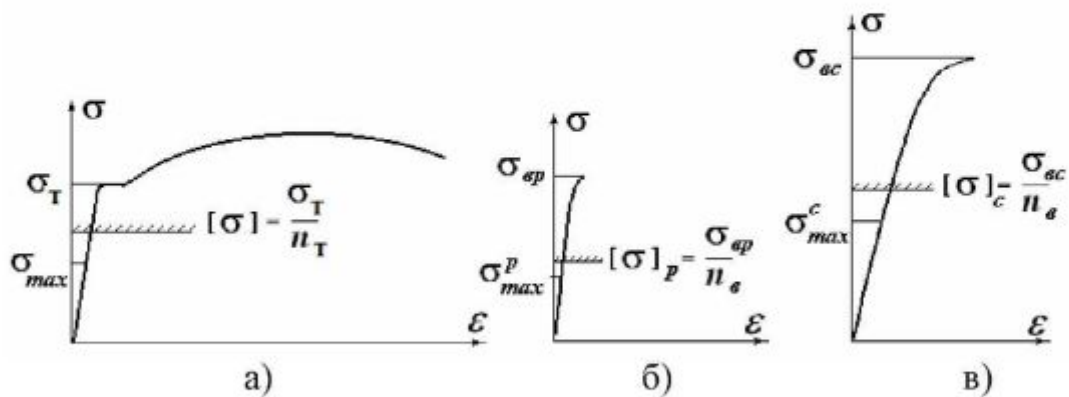


Рис. 2.15

На диаграммах напряжений допускаемые напряжения (2.21), (2.23) определяют те значения, которые не должны превосходить действующие напряжения ни в одной точке нагруженной детали.

Нередко оценку прочности делают по коэффициенту запаса:

$$n \geq [n], \quad (2.24)$$

где n – расчётный коэффициент запаса прочности; $[n]$ – нормативный (заданный, допускаемый) коэффициент запаса прочности.

Коэффициент запаса прочности n определяют для опасной точки конструкции, где возникают наибольшие напряжения:

$$n = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{max}}, \quad (2.25)$$

где $\sigma_{пред}$ – предельное напряжение для данного материала (принимается σ_T или $\sigma_{0,2}$ для пластичного материала или $\sigma_{вр}$, $\sigma_{вс}$ для хрупкого материала).

С использованием условий прочности решают три основные задачи.

1. Подбор геометрических параметров детали при заданной нагрузке и допускаемом напряжении (*проектировочный расчет*).
2. Определение максимально допустимой нагрузки, если известны геометрические параметры детали и допускаемое напряжение.
3. Проверка прочности детали, если известны геометрические параметры детали, нагрузка и допускаемое напряжение (*проверочный расчет*).

2.5.2. Коэффициент запаса

Выбор коэффициента запаса требует тщательного обоснования. С одной стороны, при недостаточной его величине может произойти нарушение несущей способности конструкции (например, в результате случайного кратковременного увеличения нагрузки). С другой стороны, неоправданное завышение его величины приведет к значительному увеличению материалоемкости конструкции, а в ряде случаев – и к невозможности выполнения необходимых функций. При назначении коэффициента запаса учитывается имеющийся опыт эксплуатации аналогичных конструкций, а также и влияние различных факторов. В частности, следует принимать во внимание следующие факторы.

Функциональные требования. Величина n существенно зависит от назначения конструкции, использующейся в той или иной отрасли техники. Например, в самолётостроении коэффициент запаса принимают равным 1,8–2,5, а в строительстве он может быть и больше 5.

Расчетные и экспериментальные методы исследования. Совершенствование этих методов позволяет получать более достоверную и обширную информацию по анализу конструкций, а следовательно, и снижать величину коэффициента запаса.

Свойства материалов. Для конструкций из пластичных материалов величина коэффициента запаса выбирается обычно меньше, чем при использовании хрупких материалов. Это объясняется большей однородностью пластичного материала, а также и различием возможных последствий при превышении предельных напряжений в опасных точках – появление остаточных деформаций или разрушение элемента конструкции.

Характер действия нагрузки. При статических нагрузках значение коэффициента запаса принимают меньшим, чем при динамических нагрузках. Это связано с неточностью определения динамических нагрузок, различием в характере поведения и разрушения материала при статическом и динамическом воздействии и другими причинами.

Внешняя среда. Наличие агрессивной среды существенно сказывается на поведении материала в процессе нагружения, на механических свойствах материалов. В таких случаях обычно увеличивают коэффициент запаса по сравнению с его величиной при нормальных условиях. В частности, для деталей, работающих при повышенных температурах, уменьшают допускаемые напряжения.

Коэффициент запаса прочности и допускаемые напряжения не являются раз и навсегда установленными параметрами в расчетной практике. По мере накопления опыта проектирования и эксплуатации конструкций, повышения уровня технологии их изготовления, степени совершенствования методов анализа конструкций происходит постепенное уменьшение нормативного коэффициента запаса прочности и повышение допускаемых напряжений.

3. Растяжение и сжатие

Растяжение или сжатие бруса вызывает действие внешних сил вдоль оси бруса (стержня). При растяжении (или сжатии) в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные силы N . На рис. 3.1 показано применение метода сечений для определения нормальной силы.

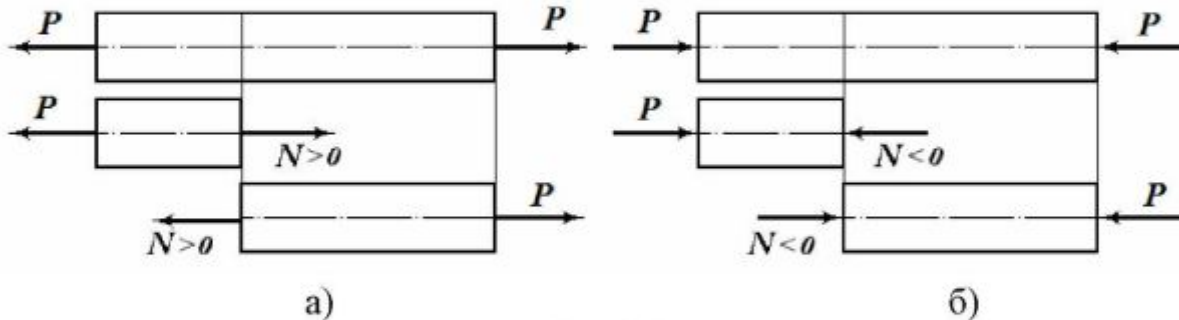


Рис. 3.1

Для нормальной силы принято следующее *правило знаков*: при растяжении нормальная сила положительная ($N > 0$) и направлена от сечения (рис. 3.1,а); при сжатии нормальная сила отрицательная ($N < 0$) и направлена к сечению (рис. 3.1,б). Это правило знаков имеет физический смысл: во-первых, все материалы по-разному сопротивляются при растяжении и сжатии; во-вторых, при сжатии возможна потеря устойчивости стержня. Поэтому правило знаков для нормальной силы следует строго соблюдать.

3.1. Определение нормальных сил

Нормальная сила N в произвольном сечении стержня определяется *по методу сечений*. Рассмотрим нагружение стержня сосредоточенными силами и равномерной погонной нагрузкой $q_i = const$ (рис. 3.2,а).

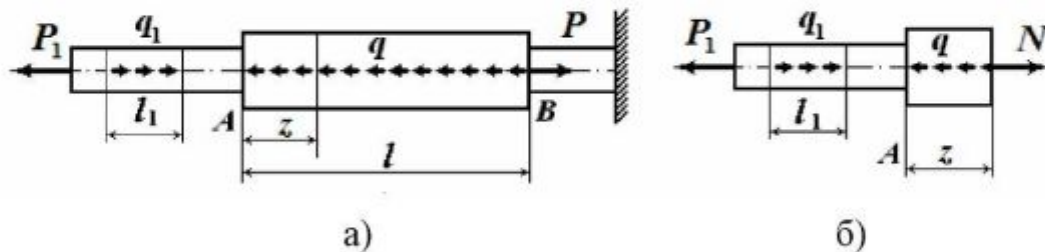


Рис. 3.2

В произвольном сечении бруса на участке AB нормальная сила N определяется из условия равновесия отсеченной части (рис. 3.2,б). В данном случае отброшена правая часть стержня, так как в заделке предварительно реакция не определена. Нормальная сила направлена от сечения, т.е. ввели

нормальную силу в положительном направлении. Уравнение равновесия имеет вид:

$$\Sigma F_z = 0, \quad -P_1 + q_1 l_1 - qz + N = 0 \rightarrow N = P_1 - q_1 l_1 + qz. \quad (3.1)$$

Выражение для N можно записать сразу, если придерживаться следующего правила: нормальная сила в сечении равна алгебраической сумме всех сил, действующих на оставшуюся часть стержня:

$$N = \sum_{i=1}^n P_i, \quad (3.2)$$

где P_i – сосредоточенные силы и равнодействующие распределенных нагрузок.

При этом внешняя сила условно считается положительной, если растягивает рассматриваемый участок, и отрицательной, если сжимает. Например, в выражении (3.1) сила P_1 и равнодействующая сила qz растягивают участок длиной z , а равнодействующая сила $q_1 l_1$ сжимает (см. рис. 3.2,б).

При $z = 0$ нормальная сила в сечении A равна: $N_A = P_1 - q_1 l_1$.

При $z = l$ нормальная сила в сечении B равна: $N_B = P_1 - q_1 l_1 + ql$.

Значения N_A и N_B можно получить непосредственно в сечениях, расположенных справа и слева от границ участка AB (см. рис. 3.2,а). Если принять $P_1 = 2P$, $q_1 = 2P/l$, $l_1 = 0,5l$, $q = P/l$, то $N_A = P$, $N_B = 2P$.

В соответствии с выражением (3.1) нормальная сила на участке AB меняется по линейному закону. На рис. 3.3,а показана *эюра* (график) нормальных сил на выделенном участке бруса.

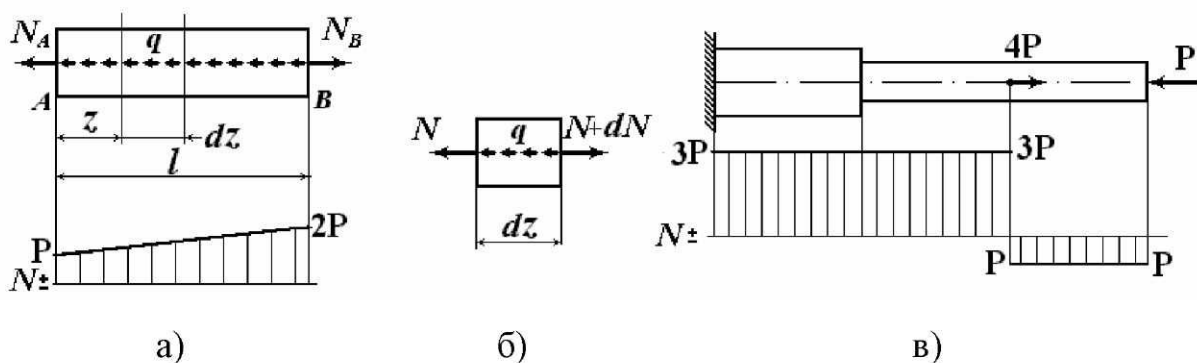


Рис. 3.3

Рассмотрим равновесие элемента бруса длиной dz (рис. 3.3,б):

$$-N - qdz + (N + dN) = 0.$$

После преобразований получим *дифференциальную зависимость* при растяжении

$$\frac{dN}{dz} = q. \quad (3.3)$$

Из этого выражения следует, что величина $q = \text{const}$ определяет угол наклона прямой на эпюре N (см. рис. 3.3,а). Если распределенная нагрузка на участке отсутствует ($q = 0$), то нормальные силы на этом участке не меняются, т.е. $N = \text{const}$ (рис. 3.3,в). Отметим, что величина скачка на эпюре N равна значению сосредоточенной силы $4P$, приложенной в сечении.

В общем случае для эпюры нормальных сил соблюдается *правило скачков*: в том сечении, где приложена внешняя сосредоточенная сила, на эпюре N имеет место скачок на величину этой силы.

Изменение сечения бруса не влияет на величину нормальной силы N в этом сечении.

3.2. Основные зависимости при растяжении

При решении любой задачи для деформируемого тела (бруса) используются три типа зависимостей: кинематические, физические и статические.

Кинематические зависимости связывают деформации и перемещения для деформированного элемента бруса. В сопротивлении материалов эти зависимости, как правило, получаются с использованием гипотезы плоских сечений (гипотезы Бернулли).

Физические зависимости устанавливают соотношения между напряжениями и деформациями, т.е. представляют закон Гука.

Статические зависимости связывают напряжения и внутренние силовые факторы в сечении бруса (являются уравнениями равновесия).

Рассмотрим получение этих зависимостей при растяжении-сжатии бруса.

Кинематические зависимости получим при рассмотрении деформирования выделенного элемента бруса длиной dz (рис. 3.4,а).

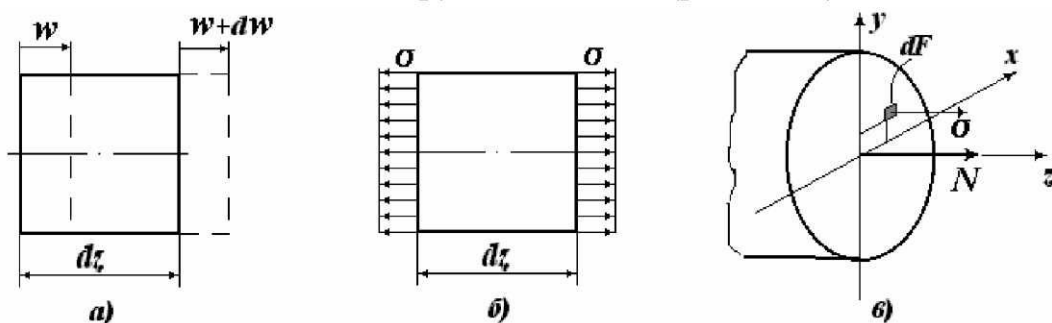


Рис. 3.4

В соответствии с гипотезой Бернулли левое сечение, оставаясь плоским, переместится на величину w , а правое сечение – на величину $w + dw$. Тогда получим изменение длины элемента:

$$\Delta(dz) = (w + dw) - w = dw.$$

Линейная деформация в пределах элемента равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz},$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{dw}{dz}. \quad (3.4)$$

Считаем, что напряженно-деформированное состояние элемента однородно (рис. 3.4,б), поэтому закон Гука запишем в виде:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3.5)$$

Равнодействующая всех элементарных сил σdF в сечении равна нормальной силе N (рис. 3.4,в). В итоге для всего сечения получим:

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (3.6)$$

Как правило, придерживаются следующей схемы преобразования полученных зависимостей. С использованием кинематической зависимости (3.4) закон Гука записывается в виде:

$$\sigma = E \frac{dw}{dz}. \quad (3.7)$$

Это выражение используется в статической зависимости (3.6):

$$N = \int_F E \frac{dw}{dz} dF.$$

С учетом того, что для сечения $E = const$ и $\varepsilon = const$, а $\int_F dF = F$, после преобразований получим:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{N}{EF}. \quad (3.8)$$

Дифференциальная зависимость (3.8) используется для определения перемещений сечений бруса.

Подставляя (3.8) в выражение (3.7), получаем формулу для определения нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса:

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (3.9)$$

Эта формула может быть получена и непосредственно из зависимости (3.6) с учетом равномерного распределения нормальных напряжений по сечению вследствие гипотезы плоских сечений ($\sigma = \text{const}$, см. рис. 3.4,б).

Отметим, что формула (2.6) является частным случаем формулы (3.9) при $N = P$ и использовалась только для определения напряжений при растяжении образца.

3.3. Перемещения сечений стержня

Продольные перемещения сечений стержня определяются интегрированием дифференциального уравнения (3.8):

$$w = w_0 + \int_z \frac{N dz}{EF}, \quad (3.10)$$

где w_0 – постоянная интегрирования (перемещение сечения при $z = 0$).

Если учесть, что $\varepsilon = \sigma/E = N/EF$, то выражение (3.10) может быть записано и в таком виде:

$$w = w_0 + \int_z \varepsilon dz. \quad (3.11)$$

Это выражение может быть получено и непосредственно интегрированием уравнения (3.4).

Часто необходимо определять перемещение w_k концевое (k) сечения участка стержня, зная перемещение w_n начального (n) сечения. Например, необходимо определить перемещение w_k концевое (k) сечения участка, на котором $\varepsilon = \text{const}$ (рис. 3.5,а).

Воспользовавшись формулой (3.11) при $w_0 = w_n$, получим

$$w = w_n + \varepsilon z. \quad (3.12)$$

Таким образом, на участке постоянной деформации продольные перемещения поперечных сечений изменяются как линейная функция, график которой представляет прямую.

При $z = l$ найдем перемещение концевое сечения участка:

$$w_k = w_n + \Delta l; \quad \Delta l = \varepsilon l, \quad (3.13)$$

где Δl – изменение длины участка.

Выражение для Δl может быть получено и из формулы (2.1), так как деформированное состояние участка бруса такое же, как рабочей части образца.

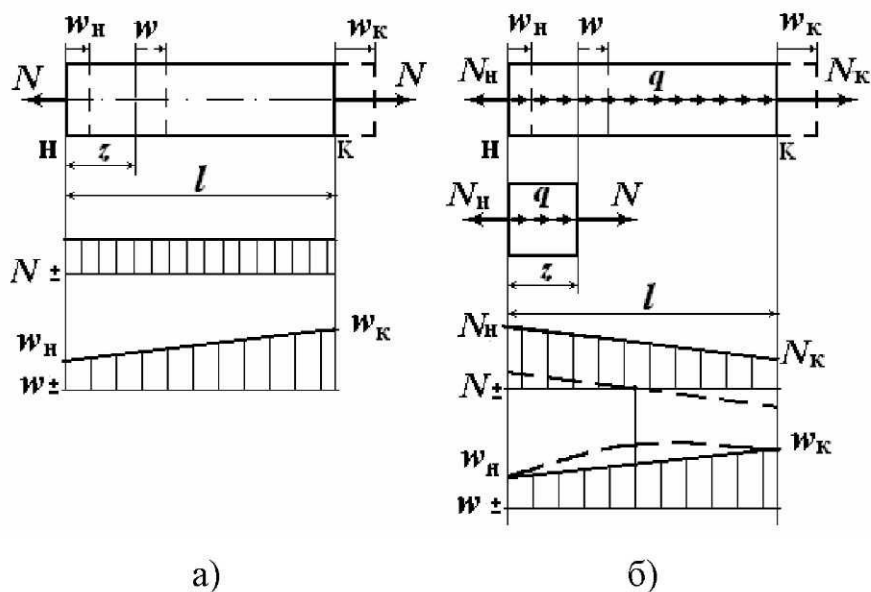


Рис. 3.5

С учетом того, что $\varepsilon = N/EF$, формула изменения длины участка стержня принимает вид:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}, \quad (3.14)$$

где EF – жёсткость стержня при растяжении-сжатии.

Жёсткость EF является физико-геометрическим параметром стержня, так как зависит от свойств материала (E) и геометрической характеристики сечения (F).

Формула (3.14) может быть получена непосредственно из закона Гука (3.5) с учетом формул (3.9) и (2.1). Поэтому выражение (3.14) рассматривают как закон Гука для участка бруса при постоянной деформации на участке.

Если на участке бруса действует распределенная нагрузка постоянной интенсивности q (рис. 3.5,б), то нормальная сила в произвольном сечении при известном значении в начальном сечении (N_H) равна:

$$N = N_H - qz. \quad (3.15)$$

При $z = l$ имеем $N_K = N_H - ql$. Подставляя выражение (3.15) в формулу (3.10), после интегрирования при $w_0 = w_H$ получаем:

$$w = w_H + \frac{N_H z}{EF} - \frac{qz^2}{2EF}. \quad (3.16)$$

Следовательно, эпюра w (см. рис. 3.5,б) ограничена параболой выпуклостью вверх ($d^2w/dz^2 < 0$). Если на участке эпюра N пересекает ось, то в

этом сечении функция w имеет экстремум ($dw/dz = 0$). Этот случай на рис. 3.5,б показан штриховыми линиями. При $z = l$ перемещение концевое сечения участка равно:

$$w_k = w_n + \frac{N \cdot l}{EF} - \frac{q l^2}{2EF}.$$

3.4. Учет факторов, влияющих на изменение длины стержня

Изменение длины стержня может вызываться различными причинами: силовым воздействием, изменением температуры, отклонением от номинальной длины стержня.

Если на стержень действует заданная механическая нагрузка, то изменение длины любого его участка с постоянной деформацией (рис. 3.6,а) определяется по формуле (3.14).

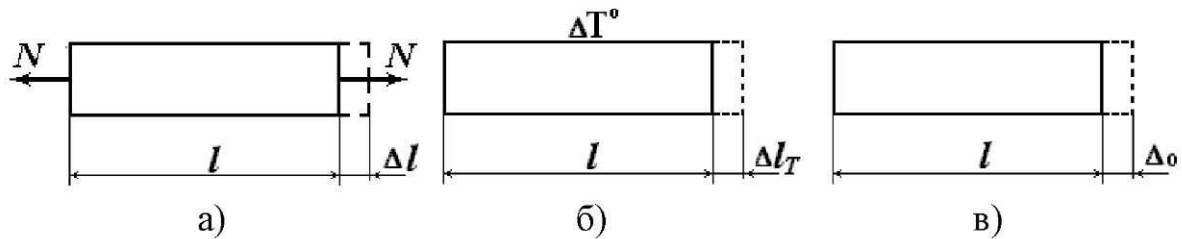


Рис. 3.6

При изменении температуры стержня на ΔT ° (равномерное температурное воздействие) в материале возникают температурные деформации

$$\epsilon_T = \alpha_T \Delta T, \quad (3.17)$$

где α_T – температурный коэффициент линейного расширения материала. Например, для стали $\alpha_T = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

Соответственно, при температурном воздействии любой участок стержня изменяет свою длину на величину (рис. 3.6,б)

$$\Delta l_T = \alpha_T \Delta T l. \quad (3.18)$$

Если силовое и температурное воздействия осуществляются одновременно, то деформация и изменение длины участка стержня определяются с использованием принципа суперпозиции:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T; \quad \Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha_T \Delta T l. \quad (3.19)$$

При этом следует учитывать, что использование принципа суперпозиции, при котором силовая и температурная деформации рассматриваются как независимые, справедливо в том случае, если модуль упругости E и

температурный коэффициент α_T материала не зависят от температуры. Практически это имеет место при умеренном температурном воздействии. Например, для малоуглеродистой стали – при $T < 300^\circ\text{C}$ (см. рис. 2.12).

Кроме того, изменение длины стержня или его участка может быть связано и с тем, что стержень изготовлен длиннее или короче своего номинального размера l_0 на величину $\Delta_0 = l - l_0$ (рис. 3.6,в). Отклонение длины стержня от номинального размера положительно ($\Delta_0 > 0$), если стержень длиннее, и отрицательно ($\Delta_0 < 0$), если стержень короче.

С учетом всех перечисленных факторов изменение длины участка стержня определяется выражением

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha_T \Delta T l + \Delta_0. \quad (3.20)$$

Полное изменение длины стержня равно сумме изменений длин его участков:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^m \Delta l_i, \quad (3.21)$$

где m – число участков стержня, а Δl_i для каждого участка определяется по формуле (3.20).

3.5. Расчет стержня на прочность

Прочностной анализ стержня заключается в определении напряжений для стержня в целом, выявлении максимальных напряжений и сопоставлении их с допускаемыми или предельными напряжениями.

Сечение стержня, в котором возникают максимальные напряжения σ_{max} , называется *опасным*. Если максимальные напряжения действуют на всем участке стержня, то такой участок также называется опасным.

При расчете на прочность стержня из пластичного материала используется *условие прочности* (2.20):

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]; \quad (3.22)$$

$$\sigma_{max} = \left(\frac{N}{F} \right)_{max}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]} \quad \text{или} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{0,2}}{[n_T]}.$$

Максимальные напряжения σ_{max} в опасном сечении могут быть как растягивающими, так и сжимающими. В *условие прочности* максимальные напряжения следует подставлять по абсолютной величине. Допускаемые напряжения $[\sigma]$ могут быть заданы или вычисляются по второй формуле (3.22) при известном пределе текучести (σ_T или $\sigma_{0,2}$) и нормативном коэф-

коэффициенте запаса $[n_T]$.

При расчете на прочность стержня из хрупкого материала используется система условий прочности (2.22):

$$\begin{cases} \sigma_{max}^p \leq [\sigma]_p, \\ \sigma_{max}^c \leq [\sigma]_c, \end{cases} \quad [\sigma]_p = \frac{\sigma_{вр}}{[n_B]}, \quad [\sigma]_c = \frac{\sigma_{вс}}{[n_B]}. \quad (3.23)$$

Расчет ведется как для опасного сечения, в котором возникают максимальные растягивающие напряжения σ_{max}^p , так и для опасного сечения с максимальными сжимающими напряжениями σ_{max}^c .

Условия прочности (3.22), (3.23) подробно рассмотрены в разделе 2.5.

При известных допускаемых напряжениях для материала стержня могут проводиться три варианта расчета:

1. Проверочный расчет, если заданы нагрузки и размеры сечений стержня.

2. Проектировочный расчет, в результате которого определяются размеры сечений стержня при заданной нагрузке.

3. Определение допускаемой нагрузки, если заданы размеры сечений.

Эти варианты расчета на конкретном примере рассмотрены в следующем разделе.

3.6. Расчёт статически определимого стержня

Рассмотрим общую процедуру расчета статически определимого стержня на примере консольного стержня, нагруженного осевыми силами (рис. 3.7).

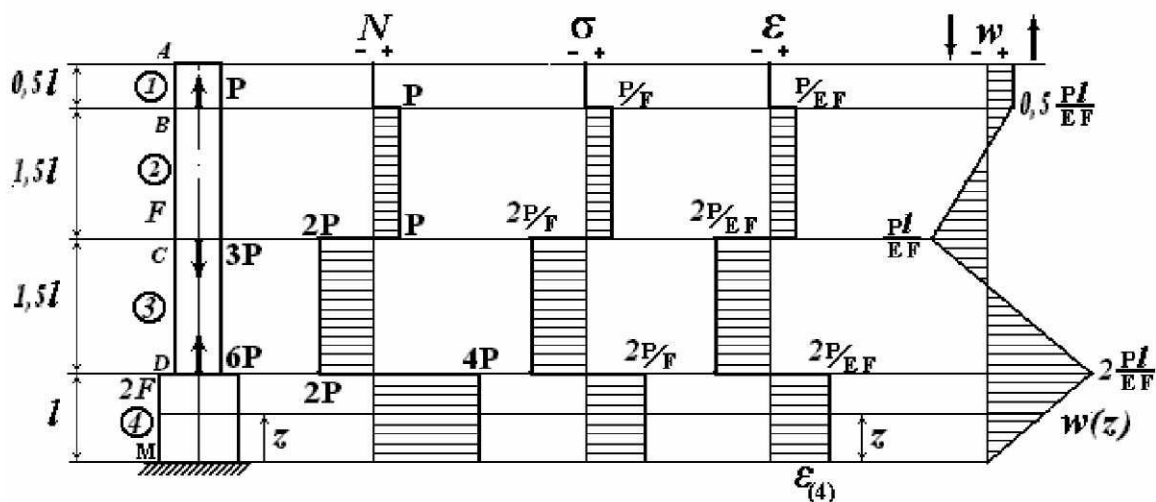


Рис. 3.7

Для статически определимого стержня реакция в заделке (или нормальная сила в любом сечении) может быть определена с использованием уравнений статики.

Если реакция в заделке предварительно не определена, то построение эпюры N рациональнее начинать со свободного конца стержня. При этом, используя метод сечений, необходимо отбрасывать часть стержня с заделкой. Последовательно применяя метод сечений на каждом участке ($i = 1, 2, 3, 4$), определяются нормальные силы на участках. По полученным значениям строится эпюра N . Скачки на эпюре N по величине равны силам, приложенным в соответствующих сечениях (*правило скачков*). Участок AB не деформируется, участки BC и DM растягиваются, а участок CD сжимается.

Для построения эпюры σ определяются нормальные напряжения на каждом участке по формуле (3.9)

$$\sigma_{(i)} = \frac{N_i}{F_i} ; \quad i = 1, 2, 3, 4$$

с учётом того, что $F_1 = F_2 = F_3 = F$ и $F_4 = 2F$.

Если стержень изготовлен из пластичного материала, то участки 3 и 4 равноопасны. Если стержень изготовлен из хрупкого материала, то более опасным может оказаться участок 4 (как правило, хрупкий материал хуже работает на растяжение).

Линейные деформации на участках определяем из закона Гука (3.5):

$$\varepsilon_{(i)} = \frac{\sigma_{(i)}}{E_{(i)}} ; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Если стержень выполнен из одного материала ($E_{(i)} = E$), то эпюра ε имеет такой же вид, как и эпюра σ .

Эпюра осевых перемещений w строится, начиная с сечения, где известно перемещение. Для рассматриваемого стержня – от сечения M , так как $w_M = 0$.

В соответствии с формулами (3.13), (3.14) и учитывая, что $w_H = w_M = 0$, а $w_K = w_D$, получим перемещение сечения D :

$$w_D = \Delta l_4 = \frac{4Pl}{E \cdot 2F} = \frac{2Pl}{EF} .$$

Если на i -ом участке стержня определена деформация $\varepsilon_{(i)} = const$, то проще вычислять Δl_i по второй формуле (3.13):

$$\Delta l_i = \varepsilon_{(i)} l_i.$$

Аналогично определяем перемещения других сечений по участкам:

$$w_C = w_D + \Delta l_3 = 2 \frac{P l}{EF} + \left(-2 \frac{P}{EF}\right) 1,5l = -\frac{P l}{EF};$$

$$w_B = w_C + \Delta l_2 = -\frac{P l}{EF} + \left(\frac{P}{EF}\right) 1,5l = 0,5 \frac{P l}{EF}; \quad w_A = w_B.$$

Участок AB перемещается как жесткое тело, не деформируясь. Поэтому перемещения всех сечений на этом участке одинаковы. Сечение A перемещается вверх. Направление перемещения просто определить по участку 4 . Так как этот участок растягивается ($N_4 > 0$), то при $w_D > 0$ сечение D перемещается вверх. Отсюда следует, что сечения, у которых $w > 0$, перемещаются вверх, и наоборот.

Полное изменение длины стержня (удлинение или укорочение), а значит и перемещение его концевого сечения относительно начального сечения, можно определить по формуле (3.21):

$$\Delta l = w_A = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4.$$

Из построенной эпюры w видно, что наибольшее перемещение имеет сечение D ($w_{max} = w_D$).

Отметим, что в соответствии с формулой (3.4) значение деформации ε является производной от функции перемещений w . Двигаясь в положительном направлении оси z (вверх) от сечения M (см. рис. 3.7), значения на эпюре ε определяют возрастание или убывание функции перемещений w . Перемещения являются интегральной функцией от деформаций ε в соответствии с формулой (3.11). Например, перемещение произвольного сечения $w(z)$ на участке 4 равно площади прямоугольника длиной z на эпюре ε , т.е. $w(z) = \varepsilon_4 \cdot z$.

Рассмотрим различные варианты расчета стержня на прочность.

Вариант 1. Проверить прочность стержня при таких параметрах:

$$F = 2 \text{ см}^2, P = 10 \text{ кН}, \sigma_T = 320 \text{ МПа}, n_T = 2.$$

Выбираем максимальные напряжения σ_{max} на эпюре σ (см. рис. 3.7) и определяем допускаемые напряжения по формуле (3.21):

$$\sigma_{max} = |\sigma_{(2)}| = \sigma_{(3)} = 2 \frac{P}{F}, \quad \sigma_{max} = 2 \frac{10 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 10^8 \text{ Па} = 100 \text{ МПа};$$

$$[\sigma] = \frac{320}{2} = 160 \text{ МПа}.$$

Сравнивая значения максимальных и допускаемых напряжений, делаем заключение, что *условие прочности* (3.21) для стержня *удовлетворяется*.

Вариант 2. Определить значение параметра F при следующих исходных данных: $P = 20$ кН; $[\sigma] = 160$ МПа.

Учитывая что $\sigma_{max} = 2P/F$, условие прочности (3.21) примет вид:

$$2 \frac{P}{F} \leq [\sigma].$$

Решая это неравенство относительно параметра F , находим:

$$F \geq \frac{2P}{[\sigma]}; \quad F_{min} = 2 \frac{20 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,5 \text{ см}^2.$$

Вариант 3. Определить максимально допустимое значение параметра нагрузки P для стержня из хрупкого материала, используя такие данные:

$$F = 2 \text{ см}^2; \quad \sigma_{вр} = 240 \text{ МПа}; \quad \sigma_{вс} = 960 \text{ МПа}; \quad n_s = 4.$$

Материал стержня хуже работает при растяжении, поэтому наиболее опасным является участок 3 (см. эпюру σ на рис. 3.7). Подставляя соотношение $\sigma_{max}^p = 2P/F$ в первое неравенство (3.22), получим

$$2 \frac{P}{F} \leq [\sigma]_p; \quad [\sigma]_p = 240/4 = 60 \text{ МПа}.$$

Решая это неравенство относительно параметра P , находим:

$$P \leq [\sigma]_p F / 2; \quad P_{don} = 60 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4} / 2 = 6 \text{ кН}.$$

Определяем изменение длины стержня при значениях параметров:

$$F = 2 \text{ см}^2; \quad P = 20 \text{ кН}; \quad l = 1 \text{ м}; \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Как следует из эпюры w (см. рис. 3.7,б), стержень удлиняется, так как $w_A > 0$ (сечение A перемещается вверх):

$$w_A = 0,5 \frac{20 \cdot 10^4 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,5 \text{ мм}.$$

При расчете стержня не учитывался его собственный вес. Считается, что им можно пренебречь по сравнению с действующими силами. Но в ряде практических случаев необходимо учитывать напряжения от собственного веса.

Рассмотрим стержень постоянного сечения (рис. 3.8,а), нагруженный собственным весом. Следует отметить, что расчетная схема стержня с сосредоточенной силой, равной силе веса стержня и приложенной в его цен-

тре тяжести (рис. 3.8,б), является весьма приближённой, так как нагруженной является половина стержня (см эпюру N на рис. 3.8,б). Тогда как очевидно, что в произвольном сечении 1-1 нормальная сила равна силе веса отсеченной части.

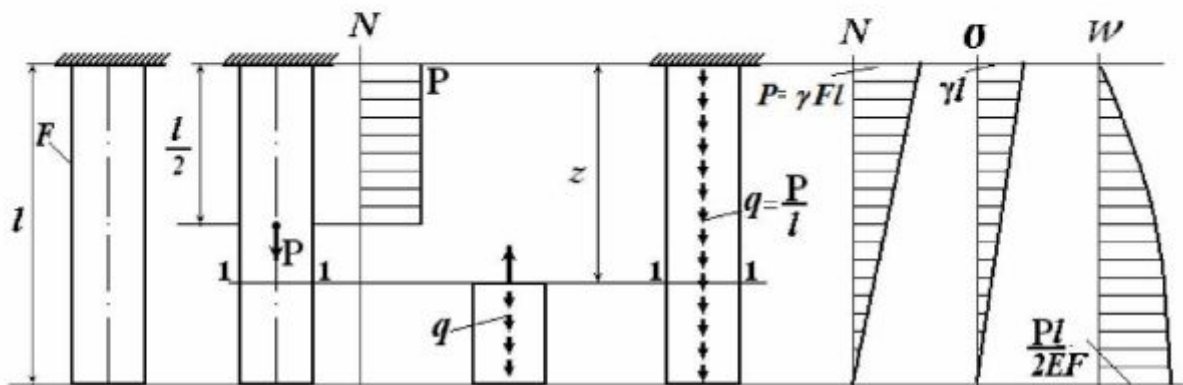


Рис. 3.8

Для расчётной схемы стержня объёмную нагрузку, определяемую собственным весом стержня P , заменим погонной нагрузкой интенсивности $q = P/l$ (рис. 3.8,в). С учетом соотношения $P = \gamma Fl$, где γ – удельный вес материала стержня, получим $q = \gamma F$. Тогда N и σ в произвольном сечении стержня (см. рис. 3.8,в) определяются выражениями:

$$N = q(l - z) = \gamma F(l - z); \quad \sigma = N/F = \gamma(l - z).$$

Соответствующие эпюры N и σ представлены на этом же рисунке.

Найдем предельную длину стержня l_{np} , при которой максимальные напряжения в стержне у заделки достигнут предела прочности, и стержень разрушится:

$$\sigma_{max} = \sigma_{вр}; \quad \gamma l_{np} = \sigma_{вр}; \quad l_{np} = \sigma_{вр}/\gamma.$$

Как видим, предельная длина стержня постоянного сечения не зависит от площади его поперечного сечения. Например, для стального стержня с характеристиками $\gamma = 7,8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ и $\sigma_{вр} = 780 \text{ МПа}$ получим $l_{np} = 10^4 \text{ м}$.

Более эффективно применять материал, у которого высокие прочностные характеристики ($\sigma_{вр}$) и/или наименьший удельный вес (γ), т.е. материал, имеющий большее значение $l_{np} = \sigma_{вр}/\gamma$. В наибольшей степени таким условиям удовлетворяют волокнистые композитные материалы (углепластик, органопластик и др.).

Осевые перемещения сечений стержня определяем по формуле (3.18) при $w_H = 0$ (в заделке):

$$w(z) = -\frac{q z^2}{2EF} + \frac{N z}{EF} = -\frac{q z^2}{2EF} + \frac{ql z}{EF}$$

Функция $w(z)$ является квадратичной параболой. Перемещение концевого сечения стержня (при $z = l$ и $ql = P$) равно:

$$w_{max} = \frac{Pl}{2EF}$$

Этот же результат получается и с использованием приближённой расчетной схемы, показанной на рис. 3.8,б. Однако следует отметить, что при использовании этой схемы правильно определяются лишь максимальные напряжения в стержне у заделки, однако распределение N , σ и w по длине стержня описываются неверно.

3.7. Расчёт статически неопределимого стержня

Задача расчета стержня с двумя заделками (рис. 3.9) является статически неопределимой, так как две реакции не могут быть определены из одного уравнения статики:

$$\Sigma F_z = 0; \quad R_A + P - 5P + R_D = 0. \quad (3.24)$$

Часто такой стержень называют статически неопределимым.

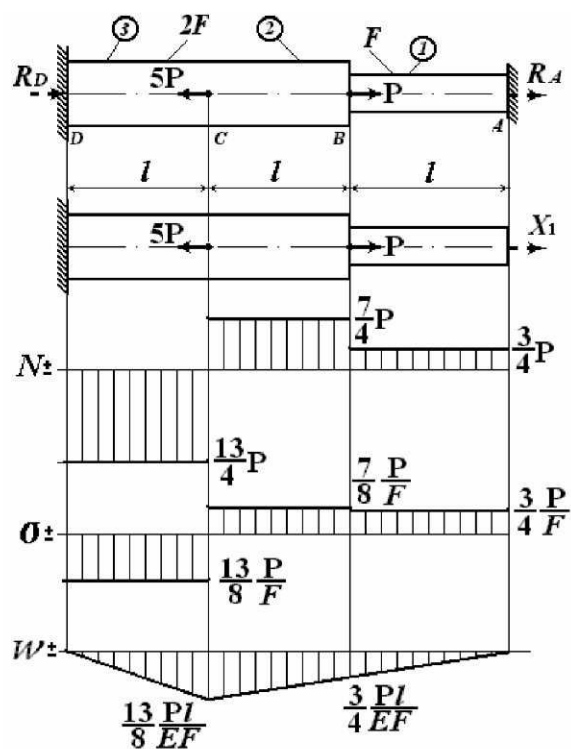


Рис. 3.9

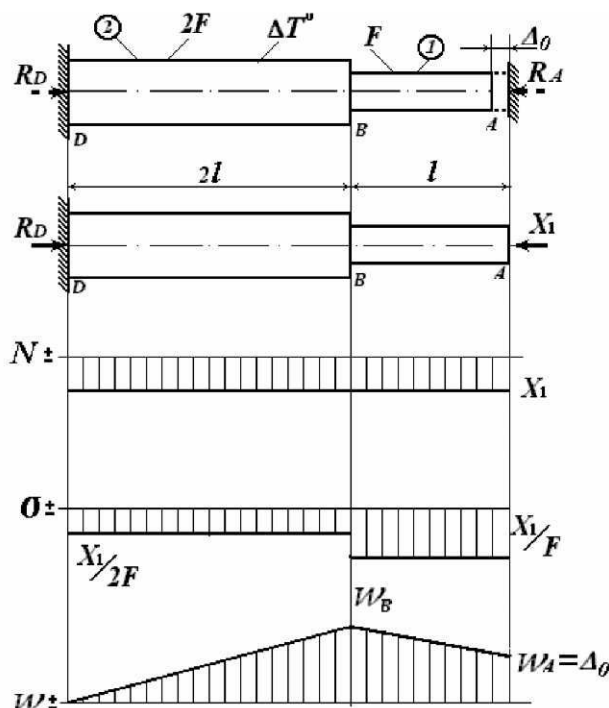


Рис. 3.10

Дополнительное уравнение должно быть получено из рассмотрения деформирования стержня. Для этого условно сделаем стержень статически

определимым, удалив одну из заделок, например, правую. Вместо удаленной заделки приложим неизвестную реакцию $X_I = R_A$. Получим стержень, статически эквивалентный заданному стержню.

При этом нужно учитывать, что из-за наличия двух заделок изменение полной длины стержня равно нулю (деформационное условие). В соответствии с формулой (3.21) запишем это условие:

$$\Delta L = 0 \quad \text{или} \quad \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0. \quad (3.25)$$

Для определения Δl_i получаем нормальные силы N_i в сечениях каждого участка:

$$N_1 = X_I; \quad N_2 = X_I + P; \quad N_3 = X_I + P - 5P = X_I - 4P. \quad (3.26)$$

Используя формулу (3.14), значения N_i и физико-геометрические параметры стержня на участках ($E_i F_i, l_i$), уравнение (3.25) запишем в виде:

$$\frac{X_I l}{EF} + \frac{(X_I + P)l}{E2F} + \frac{(X_I - 4P)l}{E2F} = 0. \quad (3.27)$$

Это уравнение является дополнительным к уравнению статики (3.24).

Уравнение (3.27) может быть преобразовано к такому виду:

$$\frac{2l}{EF} X_I - \frac{3}{2} \frac{Pl}{EF} = 0. \quad (3.28)$$

Первое слагаемое в этом уравнении определяет для эквивалентного стержня перемещение концевого сечения A от неизвестной реакции X_I , а второе слагаемое – перемещение от заданных сил. При этом коэффициент при X_I численно равен перемещению сечения A от силы $X_I = 1$.

Решая уравнение (3.28), находим $X_I = R_A = 3/4P$, а затем из выражений (3.26) – усилия на участках. После чего строим эпюры N , σ и w , которые представлены на рис. 3.9. Эпюра w построена, начиная с сечения D . Правильность решения контролируется равенством нулю перемещения сечения A .

Для статически неопределимого стержня практическое значение имеет вычисление *температурных и монтажных напряжений*.

При изменении температуры статически определимого стержня в нем не возникают усилия и напряжения. Стержень просто удлиняется или укорачивается.

Если же нагревать или охлаждать статически неопределимый стержень, то в нем возникают температурные усилия и напряжения. Это объясняется тем, что жесткие заделки не позволяют изменяться длине

стержня. В результате, при нагреве возникают сжимающие усилия и напряжения, а при охлаждении стержня – растягивающие усилия и напряжения.

Если длина стержня имеет отклонение от номинального размера (например, стержень выполнен длиннее на величину $\Delta_0 = l - l_0$), то после принудительной установки такого стержня между жесткими опорами в нем возникают так называемые *монтажные усилия и напряжения*.

Учет вышеуказанных факторов покажем для стержня, рассмотренного в предыдущем примере. Предположим, что стержень нагрет на ΔT °C и выполнен короче своей номинальной длины на Δ_0 (рис. 3.10). При нагреве стержень получил бы удлинение $\Delta_T = \alpha_T \Delta T 3l$ при отсутствии правой заделки. Если $\Delta_0 \geq \Delta_T$, то усилия и напряжения в стержне не возникают. Если же $\Delta_0 < \Delta_T$, то в заделках возникают реакции R_A и R_D , которые не могут быть определены из одного уравнения статики:

$$R_D - R_A = 0, \text{ откуда } R_D = R_A.$$

Отметим, что возникающие реакции являются самоуравновешенными.

Удалим правую заделку и вместо неё в сечении A приложим неизвестную реакцию $X_1 = R_A$. Учитывая, что изменение длины стержня (или перемещение сечения A) равно Δ_0 , запишем:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta_0. \quad (3.29)$$

Нормальные силы на участках стержня равны:

$$N_1 = N_2 = -X_1.$$

Используя первую формулу (3.19) для определения Δl_i и значения N_i , уравнение (3.29) запишем в виде:

$$\left(\frac{-X_1 l}{EF} + \alpha_T \Delta T l\right) + \left(\frac{-X_1 2l}{EF} + \alpha_T \Delta T \cdot 2l\right) = \Delta_0.$$

Решая это уравнение, при $\Delta_0 \leq \Delta_T$ получим:

$$X_1 = \frac{EF}{2l} (\Delta_T - \Delta_0), \quad (3.30)$$

где $\Delta_T = 3\alpha_T \Delta T l$ – температурное удлинение стержня.

Если $\Delta_T = \Delta_0$, то $X_1 = 0$. На рис. 3.10 показаны эпюры N , σ и w . Эпюра w построена от сечения D ($w_D = 0$). При этом перемещения равны:

$$w_B = \Delta l_2 = \frac{-X_1 2l}{E \cdot 2F} + \alpha_T \Delta T \cdot 2l; \quad w_A = w_B + \Delta l_1 = w_B + \frac{-X_1 l}{EF} + \alpha_T \Delta T l.$$

С учетом формулы(3.30) получим:

$$w_B = (\Delta_0 + \alpha_T \Delta T l)/2; \quad w_A = \Delta_0.$$

Последнее равенство является проверкой расчёта. Из этого условия исходили, решая задачу.

При одновременном воздействии на стержень механической нагрузки, температуры и наличии монтажных отклонений в соответствии с *принципом суперпозиции* усилия, напряжения и перемещения, полученные при соответствующем расчете стержня от каждого внешнего воздействия (см. рис. 3.9 и рис. 3.10), суммируются.

4. Кручение

Кручение является распространённым видом деформации для элементов машиностроительных конструкций (валов, витков пружин и т.д.). При кручении бруса (вала) материал находится в условиях чистого сдвига, что приводит к определённым особенностям как в распределении напряжений, так и в характере разрушения материала.

4.1. Чистый сдвиг

Опытно можно установить, что при кручении тонкостенной трубы для элементов стенки, выделенных продольными и поперечными сечениями, происходит только искажение формы, а размеры сторон остаются неизменными (элемент ABCD на рис. 4.1,а). Это объясняется действием на гранях элемента только касательных напряжений τ (рис. 4.1,б).

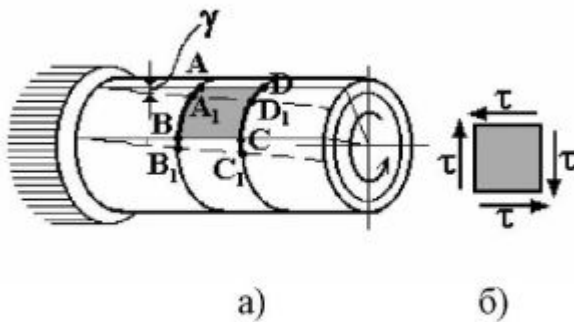


Рис. 4.1

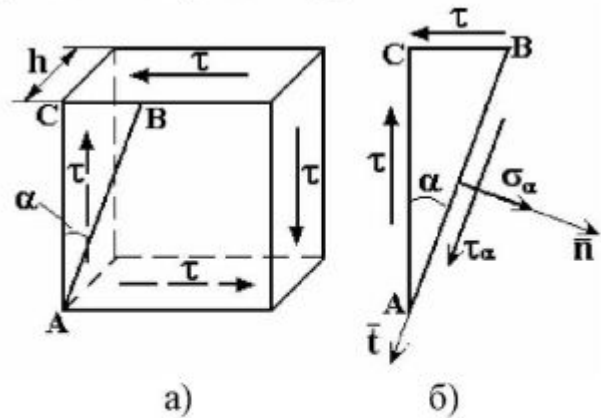


Рис. 4.2

Напряжённое состояние, при котором на гранях элемента действуют только касательные напряжения, называется чистым сдвигом.

Угловая деформация элемента γ (деформация сдвига) равна углу поворота образующих цилиндрической поверхности трубы (см. рис. 4.1,а).

Напряжения. Напряжения при чистом сдвиге изменяются в зависимости от положения рассматриваемой площадки. Из исходного элемента толщиной h , на гранях которого действуют только касательные напряжения τ (рис. 4.2,а), наклонным сечением под углом α выделим элементарную трехгранную призму ABC (на рис. 4.2,б для простоты показан только вид ее в плане). В наклонном сечении возникает полное напряжение, которое можно представить в виде составляющих – нормального σ_α и касательного τ_α напряжений. Составим уравнения равновесия выделенного элемента, проектируя действующие силы на нормальное (\bar{n}) и тангенци-

альное (\bar{t}) направления:

$$\begin{aligned} \sum F_n = 0; \quad \sigma_\alpha \cdot AB \cdot h - \tau \cdot BC \cdot h \cdot \cos\alpha - \tau \cdot AC \cdot h \cdot \sin\alpha &= 0; \\ \sum F_t = 0; \quad \tau_\alpha \cdot AB \cdot h + \tau \cdot BC \cdot h \cdot \sin\alpha - \tau \cdot AC \cdot h \cdot \cos\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Используя очевидные соотношения $BC=AB \cdot \sin\alpha$, $AC=AB \cdot \cos\alpha$, после преобразований из уравнений (4.1) получаем зависимости:

$$\sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha, \quad \tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha. \quad (4.2)$$

В исходных площадках $\alpha = 0$ и $\alpha = 90^\circ$ получается: $\sigma_\alpha = 0$, $\tau_\alpha = \pm\tau$. Нормальные напряжения максимальны при $\sin 2\alpha = \pm 1$, т.е. при $\alpha = \pm 45^\circ$. В этих сечениях $\sigma_\alpha = \pm\tau$, $\tau_\alpha = 0$, т.е. на гранях элемента, выделенного сечениями под углом 45° к исходным площадкам, действуют только нормальные напряжения, причем на одной паре граней – растягивающие, на другой – сжимающие напряжения (рис. 4.3). Это эквивалентное определение чистого сдвига.

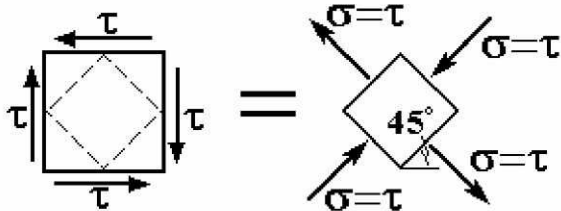
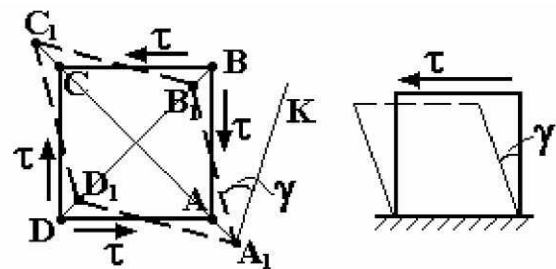


Рис. 4.3



а)

б)

Рис. 4.4

Деформация. При отсутствии нормальных напряжений на гранях элемента не происходит изменения длины ребер (рис. 4.4,а). В то же время, происходит удлинение одной диагонали (AC) и укорочение другой диагонали (BD) вследствие действия в этих направлениях максимальных растягивающих и сжимающих нормальных напряжений. В результате квадрат ABCD превращается в ромб $A_1B_1C_1D_1$, т. е. происходит искажение только формы элемента. Угол сдвига как изменение элементарного прямого угла $\gamma = \angle B_1A_1K$ (см. рис. 4.4,а) может быть получен при наложении исходной формы элемента на деформированную ($A_1K \perp A_1D_1$). Наиболее просто деформацию сдвига γ можно представить при условно неподвижной одной из граней элемента (рис. 4.4,б).

Закон Гука при сдвиге. При упругой деформации касательные напряжения τ и угловая деформация γ связаны законом Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma, \quad (4.3)$$

где G – модуль упругости второго рода или *модуль сдвига*.

Модуль сдвига является характеристикой материала. Для изотропного материала модуль сдвига связан с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона μ определенной зависимостью:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (4.4)$$

Диаграмма сдвига. В результате испытания на кручение образцов из различных материалов в условиях чистого сдвига может быть построена диаграмма сдвига $\tau = f(\gamma)$. Обычно проводят испытания на кручение образцов цилиндрической или трубчатой формы. Для пластичных материалов диаграммы сдвига показаны на рис. 4.5,а,б, где приведены и характеристики прочности материала при сдвиге – предел пропорциональности $\tau_{плц}$, предел текучести τ_T , условный предел прочности τ_B . Чаще всего диаграмма сдвига не имеет площадки текучести (рис. 4.5,б); в этом случае определяется условный предел текучести $\tau_{0,3}$ – касательное напряжение, при котором остаточная деформация сдвига равна 0,3%. Однако теория пластичности позволяет получить диаграмму сдвига и непосредственно из диаграммы растяжения. Поэтому прочностные характеристики при сдвиге для пластичных материалов можно выразить через прочностные характеристики при растяжении, например, $\tau_T \approx 0,6 \sigma_T$. Для хрупких материалов обычно имеет место условие $\sigma_{вр} < \tau_B < \sigma_{вс}$, например, для чугуна $\tau_B = (0,3 \div 0,4)\sigma_{вс}$. Диаграмма сдвига для хрупкого материала показана на рис. 4.5,в.

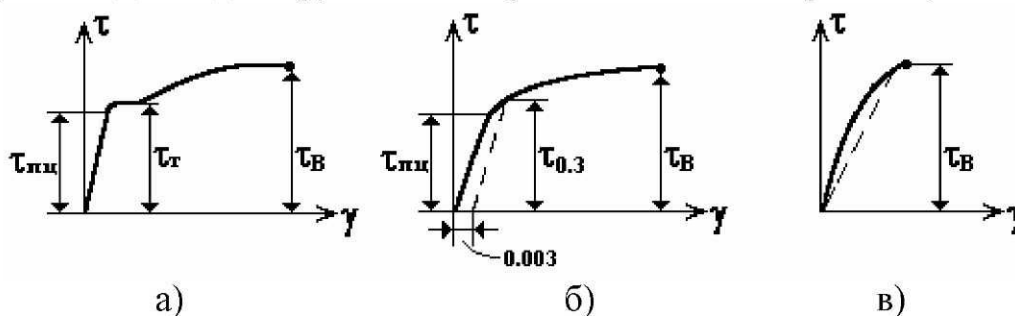


Рис. 4.5

4.2. Кручение бруса круглого сечения

Кручение бруса происходит при действии внешних моментов (пар сил) относительно оси бруса (рис. 4.6,а). На расчётных схемах крутящий момент, действующий в плоскости, перпендикулярной оси бруса, схематично изображается парой сил, как показано на рис. 4.6,б. Брус, работающий на кручение, часто называют *валом*.

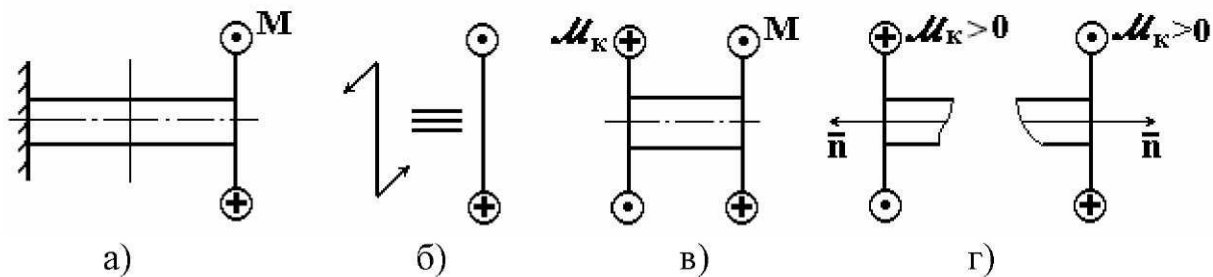


Рис. 4.6

При кручении в поперечных сечениях бруса возникает только крутящий момент M_k (рис. 4.6,в), который определяется по методу сечений. При построении эпюры M_k обычно пользуются условным *правилом знаков*: положительный момент M_k направлен против хода часовой стрелки при взгляде на сечение со стороны внешней нормали \bar{n} (рис. 4.6,г).

4.2.1. Основные зависимости

В соответствии с общей схемой решения задачи о деформируемом теле (см. раздел 3.2) рассмотрим получение *кинематических, физических и статических зависимостей*.

В теории кручения бруса круглого сечения используются геометрическая и статическая гипотезы:

1) *гипотеза плоских сечений* – поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации; при этом радиусы сечений поворачиваются на некоторый угол, оставаясь прямолинейными;

2) *статическая гипотеза* – в поперечных сечениях бруса возникают только касательные напряжения.

Для получения кинематических зависимостей рассмотрим элементарный объём длиной dz , выделенный из бруса поперечными сечениями и цилиндрической поверхностью радиуса ρ (рис. 4.7,а).

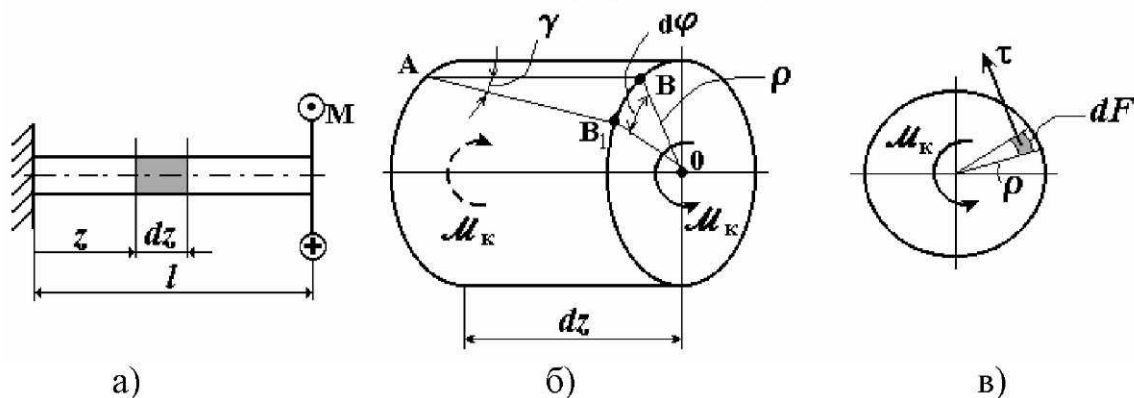


Рис. 4.7

При кручении бруса поперечные сечения поворачиваются относительно оси – получают *угловые перемещения* φ . Рассматривая геометрическую картину деформации выделенного объёма бруса, можно представить её как взаимный поворот правого сечения относительно левого на угол $d\varphi$ (рис. 4.7,б). При этом образующие поверхности поворачиваются на угол γ (деформация сдвига). Длину отрезка BB_1 можно выразить двояко: из $\triangle ABB_1$ получаем соотношение $BB_1 = AB \cdot \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma dz$; из сектора OBV_1 получим $BB_1 = OB \cdot d\varphi = \rho \cdot d\varphi$. Приравняв эти выражения $\gamma dz = \rho d\varphi$, получим такую зависимость:

$$\gamma = \rho \cdot \varphi', \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dz} . \quad (4.5)$$

Параметр φ' называется *относительным углом закручивания* и определяется как отношение взаимного угла поворота двух сечений к расстоянию между ними.

Согласно статической гипотезе материал вала при кручении находится в условиях чистого сдвига. Физическую зависимость составляет *закон Гука при сдвиге* в форме (4.3). Подставляя в закон Гука (4.3) соотношение (4.5), получим зависимость:

$$\tau = G\gamma = G\rho\varphi' . \quad (4.6)$$

Крутящий момент \mathcal{M}_k в поперечном сечении бруса является статическим эквивалентом действующих в этом сечении касательных напряжений (рис. 4.7,в). На каждой элементарной площадке dF касательное напряжение τ перпендикулярно текущему радиусу ρ . Поэтому возникающий элементарный момент равен $d\mathcal{M}_k = \tau \cdot dF \cdot \rho$, а для всего сечения имеем:

$$\mathcal{M}_k = \int_F \tau \rho dF . \quad (4.7)$$

Подставляя зависимость (4.6) в выражение (4.7), получим:

$$\mathcal{M}_k = \int_F G\rho^2 \varphi' dF = G\varphi' \int_F \rho^2 dF = \varphi' GJ_p ; \quad J_p = \int_F \rho^2 dF ,$$

где J_p – полярный момент инерции сечения; GJ_p – жёсткость сечения бруса на кручение.

Отсюда получается расчётная формула для относительного угла закручивания в сечении бруса:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\mathcal{M}_k}{GJ_p} . \quad (4.8)$$

Напряжения. Подставляя зависимость (4.8) в выражение (4.6), получим расчетную формулу для определения касательных напряжений в произвольной точке сечения:

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} \rho . \quad (4.9)$$

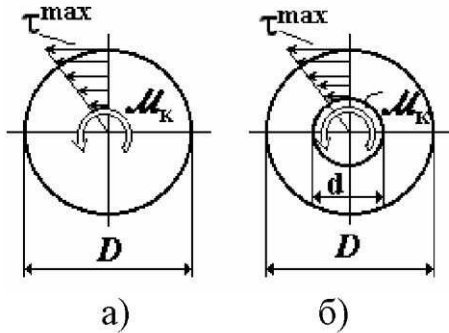


Рис. 4.8

На рис. 4.8 показаны *эпюры касательных напряжений $\tau(\rho)$* для сплошного (а) и кольцевого (б) сечений. Согласно формуле (4.9) напряжения распределяются вдоль радиуса по *линейному закону* и достигают максимального значения в точках, наиболее удалённых от центра сечения (при $\rho_{max} = D/2$).

Для вычисления максимальных касательных напряжений в сечении вводится характеристика сечения – *полярный момент сопротивления*:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}} . \quad (4.10)$$

Тогда *максимальные касательные напряжения в сечении* определяются по формуле

$$\tau^{max} = \frac{M_k}{W_p} . \quad (4.11)$$

Перемещения. Угловое перемещение или угол поворота φ_z произвольного сечения вала с осевой координатой z определяется интегрированием выражения (4.8):

$$\varphi_z = \varphi_0 + \int_z \frac{M_k dz}{GJ_p} = \varphi_0 + \Delta\varphi , \quad (4.12)$$

где φ_0 – угол поворота сечения, совпадающего с началом координат ($z = 0$); $\Delta\varphi$ – угол закручивания участка бруса длиной z .

Если для участка бруса выполняются условия $M_k = const$, $GJ_p = const$, то зависимость (4.12) можно записать в таком виде:

$$\varphi_z = \varphi_0 + \frac{M_k z}{GJ_p} \quad \text{или} \quad \varphi_z = \varphi_0 + \varphi'_z z; \quad \varphi'_z = const . \quad (4.13)$$

Зависимость (4.13) используется для построения линейной эпюры углов поворота на участке вала. Для этого, зная угол поворота одного конце-

вого сечения участка, вычисляют угол поворота другого концевое сечения:

$$\varphi_k = \varphi_n + \Delta\varphi_i; \quad \Delta\varphi_i = \frac{\mathcal{M}_{ki}l_i}{GJ_{pi}}, \quad (4.14)$$

где φ_n – угол поворота начального сечения участка; φ_k – угол поворота конечного сечения участка; $\Delta\varphi_i$ – угол закручивания участка длиной l_i .

В частности, для консольного бруса (см. рис. 4.7,а) угол поворота концевое сечения определяется по формуле (4.14) при $\varphi_n=0$:

$$\varphi_{max} = \frac{\mathcal{M}_k l}{GJ_p}. \quad (4.15)$$

В общем случае, когда крутящий момент или диаметр поперечного сечения (или обе эти величины) изменяются непрерывно по длине вала, угол поворота сечения вала вычисляется по формуле:

$$\varphi_z = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i; \quad \Delta\varphi_i = \int_{l_i} \frac{\mathcal{M}_{ki}(z)dz}{GJ_{pi}(z)}, \quad (4.16)$$

где n – число участков от начала координат до рассматриваемого сечения.

Если крутящий момент \mathcal{M}_{ki} и жесткость GJ_{pi} являются постоянными в пределах каждого участка, то формула (4.16) принимает вид:

$$\varphi_z = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\mathcal{M}_{ki}l_i}{GJ_{pi}}. \quad (4.17)$$

Все приведенные формулы дают значения угла поворота φ в радианах.

Для вычисления угла закручивания вала (взаимного угла поворота концевых сечений вала) используется формула (4.16) или (4.17) при $\varphi_0 = 0$.

4.2.2. Геометрические характеристики круглого сечения

Расчётную формулу полярного момента инерции J_p удобно получить в полярной системе координат (ρ, φ) , в которой элемент площади равен $dF = \rho d\rho d\varphi$ (на рис. 4.9 для общности рассматривается кольцевое сечение).

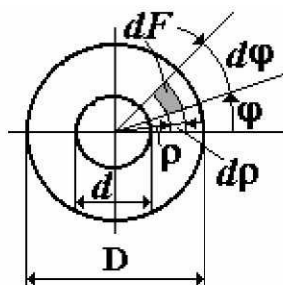


Рис. 4.9

Тогда

$$\begin{aligned} J_p &= \int_F \rho^2 dF = \int_0^{2\pi} \int_{d/2}^{D/2} \rho^3 d\rho d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{D^4}{16} - \frac{d^4}{16} \right) = \frac{\pi D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

В итоге, для кольцевого и сплошного круглого сечений получим такие расчётные формулы:

– сплошное круговое сечение ($d = 0$)

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4; \quad (4.18^1)$$

– кольцевое сечение

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^4 (1 - \alpha^4), \quad \alpha = \frac{d}{D}, \quad (4.18^2)$$

где $\alpha = d/D$ – коэффициент полости кольцевого сечения.

Для полярного момента сопротивления *кольцевого сечения* ($\alpha \neq 0$) и *сплошного круглого сечения* ($\alpha = 0$) в соответствии с формулой (4.10) при $\rho_{max} = D/2$ расчётные формулы примут вид:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3 (1 - \alpha^4) \quad \text{и} \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3. \quad (4.19)$$

4.3. Сравнительный анализ полых и сплошных валов

Из формулы (4.9), показывающей распределение касательных напряжений в сечении, ясно, что материал внутренней части вала нагружен в меньшей степени, чем периферийный. Предпочтительным с точки зрения использования материала является его равномерное нагружение напряжениями, что в наибольшей степени реализуется для вала кольцевого сечения с большим значением коэффициента α . Поэтому на практике более рациональным является применение полых валов, что обеспечивает малую их материалоемкость. Например, сравним по массе равнопрочные сплошной и полый валы, нагруженные одинаковыми моментами (рис. 4.10).

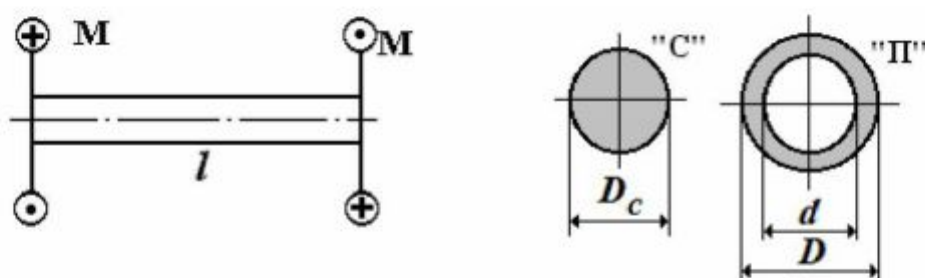


Рис. 4.10

Условие равнопрочности валов $\tau_{max}^{(c)} = \tau_{max}^{(n)}$ с учетом формулы (4.11) приводит к соотношениям $W_p^{(c)} = W_p^{(n)}$ или $D_c = D\sqrt[3]{1 - \alpha^4}$, $\alpha = d/D$. Отношение масс валов из одинакового материала равно отношению площадей поперечных сечений

$$\frac{m_c}{m_n} = \frac{F_c}{F_n} = \frac{\pi D_c^2 / 4}{\pi D^2 (1 - \alpha^2) / 4} = \sqrt[3]{\frac{(1 + \alpha^2)^2}{1 - \alpha^2}}$$

Таблица 4.1

$\alpha = d/D$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
F_c/F_n	1	1,01	1,09	1,28	1,63	2,58

С увеличением величины коэффициента полости α растёт и весовая эффективность применения полых валов (табл. 4.1).

4.4. Расчет валов на прочность и жесткость

Для обеспечения работоспособности вал должен удовлетворять условиям прочности и жесткости. При расчёте на прочность ограничивают напряжения в сечениях вала. Для обеспечения необходимой жёсткости вала ограничивают угловые перемещения отдельных сечений (например, в местах расположения сопряженных деталей – шкивов, зубчатых колёс и др.). Как правило, при расчёте на жесткость ограничения накладываются на относительные углы закручивания.

При расчете валов на кручение часто нагрузку (внешние моменты M) определяют исходя из передаваемой мощности N и скорости вращения вала n . Для этого можно воспользоваться формулой:

$$M = 9550 \frac{N}{n} \quad / \text{Н} \cdot \text{м} /, \quad (4.20)$$

где следует подставлять N в кВт, а n в об/мин.

На практике применяются валы гладкие (постоянного сечения) и ступенчатые. В случае ступенчатого вала при заданной нагрузке необходимо получить расчётные напряжения и относительные углы закручивания на каждом участке постоянного сечения, т.е. построить соответствующие эпюры для вала.

Процедура построения эпюр включает следующие этапы: а) построение эпюры крутящих моментов; б) определение максимальных касательных напряжений и относительных углов закручивания на каждом участке вала по формулам (4.11) и (4.8) и построение соответствующих эпюр; в) для вала в целом строят эпюру углов закручивания с использованием зависимости (4.13) или (4.14).

При расчёте вала на прочность необходимо определить *наибольшие значения касательных напряжений для вала* τ_{max} (индекс стоит внизу, в отличие от максимальных напряжений в сечении τ^{max} !).

Условие прочности вала из пластичного материала имеет вид:

$$\tau_{max} \leq [\tau] \quad \text{или} \quad \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau], \quad (4.21)$$

$$[\tau] = \frac{\tau_T}{[n_T]} \quad \text{или} \quad [\tau] = \frac{\tau_B}{[n_B]},$$

где $[\tau]$ – допускаемые напряжения вала при кручении; $[n_T]$, $[n_B]$ – нормативные коэффициенты запаса по текучести и по прочности; M_k – значение крутящего момента в опасном сечении (где возникают напряжения τ_{max}).

Для вала из хрупкого материала можно использовать условие прочности по максимальным нормальным растягивающим напряжениям:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]_p, \quad \sigma_{max} = \tau_{max} \quad \text{или} \quad \frac{M_k}{W_p} \leq [\sigma]_p, \quad [\sigma]_p = \frac{\sigma_{вп}}{[n_B]}, \quad (4.22)$$

где $\sigma_{вп}$ – предел прочности материала на растяжение.

Величина допускаемых напряжений при кручении зависит от различных факторов, в том числе и от материала вала. Чаще всего для пластичных материалов принимают $[\tau] = (0,5 \div 0,6)[\sigma]_p$, для хрупких материалов – $[\tau] = (0,8 \div 1,0)[\sigma]_p$. Значение $[n_B]$ для валов из хрупкого материала принимается в 1,5-2 раза больше, чем значение $[n_T]$ для валов из пластичного материала.

Следует отметить, что в большинстве практических случаев нагрузка, действующая на вал, вызывает деформации изгиба и кручения. Поэтому обычно на первом этапе, состоящем из расчёта вала только на кручение, в условии прочности используют заниженные значения допускаемых напряжений или завышенные значения коэффициентов запаса.

Для изготовления валов применяются различные материалы: углеродистые стали марок 20, 30, 40, 45, 50, легированные стали марок 20X, 40X, 30XM, 40XН и др., титановые сплавы (ВТ5, ВТ6, ВТ20), в некоторых конструкциях – алюминиевые сплавы (Д16, Д6 и др.).

При проведении проектировочного расчета вала определяют размеры поперечных сечений вала. Для этого из условия прочности вала (4.21) получаем:

$$W_p \geq \frac{M_k}{[\tau]} \quad \text{откуда} \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_k}{\pi (1 - \alpha^4) [\tau]}}. \quad (4.23)$$

При определении допускаемой нагрузки (допускаемого внешнего момента) из формулы (4.20) получим неравенство такого вида:

$$M_k \leq W_p[\tau], \quad (4.24)$$

где в крутящий момент M_k входит неизвестная величина нагрузки.

Расчет вала на жесткость обычно проводят, используя ограничение на величину наибольшего относительного угла закручивания φ'_{max} вала.

Условие жесткости вала имеет вид:

$$\varphi'_{max} \leq [\varphi'] \quad \text{или} \quad \frac{M_k}{GJ_p} \leq [\varphi'], \quad (4.25)$$

где $[\varphi']$ – допускаемый относительный угол закручивания для вала.

На практике чаще всего используют значения $[\varphi'] = (0,25-2,0)$ град/м. Следует обратить внимание, что в формулу (4.25) значение $[\varphi']$ подставляется в рад/м.

Расчет вала на жесткость может быть не только проверочным, но и проектировочным, т.е. служить для определения размеров сечения или допускаемой нагрузки. Так, при расчёте вала на жесткость можно определить необходимое значение диаметра из соотношения (4.25) с учётом зависимости (4.18):

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_k}{\pi(1 - \alpha^4)G[\varphi']}}. \quad (4.26)$$

При совместном расчёте вала на прочность и жесткость для определения величины диаметра вала из расчётных значений, полученных по формулам (4.23) и (4.26), выбирается наибольшее, чтобы выполнялись оба условия, т.е. какое-либо из этих условий окажется определяющим.

4.5. Характер разрушения валов

При анализе поведения вала при кручении вплоть до разрушения следует принимать во внимание особенности напряжённого состояния вала и свойства материала.

Материал вала, работающего на кручение, находится в условиях чистого сдвига. В различных сечениях вала возникают касательные и нормальные напряжения. При этом в поперечных и продольных сечениях возникают только касательные напряжения, а в сечениях под углом 45° к оси – только нормальные напряжения, растягивающие и сжимающие (рис. 4.11). Следует учитывать, что максимальные напряжения возникают в наружных

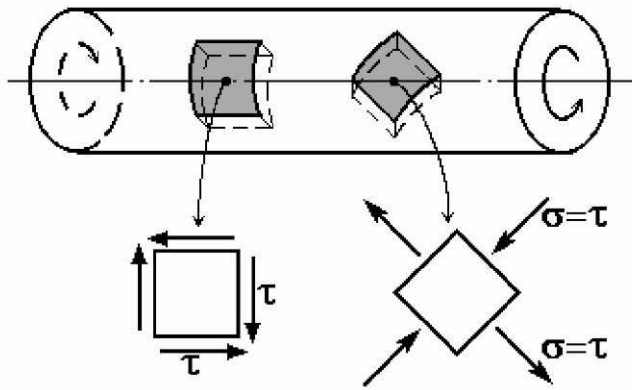


Рис. 4.11

слоях вала, причём максимальные касательные и нормальные напряжения одинаковы по величине:

$$\tau_{max} = \sigma_{max}$$

Поэтому характер разрушения валов будет зависеть от материала, т.е. от способности данного материала сопротивляться действию касательных и нормальных напряжений.

Для большинства пластичных материалов $\sigma_{тр} \approx \sigma_{тс}$, $\tau_{т} \approx 0,6\sigma_{т}$, поэтому наиболее опасными для вала являются касательные напряжения. Диаграммы сдвига для пластичного материала приведены на рис. 4.5,а,б. Для анализа упругопластического деформирования вала можно воспользоваться упрощённой диаграммой сдвига (рис. 4.12,а), состоящей только из линейного участка и площадки текучести (диаграмма Прандтля).

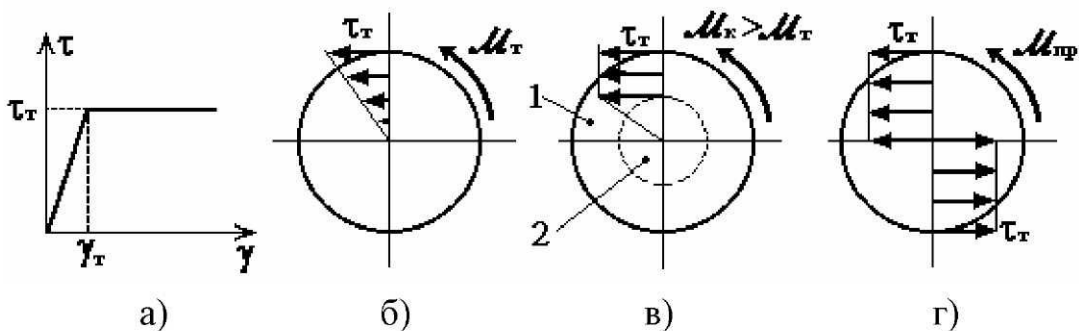


Рис. 4.12

До тех пор пока напряжения в материале не превышают предела текучести $\tau_{т}$, вал деформируется упруго. Величина крутящего момента, при котором появляются первые пластические деформации на поверхности вала (при условии $\tau_{max} = \tau_{т}$), определяется из формулы (4.11): $M_{т} = \tau_{т}W_p$ (рис. 4.12,б). При дальнейшем увеличении нагрузки область пластической деформации материала постепенно будет распространяться внутрь сечения. Согласно принятой диаграмме сдвига в сечении образуется кольцевая пластическая зона (1), где $\tau = \tau_{т}$, и упругое ядро (2), где $\tau < \tau_{т}$ (рис. 4.12,в). Когда область пластической деформации достигнет центра сечения, наступит предельное состояние вала (рис. 4.12,г).

Предельное значение крутящего момента определяют из выражения (4.6), принимая, что во всех точках сечения $\tau = \tau_T$:

$$M_{np} = \int_F \tau_T \rho dF = 2\pi \int_0^{D/2} \tau_T \rho^2 d\rho = \tau_T \frac{\pi D^3}{12} \quad \text{или} \quad M_{np} = \tau_T \cdot W_n, \quad (4.27)$$

где $W_n = \pi D^3/12$ – пластический момент сопротивления сечения при кручении.

Сравнивая выражения для моментов M_T и M_{np} , видим, что их отношение составляет $M_{np}/M_T = 4/3$. Отсюда можно сделать вывод: от начала возникновения пластических деформаций до потери несущей способности вала крутящий момент увеличивается ~ на 33%. Это «запас» несущей способности вала при расчёте по предельному состоянию по сравнению с расчётом по допускаемым напряжениям (при $[n_T] = 1$) за счёт неравномерного распределения касательных напряжений в сечении.

Более полное представление об упругопластическом деформировании вала даёт использование схематизации диаграммы сдвига в виде двух прямых линий (рис. 4.13,а) – участка упругой деформации (до τ_T) и участка линейного упрочнения (до τ_B). Характерные распределения напряжений в сечении на различных стадиях деформирования вала показаны на рис. 4.13,б,в. Предельное значение крутящего момента будет больше, чем при использовании диаграммы Прандтля (в зависимости от отношения τ_B/τ_T).

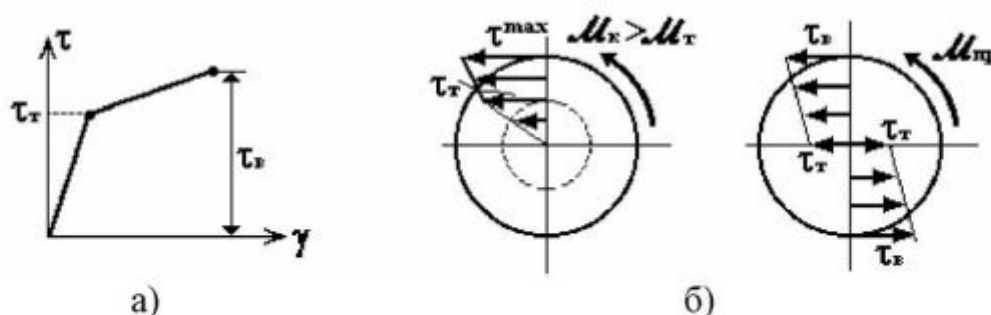


Рис. 4.13

Таким образом, разрушение валов из *пластичного материала* происходит по поперечному сечению *от действия касательных напряжений*; причем разрушению предшествует появление и развитие значительных пластических деформаций.

Для *хрупких материалов*, как правило, $\sigma_{вр} < \tau_B < \sigma_{вс}$, поэтому наиболее опасными являются нормальные растягивающие напряжения. Например, вал из чугуна разрушается по винтовым линиям под углом 45° к оси *от действия максимальных растягивающих напряжений* (рис. 4.14,а).

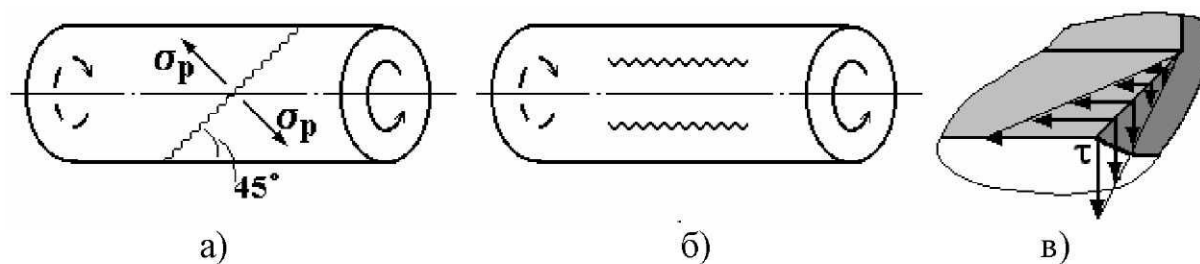


Рис. 4.14

Для анизотропных материалов важно знать направления наименьшего сопротивления их действующим напряжениям. Так, при кручении деревянного бруса трещины появляются на поверхности вдоль образующих (рис. 4.14,б) от действия максимальных касательных напряжений в продольном направлении (по закону парности касательных напряжений, рис. 4.14,в), так как древесина плохо сопротивляется скалыванию вдоль волокон.

При конструировании валов из композитных материалов, имеющих волокнистую структуру определенной ориентации, также следует учитывать направления действующих напряжений. Например, рационально применять композитные валы с ориентацией волокон по винтовым линиям, составляющим угол 45° с осью.

4.6. Статически неопределимые задачи на кручение

Статически неопределимые задачи на кручение включают в себя расчёты валов, в которых реакции опор (реактивные моменты) и внутренние силы (внутренние крутящие моменты) не могут быть определены только из уравнений статики. Расчёт таких валов производят, используя условия совместности перемещений дополнительно к уравнениям статики. При наличии абсолютно жёстких связей в отдельных сечениях вала углы поворота этих сечений равны нулю. При наличии упругих связей (или ограничителей поворота отдельных сечений) задают угловые перемещения соответствующих сечений вала, используя деформационные соотношения. Методику решения таких задач рассмотрим на примере.

Пример 4.1. Построить эпюру крутящих моментов для гладкого вала, жёстко закреплённого в торцевых сечениях и нагруженного внешним моментом M (рис. 4.15, а).

В жёстких опорах вала возникают реактивные моменты M_A и M_B (см. рис. 4.15,а), для нахождения которых одного уравнения равновесия недостаточно:

$$\sum M_z = 0; \quad M_A - M + M_B = 0.$$

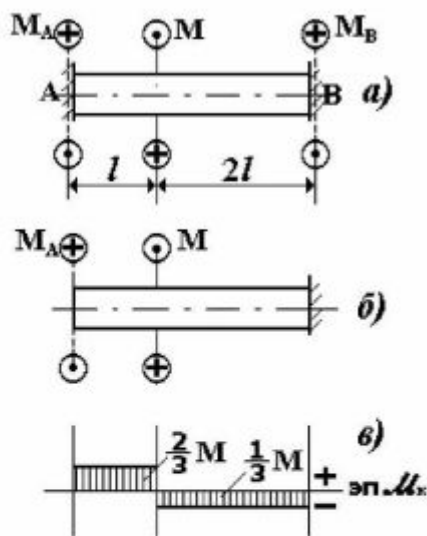


Рис. 4.15

Для составления дополнительного уравнения условно перейдем к статически определимой задаче, отбросив одну из заделок. Например, отбросим левую опору и введем в качестве нагрузки неизвестный момент M_A (рис. 4.15,б). Для его определения запишем условие отсутствия угла поворота левого сечения, используя формулу (4.17) и считая участки от сечения А:

$$\varphi_A = 0; \quad \varphi_A = \varphi_o + \sum_{i=1}^2 \frac{\mathcal{M}_{ki} l_i}{GJ_{pi}}$$

За начало отсчета углов φ примем сечение В ($\varphi_0 = \varphi_B = 0$). Тогда дополнительное уравнение примет вид

$$\frac{\mathcal{M}_{k1} l_1}{GJ_{p1}} + \frac{\mathcal{M}_{k2} l_2}{GJ_{p2}} = 0.$$

Применяя метод сечений, определяем внутренние крутящие моменты на участках: $\mathcal{M}_{k1} = M_A$, $\mathcal{M}_{k2} = M_A - M$.

Учитывая, что $l_1 = l$, $l_2 = 2l$, $GJ_{p1} = GJ_{p2} = GJ_p$, получаем:

$$\frac{M_A \cdot l}{GJ_p} + \frac{(M_A - M) \cdot 2l}{GJ_p} = 0 \quad \text{и} \quad M_A = \frac{2}{3} M.$$

Дальнейший расчет ведется как для статически определимого вала. Определяем крутящие моменты на участках вала: $\mathcal{M}_{k1} = 2M/3$, $\mathcal{M}_{k2} = -M/3$. Эпюра \mathcal{M}_k показана на рис. 4.15,в.

4.7. Кручение бруса прямоугольного сечения

Решение этой задачи намного сложнее, чем для бруса круглого сечения. В первую очередь это связано с тем, что при кручении бруса некруглого сечения не соблюдается гипотеза плоских сечений. Поперечные сечения бруса искривляются – происходит так называемая *депланация сечений*.

Примечание. Эффект депланации можно продемонстрировать на простом примере: если на поверхность призматического бруса предварительно нанести ортогональную сетку продольных и поперечных линий, то при кручении бруса линии искривятся.

Решение задачи о кручении бруса некруглого сечения проводится методами теории упругости, поэтому приведем лишь основные сведения, необходимые для расчета.

Отметим такие общие положения: 1) касательные напряжения в точках контура поперечного сечения направлены по касательной к линии контура; 2) касательные напряжения в угловых точках сечения равны нулю. Оба эти положения легко доказываются от противного.

Основные расчётные формулы – для максимальных касательных напряжений в сечении и относительного угла закручивания на участке – имеют вид, аналогичный соотношениям (4.11) и (4.8):

$$\tau^{max} = \frac{M_K}{W_K}; \quad \varphi' = \frac{M_K}{GJ_K}, \quad (4.28)$$

где J_K , W_K – момент инерции и момент сопротивления сечения при кручении.

Угол закручивания участка бруса определяется по формуле, аналогичной формуле (4.15):

$$\varphi = \frac{M_K l}{GJ_K}. \quad (4.29)$$

Для сечения прямоугольной формы распределение касательных напряжений показано на рис. 4.16. Наибольшие касательные напряжения возникают в середине больших сторон (точки A и A_1), напряжения в середине малой стороны прямоугольника (в точках B и B_1) меньше по величине:

$$\tau' = \eta \tau^{max}; \quad \eta \leq 1. \quad (4.30)$$

Геометрические характеристики прямоугольного сечения при кручении определяются соотношениями:

$$W_K = \alpha ab^2; \quad J_K = \beta ab^3; \quad a \geq b. \quad (4.31)$$

Коэффициенты α , β , η зависят от отношения сторон a/b ; их числовые значения приведены в табл. 4.2. Для прямоугольного сечения сильно вытянутой формы ($a/b > 10$) можно принять $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/3$.

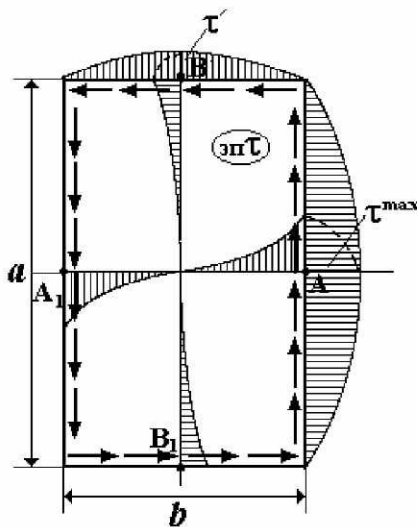


Рис. 4.16

Таблица 4.2

a/b	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
η	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

4.8. Кручение тонкостенного стержня открытого профиля

Стержень называется тонкостенным, если один из размеров поперечного сечения значительно превышает другой. Поперечное сечение тонкостенного стержня часто называется *профилем*. Различают *стержни открытого* (а) и *замкнутого* (б) *профиля* (рис. 4.17). В силу определения: $s/t > 10$, $s_i/t_i > 10$, где s , t – полная длина контура и толщина профиля; s_i , t_i – длина и толщина i -ой части тонкостенного профиля ($s = \sum s_i$).

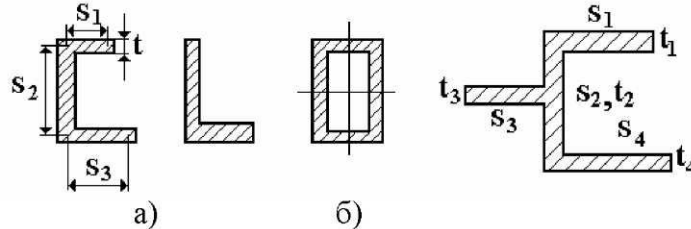


Рис. 4.17

Рис. 4.18

Наиболее часто применяются стержни открытого профиля. Для их расчёта при кручении применяется приближенный метод с использованием формул для бруса прямоугольного сечения. При этом возможны два подхода.

1. Если профиль (сечение стержня) может быть развернут в прямоугольник вытянутой формы (рис. 4.17,а), то для расчета применимы формулы (4.28)-(4.31) при $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/3$ ($W_K = st^2/3$, $J_K = st^3/3$):

$$\tau^{max} = \frac{3M_K}{st^2}; \quad \varphi' = \frac{3M_K}{Gst^3}; \quad \varphi = \frac{3M_K l}{Gst^3}. \quad (4.32)$$

2. В том случае, когда открытый профиль является составным и не может быть развернут в прямоугольник (рис. 4.18), то расчет ведется следующим образом. Сечение разбивается на n частей, каждая из которых воспринимает момент M_{ki} . При этом

$$J_K = \sum_{i=1}^n J_{ki}; \quad J_{ki} = \frac{1}{3} s_i t_i^3; \quad W_{ki} = \frac{1}{3} s_i t_i^2, \quad (4.33)$$

а угол поворота всего сечения и отдельных его частей одинаковый:

$$\varphi = \frac{M_K l}{GJ_K} = \frac{M_{k1} l}{GJ_{k1}} = \dots = \frac{M_{kn} l}{GJ_{kn}}. \quad (4.34)$$

Из соотношений (4.34) следует, что крутящий момент распределяется в отдельных частях сечения пропорционально их моментам инерции: $M_{ki} = M_K (J_{ki}/J_K)$. Максимальные касательные напряжения в i -ой части профиля равны:

$$\tau_i^{max} = \frac{M_{ki}}{W_{ki}} = \frac{M_K}{J_K} \left(\frac{J_{ki}}{W_{ki}} \right) = \frac{M_K}{J_K} t_i. \quad (4.35)$$

Наибольшие касательные напряжения в сечении имеют место на участке максимальной толщины:

$$\tau^{max} = \frac{M_K}{J_K} t_{max}. \quad (4.36)$$

Данный метод является приближенным, т.к. не учитывает повышенные местные напряжения (концентрацию напряжений) во внутренних углах ломаного профиля.

4.9. Расчет витых цилиндрических пружин с малым шагом

Пружины широко применяются в технике в качестве упругих элементов. В частности, в механизмах, работающих в условиях динамической нагрузки, применяются пружины как амортизаторы, т.е. детали, способные получить значительную упругую деформацию. На практике наиболее распространены цилиндрические пружины, испытывающие действие растягивающих или сжимающих сил (пружины растяжения-сжатия). Обычно пружины изготавливаются из стальной проволоки круглого поперечного сечения. Материал для пружин – качественная пружинно-рессорная сталь с высокими механическими характеристиками ($\sigma_{np} = 800 \div 1000$ МПа; $\sigma_T = 950 \div 1600$ МПа; $\sigma_e = 1500 \div 1750$ МПа; $\tau_T = 600 \div 1000$ МПа; $\tau_e = 850 \div 1400$ МПа).

Витая пружина представляет собой пространственный брус, в поперечных сечениях которого при нагружении возникают все внутренние силовые факторы. Для пружины с малым шагом вследствие малого угла подъема витка можно пренебречь влиянием изгибающего момента и нормальной силы. Поэтому для таких пружин растяжения или сжатия основными внутренними силовыми факторами являются крутящий момент M_k и перерезывающая сила Q , определяемые действием в поперечных сечениях касательных напряжений τ .

Основными параметрами цилиндрической пружины являются (рис. 4.19,а): D – средний диаметр витка; d – диаметр сечения проволоки; t – шаг витка; n – число рабочих витков.

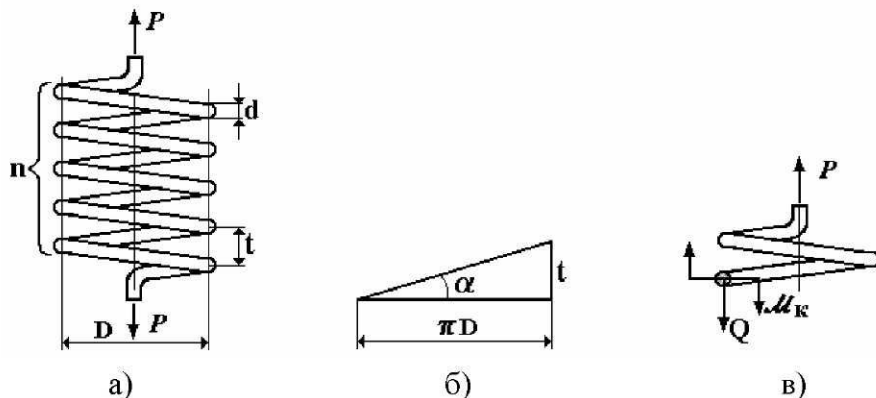


Рис. 4.19

Для отдельного витка можно ввести угол подъема α (рис. 4.19,б), где $t \operatorname{tg} \alpha = t / \pi D$. Для пружины с малым шагом обычно $\alpha \leq 5^\circ$.

Применяя метод сечений и рассматривая равновесие отсеченной части пружины (рис. 4.19,в), можно определить Q и M_k для любого поперечного сечения:

$$Q \approx P, \quad M_k = \frac{1}{2} P \cdot D. \quad (4.37)$$

Рассматривая касательные напряжения от деформаций кручения и среза (последние условно считаем равномерно распределенными в сечении), для максимальных касательных напряжений получим:

$$\tau_{max} = \frac{\mathcal{M}_k}{W_p} + \frac{Q}{F}, \quad W_p = \frac{\pi l^3}{16}; \quad F = \frac{\pi l^2}{4}.$$

С учётом (4.37) расчётная формула для касательных напряжений примет вид:

$$\tau_{max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right). \quad (4.38)$$

Для пружины из тонкой проволоки ($d/D < 0,1$) можно пренебречь напряжениями от среза. Тогда с достаточной точностью в расчёте можно определять касательные напряжения только от кручения:

$$\tau_{max} = \frac{8PD}{\pi d^3}. \quad (4.39)$$

В то же время для силовых пружин, изготовленных из толстой проволоки (например, винтовых рессор), следует пользоваться формулой (4.38), а анализ действующих напряжений от кручения и среза показывает, что наибольшие касательные напряжения всегда возникают на внутренней стороне витка.

Под действием осевой нагрузки пружина деформируется, и происходит изменение её длины ΔL по оси. Изменение длины пружины при действии сжимающей силы называется *осадкой пружины* ($\lambda = \Delta L$). При определении осевого перемещения (λ) пружины можно воспользоваться законом сохранения энергии. Работа внешних сил $A = \frac{1}{2} P \lambda$ (коэффициент 1/2 отражает статический характер нагружения) идет на создание внутренней энергии деформации кручения $U_{кр}$ упругой пружины. Рассматривая энергию деформации как работу внутренних сил (\mathcal{M}_k) на угловых перемещениях (φ), для элемента бруса получим (с учетом формулы (4.8)):

$$dU_{кр} = \frac{1}{2} \mathcal{M}_k \cdot d\varphi = \frac{\mathcal{M}_k^2 dz}{2GJ_p}.$$

Так как $\mathcal{M}_k = const$, $GJ_p = const$, то для всего бруса (пружины) получим

$$U_{кр} = \int_l dU_{кр} = \frac{\mathcal{M}_k^2 l}{2GJ_p}.$$

Принимая $l \approx \pi D n$, $J_p = \pi D^4/32$, в итоге определяем перемещение λ из условия $A = U_{кр}$:

$$\Delta L = \lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}. \quad (4.40)$$

Нетрудно получить расчетные формулы для τ_{max} и $\Delta L = \lambda$ для пружины из проволоки некруглого сечения, используя соответствующие выражения для геометрических характеристик J_k и W_k .

Обычно при определении перемещений по формуле (4.40) под n понимается рабочее число витков. Так, для пружины растяжения не учитывается отогнутая часть

концевых витков, для пружины сжатия исключается по 3/4 витка с каждого торца, т.е. $n_{\text{раб}} \approx n - 1,5$ (за счет шлифовки или поджатия концевых витков).

Характеристикой пружины растяжения-сжатия называется зависимость $P(\lambda)$ между нагрузкой и перемещением, которая в области упругих деформаций материала является линейной. Параметр

$$c = \frac{P}{\lambda} = \frac{Gd^4}{8D^3n} \quad (4.41)$$

называется *жёсткостью пружины*.

5. Геометрические характеристики сечений

При определении напряжений и перемещений используются различные геометрические характеристики поперечных сечений бруса. Например, при растяжении – площадь сечения F , при кручении – момент инерции J_p (J_k). В настоящем разделе обобщим понятия геометрических характеристик сечений бруса.

Геометрические характеристики сечений, представляющие интегралы вида $\int_F f(x,y)dF$ (рис. 5.1,а), приведены в табл. 5.1.

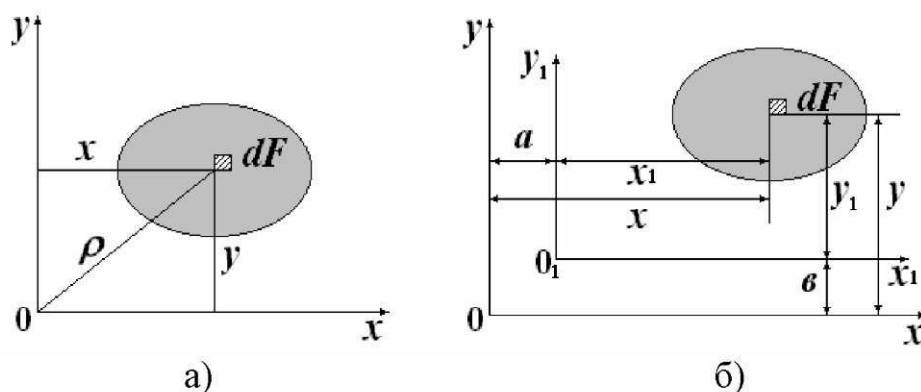


Рис. 5.1

Таблица 5.1

Геометрические характеристики сечений

$f(x,y)$	$\int_F f(x,y)dF$	Название	Размерность	Интервал значений
1	$F = \int_F dF$	Площадь сечения	см ²	$F > 0$
y	$S_x = \int_F ydF$	Статический момент сечения относительно оси x	см ³	$S_x \geq 0$ $S_x \leq 0$
x	$S_y = \int_F xdF$	Статический момент сечения относительно оси y	см ³	$S_y \geq 0$ $S_y \leq 0$
y^2	$J_x = \int_F y^2 dF$	Момент инерции сечения относительно оси x	см ⁴	$J_x > 0$
x^2	$J_y = \int_F x^2 dF$	Момент инерции сечения относительно оси y	см ⁴	$J_y > 0$
xy	$J_{xy} = \int_F xy dF$	Центробежный момент инерции сечения	см ⁴	$J_{xy} \geq 0$ $J_{xy} \leq 0$
$\rho^2 = x^2 + y^2$	$J_p = \int_F \rho^2 dF$	Полярный момент инерции сечения	см ⁴	$J_p > 0$

При определении геометрических характеристик сложного (составного) сечения используется свойство определенного интеграла: интеграл по всей площади сечения равен сумме интегралов по площадям частей, на которые разбито это сечение:

$$\int_F f(x,y)dF = \sum_{i=1}^n \int_{F_i} f(x,y)dF,$$

где n – число частей составного сечения.

5.1. Статические моменты сечения

Статические моменты сечения S_x и S_y используются, главным образом, для определения положения центра площади сечения и центральных осей.

Рассмотрим изменение статических моментов при параллельном переносе осей (рис. 5.1,б). Считая известными F , S_x и S_y в системе координат Oxy , определим статические моменты S_{x_1} , S_{y_1} относительно новых осей x_1 , y_1 , параллельных исходным осям.

Учитывая соотношения $x_1 = x - a$, $y_1 = y - b$, получим:

$$S_{x_1} = \int_F y_1 dF = \int_F (y - b) dF; \quad S_{y_1} = \int_F x_1 dF = \int_F (x - a) dF \quad \text{или}$$

$$S_{x_1} = S_x - bF; \quad S_{y_1} = S_y - aF. \quad (5.1)$$

Оси x_1 , y_1 можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия:

$$S_{x_1} = 0, \quad S_{y_1} = 0.$$

Оси, относительно которых статические моменты сечения равны нулю, называются *центрными*. Точка пересечения центральных осей называется *центром площади сечения*.

Принимая $S_{x_1} = 0$, $S_{y_1} = 0$, из выражений (5.1) координаты центра площади сечения относительно осей x , y выбранной системы координат определяются по формулам (обозначим $x_c = a$, $y_c = b$):

$$x_c = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (5.2)$$

Соответственно, если площадь F и положение центра площади сечения (координаты x_c , y_c) в системе координат Oxy известны, то статические моменты сечения относительно осей x , y можно определить из выражений (5.2):

$$S_x = F y_c; \quad S_y = F x_c. \quad (5.3)$$

Можно показать, что *статический момент относительно любой оси, проходящей через центр площади сечения, равен нулю*.

При определении центра площади сложного сечения применяется следующая процедура:

- 1) сечение разбивают на n частей, площади (F_i) и положение центров (C_i) площади которых известны;
- 2) вводят вспомогательную систему координат, в которой определяют координаты центров площадей (x_{ci}, y_{ci}) этих частей;
- 3) вычисляют координаты составного сечения по формулам:

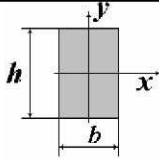
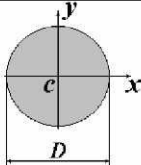
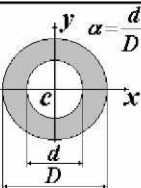
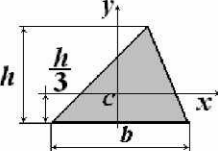
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_{ci}}{F}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_{ci}}{F}; \quad F = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (5.4)$$

5.2. Моменты инерции сечения

В табл. 5.2 приведены часто используемые формулы для моментов инерции сечений простой формы, которые получены непосредственно интегрированием (для прямоугольника приведен также и момент инерции при кручении J_K).

Таблица 5.2

Моменты инерции типовых сечений

Вид сечения	J_x	J_y	$J_p (J_K)$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	βhb^3
	$\frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05 D^4$	$\frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05 D^4$	$\frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1 D^4$
	$\frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,05 D^4 (1 - \alpha^4)$	$\frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,05 D^4 (1 - \alpha^4)$	$\frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,1 D^4 (1 - \alpha^4)$
	$\frac{bh^3}{36}$	—	—

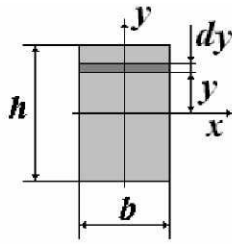


Рис. 5.2

Например, для прямоугольника (рис. 5.2) момент инерции относительно центральной оси x определяется следующим образом:

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{by^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \quad \text{или} \quad J_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично получим $J_y = \frac{hb^3}{12}$.

Отметим, что для круга и кольца $J_x = J_y = 0,5J_p$. Это следует из того, что $\rho^2 = x^2 + y^2$ (см. рис. 5.1,а), следовательно, $J_p = J_x + J_y$.

Рассмотрим изменение моментов инерции сечения при изменении системы координат – при параллельном переносе и повороте осей.

При параллельном переносе осей, например, момент инерции J_{x_1} изменяется следующим образом ($x_1 = x - a$, $y_1 = y - b$, см. рис. 5.1,б):

$$J_{x_1} = \int_F (y - b)^2 dF = \int_F y^2 dF - 2b \int_F y dF + b^2 \int_F dF = J_x - 2bS_x + b^2 F.$$

Выполнив аналогичные преобразования, получим формулы изменения моментов инерции при параллельном переносе осей в таком виде:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x - 2bS_x + b^2 F; & J_{y_1} &= J_y - 2aS_y + a^2 F; \\ J_{x_1 y_1} &= J_{xy} - aS_x - bS_y + abF. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Если оси x и y – центральные, то $S_x = 0$, $S_y = 0$, и тогда формулы (5.5) упрощаются:

$$J_{x_1} = J_x + b^2 F; \quad J_{y_1} = J_y + a^2 F; \quad J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abF. \quad (5.6)$$

Из формул (5.6) следует, что при переходе от центральных осей к нецентральной осевой момент инерции всегда увеличивается.

При повороте осей (рис. 5.3,а), учитывая, что

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha,$$

моменты инерции изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{y_1} &= J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{x_1 y_1} &= \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Вторая формула может быть получена из первой при изменении угла α на 90° . Складывая первые две формулы, находим:

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_p. \quad (5.8)$$

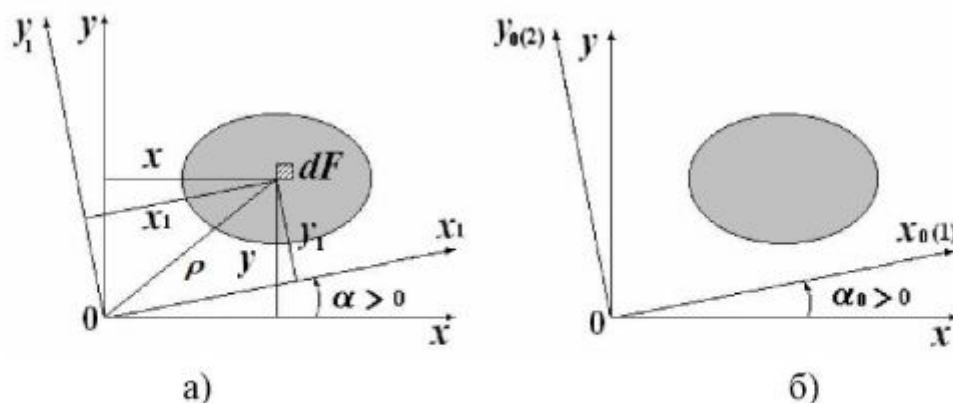


Рис. 5.3

Формула (5.8) выражает свойство инвариантности суммы осевых моментов инерции: при повороте осей сумма осевых моментов инерции сечения не изменяется и равна полярному моменту инерции.

Найдем положение осей, относительно которых осевые моменты инерции J_{x_1} и J_{y_1} принимают экстремальные значения. Для этого используем условие $dJ_{x_1}/d\alpha = 0$. После преобразований получаем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (5.9)$$

Такой же результат получается из третьей формулы (5.7) при $J_{x_1 y_1} = 0$.

Оси, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения (один – max, другой – min), а центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции (оси x_0, y_0 на рис. 5.3,б). Соответственно моменты инерции относительно этих осей называются главными моментами инерции (J_{max}, J_{min}). Иногда главным осям присваивают индексы «1» и «2», соответственно, главные моменты инерции обозначаются J_1 и J_2 . Обычно считается, что $J_1 = J_{max}, J_2 = J_{min}$. На рис. 5.3,б принято, что $J_{x_0} = J_{max}$, и ось x_0 обозначена цифрой 1.

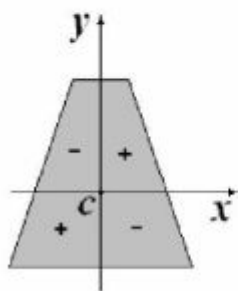


Рис. 5.4

Ось симметрии сечения и любая ей перпендикулярная ось являются главными осями инерции сечения. На рис. 5.4 показаны знаки момента J_{xy} симметричных частей сечения. С учетом симметрии сечения относительно оси y получим, что центробежный момент инерции всего сечения равен нулю.

Подробнее остановимся на определении главных моментов инерции. Если из формулы (5.9) найден угол α_0 , то из первых двух формул (5.7) при $\alpha = \alpha_0$ находятся значения главных моментов инерции:

$$\begin{aligned} J_{x_0} &= J_x \cos^2 \alpha_0 + J_y \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0; \\ J_{y_0} &= J_x \sin^2 \alpha_0 + J_y \cos^2 \alpha_0 + J_{xy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ясно, что если $J_{x_0} > J_{y_0}$, то $J_{x_0} = J_{max}$, а $J_{y_0} = J_{min}$, и наоборот.

Получим формулы для главных моментов инерции, не содержащие тригонометрические функции. Для этого запишем сумму и разность выражений (5.10):

$$\begin{aligned} J_{x_0} + J_{y_0} &= J_x + J_y; \\ J_{x_0} - J_{y_0} &= (J_x - J_y) \cos 2\alpha_0 - 2J_{xy} \sin 2\alpha_0 = (J_x - J_y) / \cos 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Во второй формуле использовалась замена $2J_{xy} = -(J_x - J_y) / \tan 2\alpha_0$ из выражения (5.9).

Теперь из формул (5.11) получим:

$$J_{x_0} = \frac{1}{2} ((J_x + J_y) + (J_x - J_y) / \cos 2\alpha_0); \quad J_{y_0} = \frac{1}{2} ((J_x + J_y) - (J_x - J_y) / \cos 2\alpha_0). \quad (5.12)$$

Очевидно, что если $J_x > J_y$, то $J_{x_0} > J_{y_0}$.

Используя зависимость $1/\cos 2\alpha_0 = \pm \sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_0}$ и формулу (5.9), запишем:

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{4J_{xy}^2}{(J_x - J_y)^2}} = \pm \frac{\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}}{(J_x - J_y)}.$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} J_{x_0} &= \frac{1}{2} ((J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}); \\ J_{y_0} &= \frac{1}{2} ((J_x + J_y) \mp \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Верхние знаки берутся при $J_x > J_y$, а нижние – при $J_x < J_y$.

Часто формулы (5.13) объединяют в одну. В итоге, для вычисления главных моментов инерции используют такую формулу:

$$J_{1,2} = J_{\begin{matrix} max \\ min \end{matrix}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \quad (5.14)$$

При этом нужно дополнительно определить соответствие осей x_0, y_0 и осей 1, 2.

Если главные моменты инерции известны, то моменты инерции относительно произвольных осей (рис. 5.5) могут быть получены из формул (5.7) с учетом того, что $J_{x_0 y_0} = 0$:

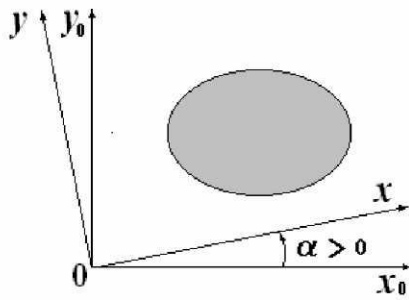


Рис. 5.5

$$\begin{aligned}
 J_x &= J_{x_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha, \\
 J_y &= J_{x_0} \sin^2 \alpha + J_{y_0} \cos^2 \alpha, \\
 J_{xy} &= 0,5(J_{x_0} - J_{y_0}) \sin 2\alpha.
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

В частности, из третьей формулы следует, что максимальное значение центробежный момент сечения принимает относительно осей, повернутых на угол $\alpha = 45^\circ$ к главным осям. При $J_{x_0} = J_1 = J_{max}$, $J_{y_0} = J_2 = J_{min}$ получим:

$$J_{xy}^{max} = \frac{J_1 - J_2}{2}.
 \tag{5.16}$$

В расчетных зависимостях для бруса используются характеристики сечений относительно главных центральных осей инерции. Для определения положения этих осей требуется выполнить следующее:

- 1) вычислить координаты центра площади сечения;
- 2) вычислить осевые J_x , J_y и центробежный J_{xy} моменты инерции относительно центральных осей x , y , параллельных вспомогательным;
- 3) определить положение главных осей (угол α_0) и главные моменты инерции (J_{max} , J_{min}) по формулам (5.9) и (5.14).

5.3. Радиусы инерции сечения

Моменты инерции сечения относительно осей x и y можно представить как произведения площади F сечения на квадрат некоторой величины, называемой *радиусом инерции*:

$$J_x = F \cdot i_x^2, \quad J_y = F \cdot i_y^2,
 \tag{5.17}$$

где i_x , i_y – радиусы инерции площади сечения относительно осей x и y .

Из выражений (5.17) следует, что:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}.
 \tag{5.18}$$

Главным центральным осям инерции соответствуют *главные радиусы инерции сечения*:

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}}; \quad i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}}.
 \tag{5.19}$$

6. Изгиб

Изгиб бруса вызывает действие поперечной нагрузки (рис. 6.1,а). Прямым изгибом называется нагружение бруса, при котором плоскость действующей нагрузки проходит через ось бруса и совпадает с одной из главных плоскостей бруса (плоскость расположения главных осей инерции поперечных сечений бруса). Частным случаем прямого изгиба является плоский изгиб бруса, при котором нагружение происходит в плоскости симметрии бруса.

Брус, работающий на изгиб, обычно называют балкой.

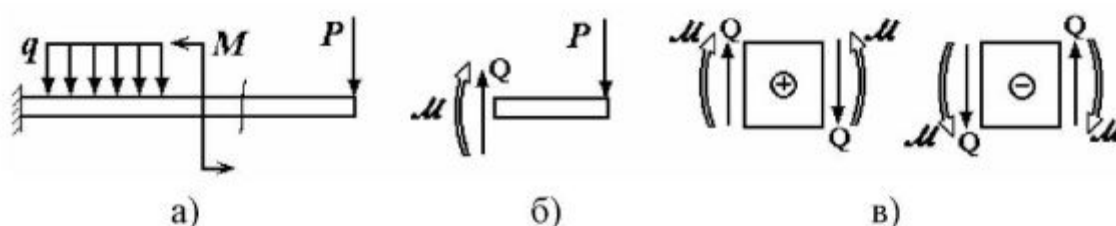


Рис. 6.1

В поперечных сечениях бруса при прямом изгибе возникают два внутренних силовых фактора – изгибающий момент M и поперечная сила Q , которые определяются по методу сечений (рис. 6.1,б). Для них используется такое правило знаков: положительная поперечная сила вызывает поворот рассматриваемой части бруса по ходу часовой стрелки; положительный изгибающий момент вызывает сжатие верхних волокон бруса (для горизонтально расположенного участка бруса). (Для произвольного положения бруса при построении эпюры моментов используется такое правило: значение момента откладывается со стороны сжатых волокон.) Положительное и отрицательное направления поперечной силы и изгибающего момента в сечениях балки показаны на рис. 6.1,в.

Различают чистый и поперечный изгиб. При чистом изгибе в поперечных сечениях бруса возникает только изгибающий момент, при поперечном изгибе – изгибающий момент и поперечная сила.

6.1. Дифференциальные и интегральные зависимости при изгибе

Для внутренних силовых факторов при изгибе балки существуют определенные зависимости. Рассмотрим произвольно нагруженную балку (рис. 6.2,а), где положительное направление погонной нагрузки $q(z)$ совпадает с направлением оси y . Выделим двумя поперечными сечениями элемент балки длиной dz , на который действует нагрузка q ; в концевых сече-

ниях элемента приложим внутренние силовые факторы \mathcal{M} и Q в положительном направлении с учётом их изменения по длине (рис. 6.2,б). В пределах малого участка dz нагрузку q можно считать постоянной.

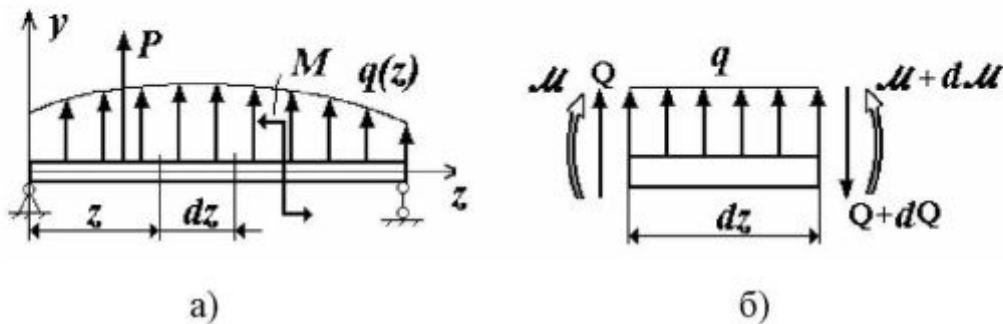


Рис. 6.2

Уравнения равновесия выделенной части балки имеют вид:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0; \quad Q + q \cdot dz - (Q + dQ) &= 0; \\ \sum m_x = 0; \quad -\mathcal{M} - Q \cdot dz - q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} + (\mathcal{M} + d\mathcal{M}) &= 0 \end{aligned}$$

(уравнение моментов записано относительно поперечной оси x , расположенной в правом сечении).

Отбрасывая во втором уравнении члены второго порядка малости, из уравнений равновесия получим *дифференциальные зависимости при изгибе*:

$$\frac{dQ}{dz} = q; \quad \frac{d\mathcal{M}}{dz} = Q \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\mathcal{M}}{dz^2} = q \quad (6.1)$$

(третье соотношение получено на основе первых двух).

Из соотношений (6.1) путем интегрирования можно получить *интегральные зависимости при изгибе*:

$$Q(z) = \int_0^z q(z) dz + Q_0; \quad \mathcal{M}(z) = \int_0^z Q(z) dz + \mathcal{M}_0, \quad (6.2)$$

где Q_0 , \mathcal{M}_0 – значения поперечной силы и изгибающего момента в начальном сечении участка.

На основе зависимостей (6.1), (6.2) и способов исследования функций в математическом анализе следуют выводы о характере функций $Q(z)$ и $\mathcal{M}(z)$, которые можно рассматривать как *правила контроля и построения эпюр* Q и \mathcal{M} (осевая координата z определяет положение поперечного сечения по длине балки).

1. Для участков балки, где $q = 0$, эпюра Q ограничена *горизонтальной прямой*, а эпюра \mathcal{M} – *наклонной прямой* (если на участке $Q=0$, то $\mathcal{M} = \text{const}$).

2. Для участков балки, где $q = \text{const} \neq 0$, эпюра Q ограничена наклонной прямой, эпюра M – квадратичной параболой.

3. На участке балки, где $q \neq 0$, выпуклость параболической эпюры M противоположна направлению нагрузки q .

4. На участке балки при $q \neq 0$ в том сечении, где $Q = 0$, эпюра M имеет экстремум: максимум – при $q < 0$, минимум – при $q > 0$.

5. Правило «скачков»: в сечении, где приложена внешняя сосредоточенная сила, на эпюре Q имеет место скачок на величину этой силы, а на эпюре M – излом навстречу силе. В сечении, где приложен внешний сосредоточенный момент, на эпюре M имеет место скачок на величину этого момента.

6. Для любого сечения ордината эпюры M численно равна площади эпюры Q на участке от начала координат до этого сечения с дополнением сосредоточенных моментов, действующих на этом участке.

6.2. Основные зависимости при чистом изгибе

В соответствии с общей схемой решения задачи о деформируемом теле (см. раздел 3.2) рассмотрим получение *кинематических, физических и статических зависимостей*.

В теории чистого изгиба принимаются следующие кинематическая и статические гипотезы.

1. *Гипотеза плоских сечений*: сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.

2. *Гипотеза ненадавливания продольных слоёв друг на друга*: продольные слои балки не взаимодействуют в поперечном направлении, т. е. нормальные напряжения в продольных сечениях равны нулю.

3. *Деформации и напряжения по ширине поперечного сечения балки постоянны*.

Эти гипотезы хорошо подтверждаются экспериментально. Если на поверхность недеформированной призматической балки нанести прямоугольную сетку линий (рис. 6.3,а), то при чистом изгибе балки сетка искажается так, что: а) поперечные линии остаются прямыми, поворачиваясь на некоторый угол; б) продольные линии искривляются по дугам окружностей, оставаясь перпендикулярными поперечным линиям, а расстояние между ними не изменяется (рис. 6.3,б).

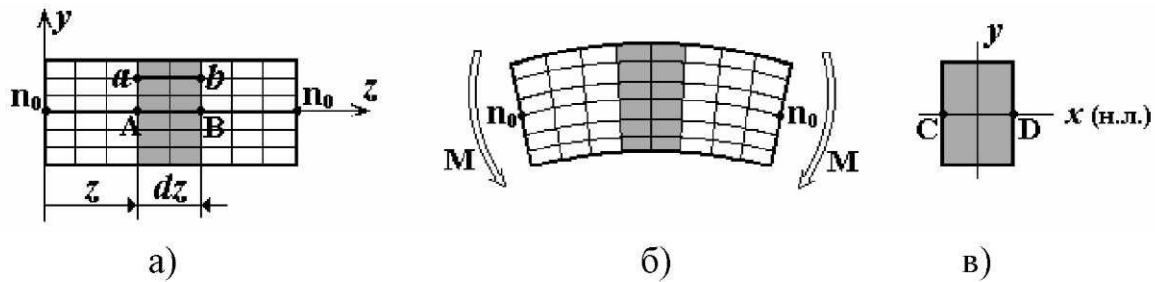


Рис. 6.3

При этом изменяется и форма поперечных сечений: в растянутой в продольном направлении зоне балки происходит сужение в поперечном направлении, в сжатой зоне – расширение.

При изгибе продольная деформация $\varepsilon(y)$ слоёв балки изменяется по высоте сечения непрерывно, причем одна часть волокон испытывает растяжение, а другая часть – сжатие. Очевидно, что существует слой балки, в котором деформация отсутствует – *нейтральный слой* n_0-n_0 (см. рис. 6.3,а,б). Линия пересечения нейтрального слоя и поперечного сечения называется *нейтральной линией* (линия CD на рис. 6.3,в).

Для получения кинематических зависимостей выделим из балки элементарную часть длиной dz (рис. 6.4,а) и рассмотрим отрезок ab произвольного слоя балки на расстоянии y от нейтрального слоя (ось y расположена в плоскости изменения кривизны). При изгибе поперечные сечения, оставаясь плоскими, повернутся на угол $d\theta$, а изменение кривизны k нейтрального слоя определяется из геометрического условия $dz = \rho d\theta$:

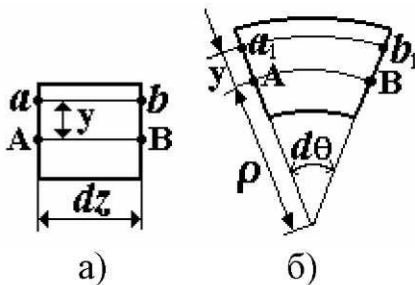


Рис. 6.4

При изгибе поперечные сечения, оставаясь плоскими, повернутся на угол $d\theta$, а изменение кривизны k нейтрального слоя определяется из геометрического условия $dz = \rho d\theta$:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}, \quad (6.3)$$

где ρ – радиус кривизны нейтрального слоя.

Линейная деформация отрезка ab определяется обычным образом:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(ab)}{ab} = \frac{a_1b_1 - ab}{ab}.$$

Учитывая, что $ab = dz = \rho d\theta$, $a_1b_1 = (\rho + y) d\theta$ (рис. 6.4,б), после преобразований получим

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = ky. \quad (6.4)$$

Согласно гипотезам 2 и 3 продольные слои испытывают одноосное растяжение или сжатие. Поэтому физическая зависимость (закон Гука) записывается в простейшем виде:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho} = Eky . \quad (6.5)$$

В соответствии с формулой (6.5) справедливо и такое определение нейтральной линии – это геометрическое место точек сечения, где нормальные напряжения равны нулю.

Рассмотрим статические зависимости для произвольного сечения балки, в котором действуют только нормальные напряжения (рис. 6.5).

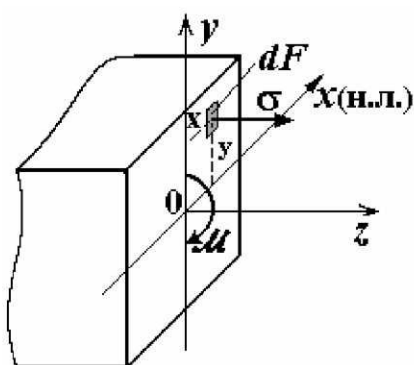


Рис. 6.5

Введём в сечении декартову систему координат так, что ось Ox совпадает с нейтральной линией сечения, ось Oy направлена вверх, ось Oz – перпендикулярно сечению. При изгибе нормальная сила $N = 0$, и с учетом формул (1.3) и (6.5) получаем:

$$N = \int_F \sigma dF = 0; \quad \int_F Eky dF = 0; \\ kE \int_F y dF = 0 .$$

Очевидно, что $E \neq 0$, $k = \frac{1}{\rho} \neq 0$ (для изогнутой балки), поэтому $\int_F y dF = S_x = 0$, т.е. ось x является центральной осью сечения.

Выбирая т. θ в центре площади сечения и учитывая, что рассматривается прямой изгиб, получаем, что оси x и y являются главными центральными осями поперечного сечения, а z – осью балки. Тогда ρ – радиус кривизны оси изогнутой балки.

Для изгибающего момента $\mathcal{M} = \mathcal{M}_x$ в сечении по формуле (1.3) имеем:

$$\mathcal{M} = \int_F \sigma y dF = \int_F Eky^2 dF = kE \int_F y^2 dF = kEJ_x; \quad J_x = \int_F y^2 dF ,$$

где J_x – момент инерции сечения относительно нейтральной линии. (При записи формулы направление изгибающего момента \mathcal{M} принято в соответствии с направлением нормальных напряжений.)

Отсюда получаем зависимость для кривизны оси балки:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{\mathcal{M}}{EJ_x} . \quad (6.6)$$

Параметр EJ_x называется *жесткостью бруса при изгибе*.

6.3. Нормальные напряжения при изгибе

Подставив зависимость (6.6) в формулу (6.5), получим выражение для *нормальных напряжений в произвольной точке* поперечного сечения:

$$\sigma = \frac{My}{J_x} . \quad (6.7)$$

Выражение (6.7) определяет закон изменения нормальных напряжений в плоскости сечения – линейная зависимость от координаты y (рис. 6.6,а).

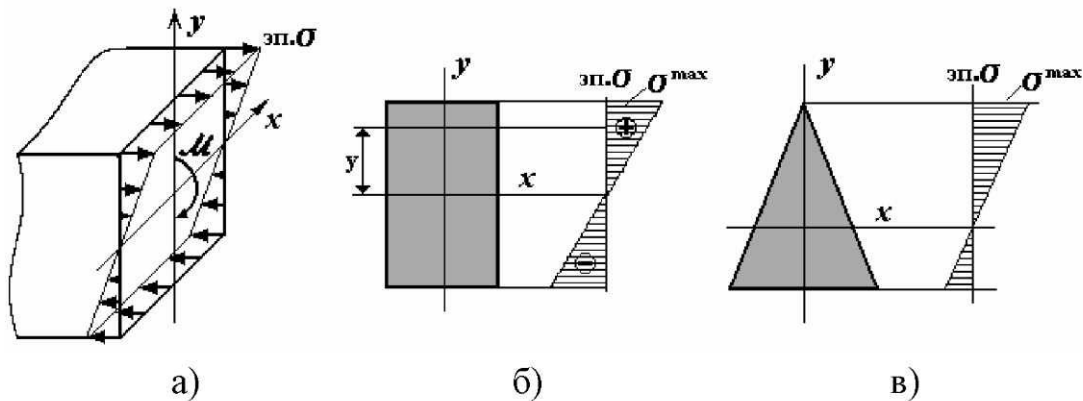


Рис. 6.6

Максимальные нормальные напряжения в сечении возникают в точках, наиболее удалённых от нейтральной линии, и определяются по формуле

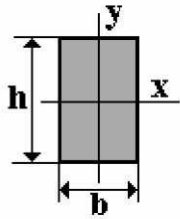
$$\sigma^{\max} = \frac{M y_{\max}}{J_x} = \frac{M}{W_x} . \quad (6.8)$$

Здесь введена новая характеристика сечения – *момент сопротивления сечения при изгибе*

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} . \quad (6.9)$$

Обычно *эпюру нормальных напряжений $\sigma(y)$* в сечении условно изображают в плоскости сечения (рис. 6.6,б). Знаки напряжений на эпюре ставятся в зависимости от направления изгибающего момента M в сечении (на рис. 6.6,б знаки показаны для момента отрицательного направления). Если сечение несимметричное относительно нейтральной линии, то максимальные растягивающие и сжимающие нормальные напряжения будут иметь различные значения (рис. 6.6,в).

Момент сопротивления W_x для сечений различной формы определяется через момент инерции J_x сечений (см. раздел «Геометрические характеристики сечений»). Например, для типовых сечений получим:



- прямоугольное сечение со сторонами b и h

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad y_{max} = \frac{h}{2}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6};$$

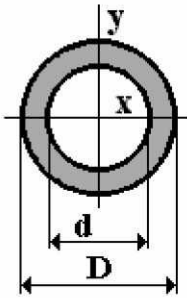
- кольцевое сечение ($\alpha = \frac{d}{D}$)

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05 D^4 (1 - \alpha^4); \quad y_{max} = \frac{D}{2};$$

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 D^3 (1 - \alpha^4);$$

- сплошное круглое сечение ($d = 0, \alpha = 0$)

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05 D^4; \quad W_x = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1 D^3.$$



6.4. Рациональные формы сечения балок при изгибе

Напряжения в сечении балки распределяются неравномерно. Поэтому встаёт вопрос о проектировании балок рациональной формы сечения, обеспечивающих наилучшим образом использование материала. Вопрос в том, как обеспечить заданную прочность балки при возможно минимальной ее материалоемкости. А эти факторы, прочность и материалоемкость, зависят от характеристик сечения – W_x и F . Рациональными формами сечений балок при изгибе считаются такие, которые обеспечивают заданную величину момента сопротивления W_x при минимальной площади F . Количественным показателем рациональности сечения может служить значение отношения $W_x / \sqrt{F^3}$: чем оно больше, тем более рациональное сечение.

Оптимально было бы использовать материал только в области наибольших напряжений, т. е. желательно распределять материал подальше от нейтрального слоя. Поскольку в сечении балки при изгибе возникают напряжения разного знака, выбор рациональной формы сечения (профиля) зависит и от свойств материала, т.е. способности материала сопротивляться действию растягивающих и сжимающих напряжений.

Пластичные материалы имеют одинаковые (или близкие по величине) пределы текучести на растяжение и сжатие ($\sigma_{тр} \approx \sigma_{сж}$). Поэтому балки из пластичных материалов рационально выполнять с сечением, симметричные относительно нейтральной линии. А идея периферийного распределения материала привела на практике к созданию стандартных прокатных профилей в виде двутавра и швеллера (рис. 6.7). Наибольшие значения па-

параметра $W_x / \sqrt{F^3}$ у двутавра. Основываясь на таком подходе, можно убедиться, что лучше применять балки не сплошного круглого сечения, а кольцевого; не прямоугольного сечения, а коробчатого.

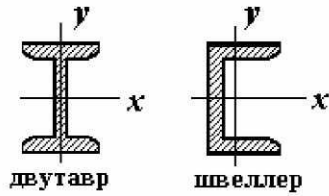


Рис. 6.7

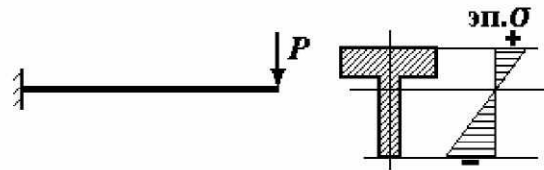


Рис. 6.8

Балки из материала, неодинаково работающего на растяжение и сжатие, выгодно выполнять с сечением, несимметричным относительно нейтральной линии. Причём положение нейтральной линии желательно иметь таким, чтобы выполнялось условие $\sigma_p^{max} / \sigma_c^{max} = \sigma_{вр} / \sigma_{вс}$. При этом важна правильная ориентация сечения в зависимости от положения растянутых и сжатых волокон. Например, для консольной чугунной балки таврового сечения (рис. 6.8) при показанном направлении нагрузки необходимо расположить балку полкой вверх, так как в этом случае будет $\sigma_c^{max} > \sigma_p^{max}$, а для чугуна $\sigma_{вс} > \sigma_{вр}$.

6.5. Напряжения при поперечном изгибе

При поперечном изгибе в сечениях балки возникают не только нормальные σ , но и касательные τ напряжения. Поперечная сила Q в сечении является результирующим силовым фактором от действия вертикальной составляющей τ касательных напряжений: $Q = \int_F \tau dF$. В результате возникающей деформации сдвига γ поперечные сечения не остаются плоскими, а искривляются. Кроме того, действие поперечной нагрузки, в частности распределенной нагрузки $q(z)$, приводит к взаимодействию продольных слоёв балки. Таким образом, при поперечном изгибе балки не соблюдаются гипотезы 1 и 2, принятые при чистом изгибе. Однако экспериментальные результаты, а также сопоставление с более строгим решением по теории упругости показывают, что несоблюдение отмеченных гипотез при поперечном изгибе приводит к незначительной погрешности при использовании формул чистого изгиба. Поэтому и при поперечном изгибе используются соотношения (6.6) для кривизны оси изогнутой балки и соотношения (6.7), (6.8) для нормальных напряжений:

$$k = \frac{\mathcal{M}}{EJ_x}; \quad \sigma = \frac{\mathcal{M}y}{J_x}; \quad \sigma^{max} = \frac{\mathcal{M}}{W_x}.$$

Для определения касательных напряжений τ в произвольной точке сечения используется гипотеза 3 ($\tau = const$ по ширине сечения) и закон парности касательных напряжений. Выделим элемент балки и рассмотрим его равновесие (рис. 6.9,а). Выбираем участок балки, где $q=0$, так как учёт распределённой нагрузки q приводит к появлению членов второго порядка малости, которыми можно пренебречь. Сделаем продольное сечение в элементе продольной плоскостью $y_1 = const$ и рассмотрим верхнюю отсечённую часть этого элемента (рис. 6.9,б).

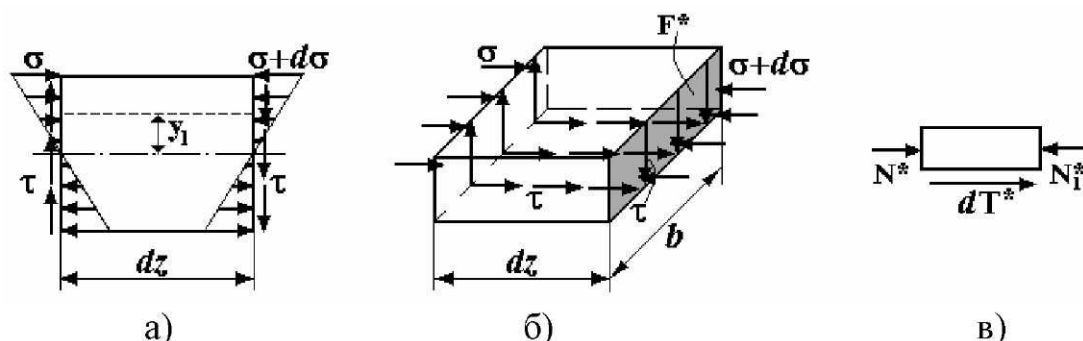


Рис. 6.9

На отсечённую часть в поперечных сечениях действуют нормальные напряжения $(\sigma+d\sigma)$, σ и касательные напряжения τ , а в продольном сечении действуют такие же напряжения τ согласно закону парности касательных напряжений. (Направления напряжений соответствует положительным направлениям \mathcal{M} и Q .) Приведём напряжения к результирующим силам (рис. 6.9,в):

$$N^* = \int_{F^*} \sigma dF; \quad N_1^* = \int_{F^*} (\sigma + d\sigma) dF; \quad dT^* = \tau b dz, \quad (6.10)$$

где F^* – площадь отсечённой части поперечного сечения.

Составим уравнение равновесия для отсечённой части балки:

$$\sum F_z = 0; \quad -N_1^* + N^* + dT^* = 0 \quad \text{или} \quad dT^* = N_1^* - N^*.$$

После подстановки соотношений (6.10) в это уравнение и преобразований, а также с учетом дифференциального соотношения $d\sigma = \frac{d\mathcal{M} \cdot y}{J_x}$ из выражения (6.7) можно получить такую зависимость:

$$\tau dz = \int_{F^*} d\sigma \cdot dF = \int_{F^*} \frac{dM \cdot y dF}{J_x} = \frac{dM}{J_x} \int_{F^*} y dF \quad \text{или} \quad \tau = \frac{1}{b J_x} \frac{dM}{dz} \int_{F^*} y dF^* .$$

Учтем, что $\int_{F^*} y dF = S_x^*$, $\frac{dM}{dz} = Q$. Тогда получим формулу для касательных напряжений в балках, которая называется формулой Д.И. Журавского:

$$\tau = \frac{Q S_x^*}{J_x b}, \quad (6.11)$$

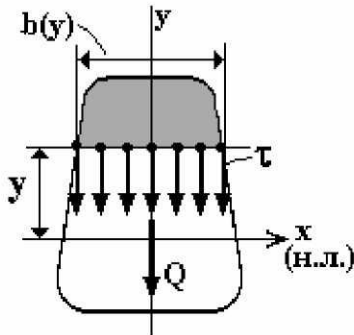


Рис. 6.10

где τ – вертикальная составляющая касательного напряжения; Q – поперечная сила в сечении балки; J_x – момент инерции сечения относительно нейтральной линии; $b = b(y)$ – ширина сечения на уровне y , где определяются касательные напряжения (по ширине сечения они постоянны); $S_x^* = S_x^*(y)$ – статический момент отсеченной части сечения (расположенной выше или ниже уровня y) (рис. 6.10).

Направление касательных напряжений τ в поперечном сечении балки соответствует направлению поперечной силы Q в этом сечении.

Для примера рассмотрим балку прямоугольного сечения со сторонами b и h . В соответствии с формулой (6.11) изменяется только статический момент отсеченной части сечения:

$$S_x^* = F^* y_c = b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y_1 \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right); \quad J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad b(y_1) = b .$$

Тогда

$$\tau = \frac{Q}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right); \quad \text{и при } y_1 = 0 \quad \tau^{max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} .$$

Для круглого сечения радиуса R , выполнив аналогичные преобразования, можно получить:

$$\tau(y_1) = \frac{4Q}{3\pi R^4} (R^2 - y_1^2); \quad \tau^{max} = \frac{4Q}{3\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} .$$

На рис. 6.11,а,б приведены эпюры касательных напряжений τ для прямоугольного и круглого сечений. В обоих случаях напряжения распределяются по высоте сечения по закону квадратичной параболы, максимальные напряжения возникают в точках нейтральной линии.

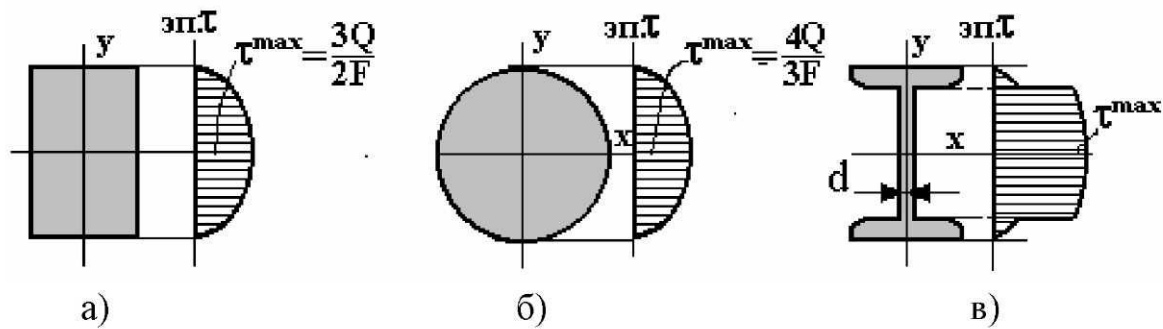


Рис. 6.11

Некоторые особенности в распределении касательных напряжений имеют место для тонкостенных профилей. Эпюра τ для двутаврового сечения показана на рис. 6.11, в. Вследствие резкого уменьшения ширины сечения возрастает величина касательных напряжений в стенке профиля. Максимальные напряжения равны $\tau^{max} = QS_x^*/J_x d$, а величины J_x , S_x^* , d приводятся в соответствующих таблицах ГОСТ сортамента. Эпюра τ для двутавра является приближенной, так как не учитывает местного увеличения напряжений вблизи входящего угла сечения, где стенка соединяется с полкой.

Можно сопоставить наибольшие касательные и нормальные напряжения в балках, чтобы выяснить определяющие напряжения при поперечном изгибе балок. Например, для консольной балки прямоугольного сечения

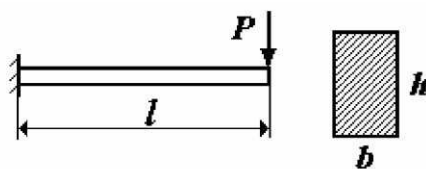


Рис. 6.12

(рис. 6.12) эти напряжения равны:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{Pl}{bh^2/6} = \frac{6Pl}{bh^2};$$

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{2F} = \frac{3P}{2bh}.$$

Сопоставляя полученные напряжения $\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = 4 \frac{l}{h}$ и учитывая, что для

бруса $l/h > 10$, можно сделать вывод, что для нетонкостенных балок максимальные нормальные напряжения значительно больше, чем касательные напряжения.

Следует отметить, что формула (6.11) позволяет вычислить касательные напряжения не только в поперечных, но и в продольных сечениях (по закону парности касательных напряжений).

6.6. Расчет балок на прочность

Для балок в большинстве практических случаев определяющими являются нормальные напряжения, а касательные напряжения играют второстепенную роль. Поэтому основным принимается условие прочности по нормальным напряжениям, а условие прочности по касательным напряжениям является проверочным.

Для балок из пластичных материалов условия прочности имеют вид:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}; \quad (6.12)$$

$$\tau_{max} \leq [\tau]; \quad [\tau] = \frac{\tau_T}{n_T}. \quad (6.13)$$

Для балок несимметричного профиля, выполненных из хрупких материалов, вместо условия (6.12) необходимо составить два условия прочности:

$$\begin{cases} \sigma_{max}^p \leq [\sigma]_p, \\ \sigma_{max}^c \leq [\sigma]_c \end{cases}, \quad \text{где } [\sigma]_p = \frac{\sigma_{вр}}{n_B}; \quad [\sigma]_c = \frac{\sigma_{вс}}{n_B}. \quad (6.14)$$

При расчете балок постоянного сечения наибольшие нормальные напряжения возникают в сечении, где действует максимальный изгибающий момент M_{max} , т.е. $\sigma_{max} = M_{max}/W_x$. В этом случае условие прочности (6.12) можно записать в виде:

$$\frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (6.15)$$

Условие прочности (6.15) используется для подбора сечения балки при изгибе:

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \quad (6.16)$$

При необходимости после этого проводится проверка по условию прочности (6.13) при $Q = Q_{max}$.

Для балок переменного сечения ($W_x \equiv W_x(z)$) условие прочности (6.12) следует записать в таком виде:

$$\left(\frac{M}{W_x} \right)_{max} \leq [\sigma]. \quad (6.15^*)$$

В некоторых случаях при расчете балок на прочность следует обращать особое внимание на касательные напряжения в поперечных и продольных сечениях балок. В частности, когда рассматриваются:

1) *тонкостенные балки*, в которых касательные напряжения могут достигать относительно большой величины вследствие малой толщины стенки (см. рис. 6.11,в);

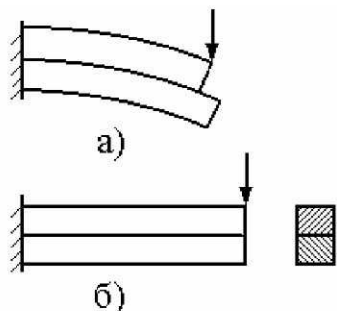


Рис. 6.13

2) *короткие балки из волокнистых материалов*, имеющие малую прочность на скалывание вдоль волокон (например, возможно разрушение деревянного бруска по продольной плоскости, совпадающей с нейтральным слоем, где возникают максимальные касательные напряжения (рис. 6.13,а);

3) *составные балки* (рис. 6.13,б), для которых возможно разрушение по продольной плоскости соединения частей балки от действия максимальных касательных напряжений.

6.7. Перемещения в балках при изгибе

При расчёте конструкции определяют не только напряжения, но и перемещения. Знание перемещений необходимо как в общей оценке жёсткости конструкции, так и при решении многих прикладных задач: расчёте статически неопределимых систем, динамическом нагружении конструкций, колебаниях упругих систем и др.

Дадим общие понятия о перемещениях в балках, рассматривая прямой изгиб балки. Для определённости введем общую систему координат Oyz

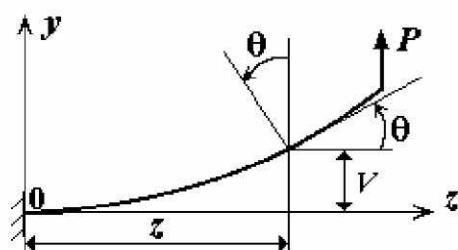


Рис. 6.14

(рис. 6.14), начало которой выбирается в центре площади какого-либо сечения, а ось z направлена по оси балки. (При этом следует иметь в виду, что с каждым сечением связана местная система главных центральных осей, параллельных исходным.)

Для поперечных сечений балок различают два вида перемещений:

1) *прогиб $V(z)$* – линейное перемещение сечения (центра площади сечения) в направлении, перпендикулярном оси балки;

2) *угол поворота $\theta(z)$* – угловое перемещение сечения по отношению к первоначальному положению (поворот сечения относительно нейтраль-

ной линии).

Принимая, что положительное направление θ совпадает с положительным направлением изгибающего момента \mathcal{M} в сечении, а положительное направление оси Oy – вверх (см. рис. 6.14), получим $\operatorname{tg}\theta = \frac{dV}{dz}$. В большинстве практических случаев перемещения в балках относительно малы, так что можно считать $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$. Тогда получим дифференциальное соотношение между прогибом и углом поворота сечения в таком виде:

$$\theta = V' ; \quad V' = \frac{dV}{dz} . \quad (6.17)$$

Рассмотрим некоторые методы определения перемещений.

6.7.1. Дифференциальное уравнение упругой линии балки

Ось изогнутой балки часто называют *упругой линией*. В случае прямого изгиба балки, учитывая соотношения (6.3), (6.6) и (6.17), для определения перемещений можно использовать систему дифференциальных уравнений в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dz} = \frac{\mathcal{M}}{EJ_x} \\ \frac{dV}{dz} = \theta \end{cases} . \quad (6.18)$$

Исключая второе уравнение в системе (6.18), получаем *дифференциальное уравнение упругой линии балки*:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{\mathcal{M}}{EJ_x} . \quad (6.19)$$

Решение уравнения (6.19) или системы уравнений (6.18) является наиболее общим для определения перемещений любого сечения изогнутой балки. Последовательным интегрированием уравнений в системе (6.18) или уравнения (6.19) получаем:

$$\theta(z) = \int_0^z \frac{\mathcal{M}dz}{EJ_x} + \theta_0 ; \quad V(z) = \int_0^z \int_0^z \frac{\mathcal{M}dz^2}{EJ_x} + \theta_0 z + V_0 , \quad (6.20)$$

где θ_0, V_0 – постоянные интегрирования, имеющие смысл перемещений сечения балки в начале координат ($z = 0$). Для балки постоянной жесткости ($EJ_x = \text{const}$) интегрирование упрощается:

$$\theta(z) = \frac{1}{EJ_x} \int_0^z \mathcal{M} dz + \theta_0; \quad V(z) = \frac{1}{EJ_x} \int_0^z \int_0^z \mathcal{M} dz^2 + \theta_0 z + V_0. \quad (6.21)$$

Постоянные θ_0 , V_0 определяются из *граничных условий*, число которых равно двум (порядку дифференциального уравнения). Граничные условия могут составляться для V и $V' = \theta$ в зависимости от типа закрепления балки. Например, для шарнирно опертой балки (рис. 6.15,а) граничные условия имеют вид: $V(0) = 0$, $V(l) = 0$; для консольной балки (рис. 6.15,б): $V(0) = 0$, $V'(0) = 0$.

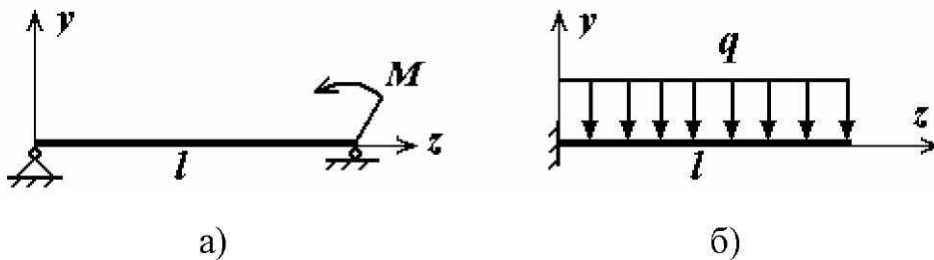


Рис. 6.15

Пример 6.1. Рассмотрим определение перемещений для консольной балки переменного сечения, нагруженной на свободном конце силой P (рис. 6.16). Балка имеет постоянную толщину и переменную ширину сечения ($h = \text{const}$, $b = \text{var}$).

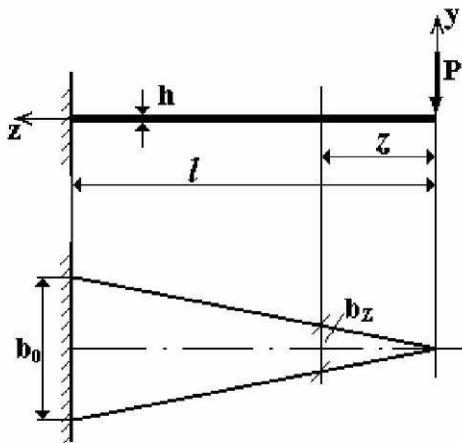


Рис. 6.16

Выберем начало координат на свободном конце балки. Тогда:

$$\mathcal{M}(z) = -P \cdot z; \quad b(z) = b_0 z / l,$$

где b_0 , l – ширина сечения в заделке и длина балки. Момент инерции произвольного сечения балки можно представить в таком виде:

$$J_x(z) = \frac{b(z)h^3}{12} = \frac{b_0 h^3}{12} \frac{z}{l} = J_0 \frac{z}{l},$$

$$\text{где } J_0 = \frac{b_0 h^3}{12}.$$

Подставив полученные выражения в дифференциальные уравнения (6.18) и выполнив интегрирование, получим такие выражения:

$$\theta(z) = -\frac{Plz}{EJ_0} + \theta_0; \quad V(z) = -\frac{Plz^2}{2EJ_0} + \theta_0 z + V_0.$$

Граничные условия имеют вид $\theta(l) = 0$, $V(l) = 0$. Подставив их в полученные выражения, находим константы интегрирования: $\theta_0 = Pl^2/EJ_0$, $V_0 = -Pl^3/2EJ_0$. Тогда для функции прогибов по длине балки и величины максимального прогиба (в сечении $z=l$) получим следующие выражения:

$$v(z) = -\frac{Plz^2}{2EJ_0} + \frac{Pl^2z}{EJ_0} - \frac{Pl^3}{2EJ_0} = -\frac{Pl^3}{2EJ_0} \left(1 - 2\frac{z}{l} + \frac{z^2}{l^2} \right); \quad v_{max} = |v(0)| = \frac{Pl^3}{2EJ_0}.$$

Аналогичным образом нетрудно получить максимальный прогиб для консольной балки постоянного сечения ($b_0 \times h$): $v_{max} = Pl^3/3EJ_0$.

6.7.2. Метод единичной нагрузки. Интеграл Мора

Общие методы определения перемещений в упругих системах основаны на использовании вариационных принципов механики. Наиболее часто применяется *принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)*: если упругая система находится в равновесии, то сумма работ всех внешних и внутренних сил на возможных бесконечно малых перемещениях равна нулю. В математической форме это можно записать так:

$$\sum_j P_j \delta_j + U = 0, \quad (6.22)$$

где P_j – внешняя сила; δ_j – возможное перемещение точки приложения силы P_j ; U – возможная работа внутренних сил.

Под возможными понимаются такие перемещения, которые могут быть осуществлены для данной системы в соответствии с имеющимися опорами, не нарушая сплошности системы. Чем меньше перемещения, тем точнее соблюдается принцип Лагранжа. Учитывая малую величину перемещений в реальных упругих системах, такие перемещения можно принимать в качестве возможных. Работа внешних и внутренних сил на возможных перемещениях называется возможной работой.

Пусть криволинейный брус испытывает плоскую деформацию под действием произвольной нагрузки, которую символически обозначим силой P (рис. 6.17,а). Требуется определить перемещение сечения K в заданном i -ом направлении ($\delta_K^{(i)}$).

Рассмотрим два состояния заданной системы. *Исходное состояние системы при действии заданной нагрузки, в котором возникает искомое перемещение, называется действительным или грузовым состоянием. Вспомогательное состояние системы определяется действием соответствующей единичной нагрузки и называется единичным состоянием* (рис. 6.17,б). Термин «перемещение» понимается в обобщённом смысле: линейное или угловое перемещение. *Единичная нагрузка должна соответствовать искомому перемещению: прикладывается в заданном сечении и в заданном направлении; вводится единичная сила ($\bar{P} = 1$), если определяют*

линейное перемещение, или единичный момент ($\bar{M} = 1$), если определяют угол поворота.

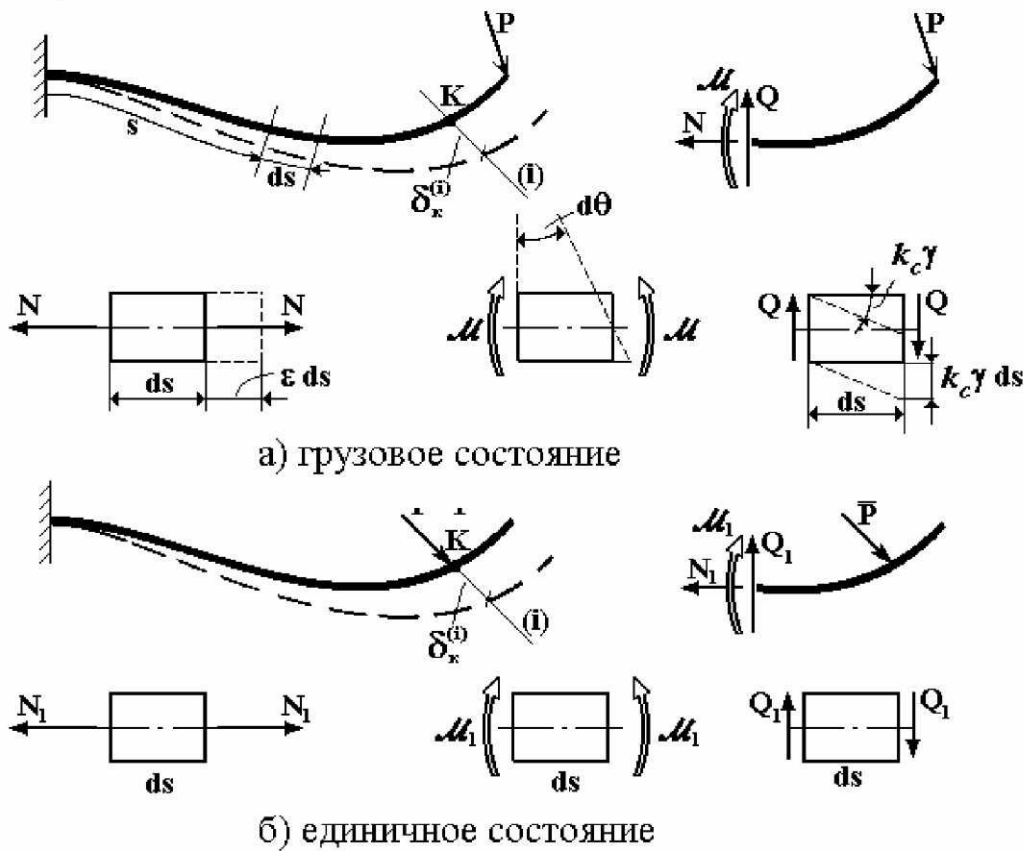


Рис. 6.17

В рассматриваемом методе принцип возможных перемещений применяется для единичного состояния. При действии единичной нагрузки в поперечных сечениях бруса возникают внутренние силовые факторы: нормальная сила \bar{N} , изгибающий момент \bar{M} и поперечная сила \bar{Q} . Возможные перемещения определяются *дополнительным деформированным состоянием*, которое накладывается на упругую систему, до того находившуюся в равновесии под действием приложенной нагрузки. В качестве возможных принимаются реальные перемещения бруса в грузовом состоянии, при котором в поперечных сечениях бруса возникают внутренние силовые факторы N, M, Q .

Для единичного состояния внешней силой является только $\bar{P} = 1$, которая совершает работу на искомом перемещении $\delta_K^{(i)}$; поэтому возможная работа внешних сил равна $\bar{P} \cdot \delta_K^{(i)}$. При составлении работы внутренних сил рассматривают деформацию элемента бруса длиной ds (см. рис. 6.17). Если левое сечение условно считать неподвижным, то правое сечение по-

лучит такие перемещения: при растяжении (сжатии) – осевое перемещение εds ; при изгибе – угол поворота $d\theta = k ds$; при сдвиге – поперечное перемещение $k_c \gamma ds$ (см. рис. 6.17,а). Здесь $\gamma = \tau/G = Q/GF$ – условная деформация сдвига элемента при равномерном распределении касательных напряжений в сечении. Для приближенного учета неравномерного распределения касательных напряжений в сечении бруса при изгибе (см. раздел 6.4) вводится поправочный коэффициент k_c – коэффициент формы сечения (для прямоугольного сечения $k_c = 6/5$, для сплошного круглого сечения $k_c = 10/9$ и т.д.).

Работа dU внутренних сил для элемента бруса всегда отрицательная, так как эти силы являются силами упругого сопротивления и препятствуют развитию деформации. Поэтому получим:

$$dU = -\bar{N} \cdot \varepsilon ds - \bar{\mathcal{M}} \cdot k ds - k_c \cdot \bar{Q} \cdot \gamma ds.$$

Для бруса в целом работа внутренних сил получается интегрированием выражения для dU по длине l . Подстановка полученных выражений в формулу (6.22) даёт уравнение:

$$1 \cdot \delta_K^{(i)} - \int_0^l \bar{N} \varepsilon ds - \int_0^l \bar{\mathcal{M}} k ds - \int_0^l \bar{Q} k_c \gamma ds = 0.$$

Откуда выражение для искомого перемещения получается в виде:

$$\delta_K^{(i)} = \int_0^l \bar{N} \varepsilon ds - \int_0^l \bar{\mathcal{M}} k ds - \int_0^l \bar{Q} k_c \gamma ds. \quad (6.23)$$

Подставляя в выражение (6.23) известные зависимости для деформаций ε, k, γ ($\varepsilon = N/EF$, $k = \mathcal{M}/EJ_x$, $\gamma = Q/GF$), получим расчётную формулу для определения перемещений:

$$\delta_K^{(i)} = \int_0^l \frac{\bar{N} N ds}{EF} + \int_0^l \frac{\bar{\mathcal{M}} \mathcal{M} ds}{EJ_x} + \int_0^l k_c \frac{\bar{Q} Q ds}{GF}. \quad (6.24)$$

Формула (6.24) носит название *интеграла Мора*.

В случае расчёта бруса, имеющего несколько участков, формула (6.24) может быть представлена в следующем виде:

$$\delta_K^{(i)} = \sum_{i=1}^m \left(\int_0^{l_i} \frac{\bar{N}_i N_i ds}{E_i F_i} + \int_0^{l_i} \frac{\bar{\mathcal{M}}_i \mathcal{M}_i ds}{E_i J_{xi}} + \int_0^{l_i} k_{ci} \frac{\bar{Q}_i Q_i ds}{G_i F_i} \right), \quad (6.25)$$

где m – количество участков бруса.

Вклад каждого из интегралов в формулу (6.24) различный, что обычно учитывается при расчёте конкретного бруса. Для бруса при растяжении-сжатии учитывается только первый интеграл. При прямом изгибе прямолинейного бруса обычно учитывается только второй интеграл:

$$\delta_k^{(i)} = \int_0^l \frac{\overline{M} M dz}{EJ_x} . \quad (6.26)$$

Определение перемещений по методу единичной нагрузки проводится в следующем порядке.

1. Брус разбивают на участки в соответствии с действующей нагрузкой и характером изменения жесткости.

2. На каждом участке для грузового состояния составляют выражения для внутренних усилий N , Q , M в произвольном сечении бруса.

3. Рассматривают единичное состояние бруса, определяемое действием соответствующей единичной нагрузки: прикладывают единичную силу $\overline{P} = 1$ в направлении искомого перемещения при определении линейного перемещения, прикладывают единичный момент $\overline{M} = 1$ при определении углового перемещения.

4. На каждом участке бруса для единичного состояния составляют выражения для внутренних усилий \overline{N} , \overline{M} , \overline{Q} в произвольном сечении бруса.

5. Вычисляют перемещение по одной из формул (6.24) – (6.26).

Положительное расчетное значение показывает, что искомое перемещение происходит по направлению приложенной единичной нагрузки, отрицательное значение соответствует тому, что перемещение происходит в направлении, противоположном приложенной единичной нагрузке.

6.7.3. Способ Верещагина

Использование формул (6.24) – (6.26) связано с необходимостью вычисления интегралов, иногда – путем численного интегрирования. Существуют различные способы, облегчающие вычисление этих интегралов. Один из них, *графоаналитический способ А.К. Верещагина*, применяется для *прямолинейного бруса*.

Рассмотрим прямолинейную балку постоянной жесткости ($EJ_x = const$) и формулу (6.26) представим в виде:

$$\delta = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l \overline{M} M dz . \quad (6.27)$$

Для прямолинейной балки выражение изгибающего момента \overline{M} от единичной нагрузки всегда является линейной функцией:

$$\overline{M} = a + bz. \quad (6.28)$$

Выражение изгибающего момента M грузового состояния может быть произвольной функцией (рис. 6.18). После подстановки выражения (6.28) в формулу (6.27) в результате преобразований получим:

$$\delta = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l (a+bz) M dz = \frac{1}{EJ_x} \left(a \int_0^l M dz + b \int_0^l z M dz \right).$$

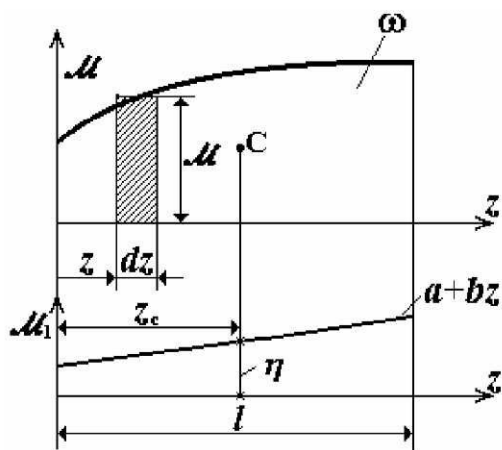


Рис. 6.18

Введём обозначения (согласно геометрическому смыслу слагаемых в этом выражении):

$$\int_0^l M dz = \int_{\omega} d\omega = \omega$$

– площадь грузовой эпюры M (рис. 6.18);

$$\int_0^l z M dz = \int_{\omega} z d\omega = z_c \omega = S_M$$

– статический момент площади эпюры M относительно вертикальной

оси (точка C – центр площади грузовой эпюры M).

Тогда получим такое выражение:

$$\delta = \frac{1}{EJ_x} (a\omega + bz_c\omega) = \frac{\omega(a + bz_c)}{EJ_x}.$$

Сомножитель в скобках согласно выражению (6.28) является значением момента \overline{M} в сечении $z = z_c$ (см. рис. 6.18). Если ввести для него обозначение $\eta = \overline{M}(z_c) = a + bz_c$, то формула для определения перемещений по способу Верещагина примет вид:

$$\delta = \frac{\omega \cdot \eta}{EJ_x}. \quad (6.29)$$

Знак произведения $\omega \eta$ выбирается следующим образом: если грузовая эпюра M и соответствующая ордината η на единичной эпюре \overline{M} расположены по одну сторону от оси, то произведение считается положительным, в противном случае – отрицательным.

Таким образом, вычисление перемещений по способу Верещагина сводится к перемножению площади (ω) грузовой эпюры M на ординату (η) единичной эпюры \overline{M} под центром площади грузовой эпюры.

Следует обратить внимание, что эпюры \overline{M} и M для вычисления перемещений по формуле (6.29) должны удовлетворять таким условиям:

- 1) грузовая эпюра M непрерывна и сохраняет знак на всем участке интегрирования;
- 2) площадь и положение центра площади грузовой эпюры M известны или легко определяются;
- 3) единичная эпюра \overline{M} является *прямолинейной* (а не кусочно-линейной).

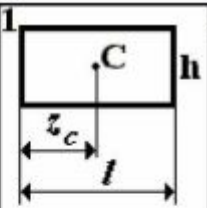
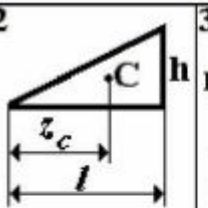
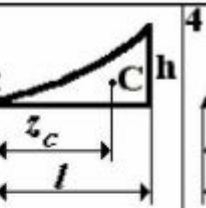
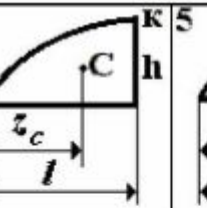
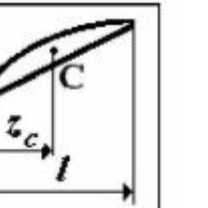
В том случае, если эпюры M и \overline{M} не удовлетворяют указанным условиям, *грузовую эпюру разбивают на простые фигуры*, чтобы удовлетворялись эти условия, и перемещение вычисляют по формуле:

$$\delta = \frac{1}{EJ_x} \sum_{i=1}^n \omega_i \eta_i, \quad (6.30)$$

где n – количество простых фигур.

Вспомогательная информация для некоторых фигур приведена в табл. 6.1 (т.С – центр площади фигуры).

Таблица 6.1

Эпюра					
ω	hl	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{ql^3}{12}$
z_c	$\frac{1}{2}l$	$\frac{2}{3}l$	$\frac{3}{4}l$	$\frac{5}{8}l$	$\frac{1}{2}l$

Фигуры 3 - 5 получаются для эпюры M , ограниченной *квадратичной параболой* (при действии распределенной нагрузки $q = const$), причем для фигур 3 и 4 (*параболические треугольники*) т.К должна быть *точкой экстремума* (*min* или *max*).

Способ Верещагина применим для вычисления любого из интегралов (6.24) с использованием соответствующих эпюр и жесткостей. Отметим ограничение и дополнительные особенности применения способа Верещагина (на примере формулы (6.29) для балки).

1. Способ Верещагина применим только для *прямолинейного бруса*.

2. Ступенчатый брус следует разбить на участки постоянной жёсткости; тогда расчётная формула примет вид:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \eta_i}{EJ_{xi}} . \quad (6.31)$$

3. Для бруса переменной жесткости $EJ_x(z)$ можно построить приведённую грузовую эпюру $\mathcal{M}_{np} = \mathcal{M}/EJ_x$; тогда формула (6.30) преобразуется к такому виду:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \omega_{np,i} \cdot \eta_i . \quad (6.32)$$

4. Если обе эпюры (грузовая \mathcal{M} и единичная $\overline{\mathcal{M}}$) являются линейными, то операция «перемножения» в формулах (6.29) - (6.31) обладает свойством *коммутативности* (перестановки), т. е. можно умножать площадь единичной эпюры ω_1 на ординату грузовой эпюры η_p ($\omega \cdot \eta = \omega_1 \cdot \eta_p$):

$$\delta = \frac{\omega \cdot \eta}{EJ_x} = \frac{\omega_1 \cdot \eta_p}{EJ_x} .$$

5. Знак каждого отдельного произведения $\omega_i \eta_i$ выбирается следующим образом: если эпюра \mathcal{M} на данном участке и соответствующая ордината η_i на эпюре $\overline{\mathcal{M}}$ расположены по одну сторону от оси, то произведение считается положительным, в противном случае – отрицательным.

6.8. Балки равного сопротивления изгибу

Для уменьшения материалоемкости конструкции на практике часто применяются балки переменного сечения. При расчете таких балок следует учитывать, что геометрические характеристики сечения $J_x(z)$, $W_x(z)$ являются функциями продольной координаты. Например, максимальные напряжения в сечении балки равны:

$$\sigma^{max}(z) = \frac{\mathcal{M}(z)}{W_x(z)} , \quad (6.33)$$

и анализ их только для всей балки в целом позволяет выбрать наибольшие напряжения σ_{max} в опасном сечении. Частным случаем балок переменного сечения являются балки *равного сопротивления изгибу* (*равнопрочные балки*), для которых во всех сечениях *максимальные напряжения одинаковы* (в частности, могут быть равны допускаемому):

$$\sigma^{max}(z) = \frac{|\mathcal{M}(z)|}{W_x(z)} = const = \sigma_{max}; \quad (\sigma_{max} = [\sigma]) . \quad (6.34)$$

Отсюда получается выражение для $W_x(z)$, через которое можно определять размеры сечений:

$$W_x = \frac{|\mathcal{M}(z)|}{\sigma_{max}} . \quad (6.35)$$

Закон изменения $W_x(z)$ определяется и видом нагрузки. Например, консольная балка постоянного сечения, нагруженная сосредоточенным моментом (рис. 6.19), будет балкой равно сопротивления изгибу, т. к. $\mathcal{M}(z)=M$, и из выражения (6.35) следует $W_x=const$.

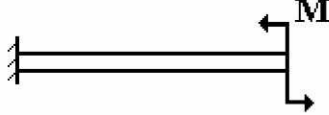


Рис. 6.19

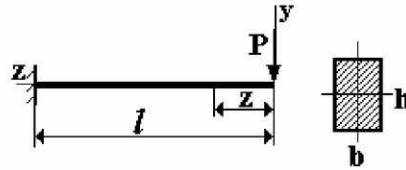


Рис. 6.20

В то же время, в зависимости от формы сечения балки выбор размеров сечения является неоднозначным, поэтому может существовать бесчисленное множество равнопрочных балок. Рассмотрим это на примере консольной балки прямоугольного сечения, нагруженной силой P (рис. 6.20).

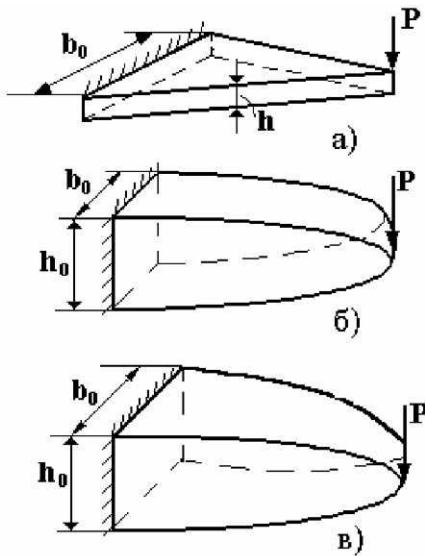


Рис. 6.21

Принимая $\sigma_{max} = [\sigma]$ и учитывая, что $|\mathcal{M}| = Pz$ (см. рис. 6.20), из выражения (6.35) получаем:

$$W_x(z) = \frac{b(z)h^2(z)}{6} = \frac{Pz}{[\sigma]} \quad (6.36)$$

Рассмотрим три варианта изменения сечения по длине балки:

- 1) $h = const, b = b(z)$;
- 2) $b = const, h = h(z)$;
- 3) $h(z)/b(z) = c = const$.

В результате для каждого варианта из выражения (6.35) получаются следующие конструктивные схемы равнопрочных балок:

$$1) b(z) = \frac{6Pz}{[\sigma]h^2} \quad (\text{рис. 6.21, а});$$

$$2) h(z) = \sqrt{\frac{6Pz}{[\sigma]b}} \quad (\text{рис. 6.21, б}); \quad 3) b(z) = 3\sqrt{\frac{6Pz}{[\sigma]c^2}}; \quad h(z) = 3\sqrt{\frac{6Pzc}{[\sigma]}} \quad (\text{рис. 6.21, в}).$$

Размеры сечений балок в заделке нетрудно получить при $z = l$.

Ясно, что существуют и другие варианты выбора параметров сечения (b, h), и в каждом случае получается свой объём (масса) равнопрочной балки. При этом всегда получается экономия материала по сравнению с балкой постоянного сечения (b_0, h_0) при $\sigma_{max} = [\sigma]$. Так, в первом варианте получается балка в два раза меньшей массы по сравнению с балкой постоянного сечения.

При проектировании балки равно сопротивления при поперечном изгибе следует учитывать и действие касательных напряжений. В рассматриваемом примере (см. рис. 6.20) существуют минимальные размеры (b_{min}, h_{min}) сечения, которые определяются из условия:

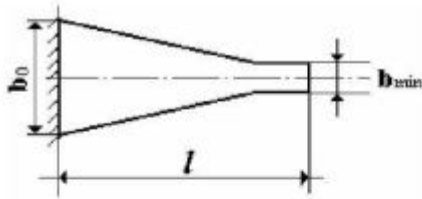


Рис. 6.22

конце, как показано на рис. 6.22.

Балки переменного и постоянного сечения в значительной мере различаются и по перемещениям. Так, для консольной балки постоянного сечения максимальный прогиб равен $V_{max} = Pf^3/3EJ_0$, а для консольной балки равного сопротивления изгибу (в первом варианте) – $V'_{max} = Pf^3/2EJ_0$, где $J_0 = b_0h^3/12$ (см. пример 6.1). Из сравнения видно, что $V'_{max} = 1,5V_{max}$. Таким образом, при одинаковой прочности балка равного сопротивления в два раза легче и в 1,5 раза более гибкая, чем балка постоянного сечения. Это свойство используется в специальных конструктивных элементах – *рессорах*, которые за счет большой деформативности позволяют уменьшить эффекты динамических воздействий. Конструктивно рессора выполняется в виде пакета листов одинаковой ширины, но различной длины (рис. 6.23). За основу берется балка равного сопротивления изгибу треугольной формы, которая условно разрезается

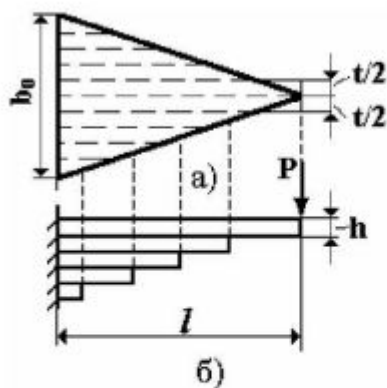


Рис. 6.23

на $2n$ полос шириной $t/2$ (рис. 6.23,а). Затем полосы одинаковой длины складываются (n полос шириной $t=b_0/n$), и в результате получается рессорный листовый пакет (рис. 6.23,б). В рессорах листы не связаны друг с другом: специальные устройства (хомуты) служат для того, чтобы рессора не рассыпалась), поэтому приближенно можно считать, что исходная балка треугольной формы и рессорный пакет эквивалентны. Однако на практике влияние трения между листами полностью устранить не удастся, поэтому реальные прогибы рессор несколько меньше, чем расчётные (~ на 10-25%). Для обеспечения необходимой прочности рессоры изготавливают из высокопрочных сталей, так что обычно допускаемые напряжения $[\sigma] > 400$ МПа.

$$\tau_{max} = \frac{3P}{2bh} \leq [\tau]$$

Так, в первом варианте (см. рис. 6.21,а) получим

$$b_{min} = \frac{3P}{2[\tau]h}$$

следует «скорректировать» по ширине на свободном

конце, как показано на рис. 6.22.

Балки переменного и постоянного сечения в значительной мере различаются и по перемещениям. Так, для консольной балки постоянного сечения максимальный прогиб равен $V_{max} = Pf^3/3EJ_0$, а для консольной балки равного сопротивления изгибу (в первом варианте) – $V'_{max} = Pf^3/2EJ_0$, где $J_0 = b_0h^3/12$ (см. пример 6.1). Из сравнения видно, что $V'_{max} = 1,5V_{max}$. Таким образом, при одинаковой прочности балка равного сопротивления в два раза легче и в 1,5 раза более гибкая, чем балка постоянного сечения. Это свойство используется в специальных конструктивных элементах – *рессорах*, которые за счет большой деформативности позволяют уменьшить эффекты динамических воздействий. Конструктивно рессора выполняется в виде пакета листов одинаковой ширины, но различной длины (рис. 6.23). За основу берется балка равного сопротивления изгибу треугольной формы, которая условно разрезается на $2n$ полос шириной $t/2$ (рис. 6.23,а). Затем полосы одинаковой длины складываются (n полос шириной $t=b_0/n$), и в результате получается рессорный листовый пакет (рис. 6.23,б). В рессорах листы не связаны друг с другом: специальные устройства (хомуты) служат для того, чтобы рессора не рассыпалась), поэтому приближенно можно считать, что исходная балка треугольной формы и рессорный пакет эквивалентны. Однако на практике влияние трения между листами полностью устранить не удастся, поэтому реальные прогибы рессор несколько меньше, чем расчётные (~ на 10-25%). Для обеспечения необходимой прочности рессоры изготавливают из высокопрочных сталей, так что обычно допускаемые напряжения $[\sigma] > 400$ МПа.

7. Статически определимые стержневые системы

7.1. Основные определения

Стержневой системой называется конструкция, состоящая из структурных элементов типа бруса (стержня). При выборе расчётной схемы стержневой системы следует учитывать способ соединения стержней между собой и с опорной поверхностью, так как от этого зависит, какой вид деформации будет преобладающим для стержня (растяжение-сжатие, изгиб, кручение). Как правило, соединение стержней является податливым, но в расчётных схемах чаще всего используются модели жесткого и шарнирного типа соединений.

Стержневая система называется *плоской*, если оси всех составляющих стержней расположены в одной плоскости, которая является главной плоскостью сечений. В этой же плоскости действуют внешние силы, включая и реакции опор.

Плоская система, нагруженная перпендикулярно своей плоскости, называется *плоско-пространственной*.

Для *пространственной* стержневой системы характерно произвольное положение стержней и действие внешних сил.

Часто плоские системы являются частью пространственных систем, из которых они выделяются для упрощения расчета.

Стержневая система должна быть *геометрически неизменяемой*, т.е. перемещения любой ее точки должны быть обусловлены только деформированием этой системы. Если же система получает перемещения как жесткое тело либо допускает взаимное перемещение составляющих её тел (элементов) без деформирования, то такая система является *геометрически изменяемой*. Если стержневая система в пределах малых перемещений геометрически изменяема, а затем становится неизменяемой, то она называется *мгновенно изменяемой*. Применение мгновенно изменяемых систем недопустимо, так как в упругих элементах (стержнях) таких систем возникают очень большие внутренние усилия и напряжения, которые могут привести к разрушению или появлению заметных остаточных деформаций в стержнях.

7.2. Расчет плоских систем

7.2.1. Определение внутренних усилий

Стержневые конструкции для выполнения своих основных функций должны воспринимать действующие нагрузки, включая и реакции связей. Предположим, необходимо силу P , приложенную в некоторой точке, передать на опорную поверхность через ограниченное пространство ABC (рис. 7.1,а).

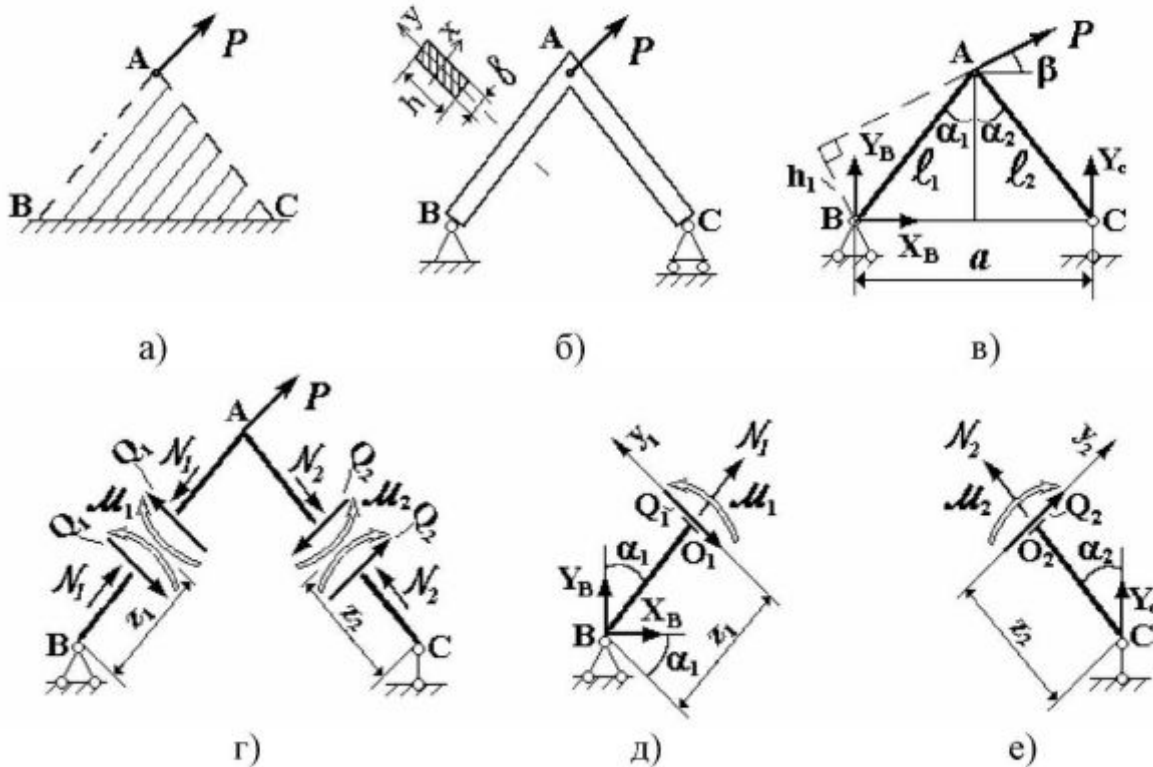


Рис. 7.1

Для передачи нагрузки можно использовать треугольную пластину либо два стержня, например прямоугольного сечения (рис. 7.1,б). Причем для закрепления конструкции используем минимально необходимое число связей, которые не дают перемещаться системе в пространстве, т.е. делают ее геометрически неизменяемой.

Для плоской системы должно быть наложено три связи, например, с использованием неподвижного и подвижного шарниров (рис. 7.1,б,в). При этом стержневая система является *статически определимой*, так как реакции связей могут быть найдены с использованием трех уравнений статики:

$$\begin{aligned}
 \sum M_B = 0; & \quad Y_c a - Ph_1 = 0; & \quad Y_c = Ph_1/a; \\
 \sum F_x = 0; & \quad X_B + P \cos \beta = 0; & \quad X_B = -P \cos \beta; \\
 \sum F_y = 0; & \quad Y_B + Y_c + P \sin \beta = 0; & \quad Y_B = -P (h_1 + a \sin \beta) / a,
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

где $a = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2$; $h_1 = l_1 \cos(\alpha_1 + \beta)$.

После определения реакций могут быть найдены внутренние силовые факторы (усилия) в поперечном сечении любого стержня системы (рис. 7.1,г). Правила знаков для нормальных сил N , поперечных сил Q и изгибающих моментов \mathcal{M} определены в соответствующих разделах («Растяжение» и «Изгиб»). Усилия в первом стержне (рис. 7.1,г,д) определяются с использованием метода сечений:

$$\begin{aligned} \sum F_{z1} = 0; \quad N_1 + X_B \sin \alpha_1 + Y_B \cos \alpha_1 = 0; \quad N_1 = -X_B \sin \alpha_1 - Y_B \cos \alpha_1; \\ \sum F_{y1} = 0; \quad -Q_1 - X_B \cos \alpha_1 + Y_B \sin \alpha_1 = 0; \quad Q_1 = -X_B \cos \alpha_1 + Y_B \sin \alpha_1; \\ \sum M_{O1} = 0; \quad \mathcal{M}_1 + X_B \cos \alpha_1 z_1 - Y_B \sin \alpha_1 z_1 = 0; \quad \mathcal{M}_1 = (-X_B \cos \alpha_1 + Y_B \sin \alpha_1) z_1. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Аналогично находятся усилия в произвольном поперечном сечении второго стержня (рис. 7.1,г,е):

$$\begin{aligned} \sum F_{z2} = 0; \quad N_2 + Y_C \cos \alpha_2 = 0; \quad N_2 = -Y_C \cos \alpha_2; \\ \sum F_{y2} = 0; \quad Q_2 + Y_C \sin \alpha_2 = 0; \quad Q_2 = -Y_C \sin \alpha_2; \\ \sum M_{O2} = 0; \quad -\mathcal{M}_2 + Y_C \sin \alpha_2 z_2 = 0; \quad \mathcal{M}_2 = Y_C z_2 \sin \alpha_2. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Как видим, усилия N и Q по длине стержней не меняются, а изгибающие моменты \mathcal{M} изменяются линейно.

Величина N имеет порядок силы P , а величина изгибающего момента \mathcal{M} имеет порядок величины Pl . Сравним напряжения в прямоугольном сечении стержневой системы от растяжения-сжатия и изгиба:

$$\frac{\sigma_{\max}(\mathcal{M})}{\sigma(N)} = \frac{Pl / W_x}{P / F} = \frac{Fl}{W_x}; \quad \frac{\sigma_{\max}(\mathcal{M})}{\sigma(N)} = \frac{bhl}{bh^2 / 6} = \frac{6l}{h}.$$

Если учесть, что для стержней $l/h > 10$, то напряжения от изгиба более чем в 60 раз превышают напряжения от растяжения-сжатия. Следовательно, стержни конструкции (см. рис. 7.1,б) в основном изгибаются. В этом случае можно пренебречь напряжениями и перемещениями, связанными с растяжением (сжатием) элементов, по сравнению с напряжениями и перемещениями от изгиба. *Стержневые системы, элементы которых главным образом работают на изгиб, называются рамами.*

Таким образом, расчет рам на прочность и жесткость можно проводить так же, как и балок. При этом, кроме нормальных напряжений от растяжения (сжатия) в большинстве случаев пренебрегают и касательными напряжениями при изгибе по той же причине, что и при расчете балок. По-

этому, как правило, нет необходимости в определении усилий N , Q и построении соответствующих эпюр.

На рис. 7.2,а показана эпюра изгибающих моментов M для рамы.

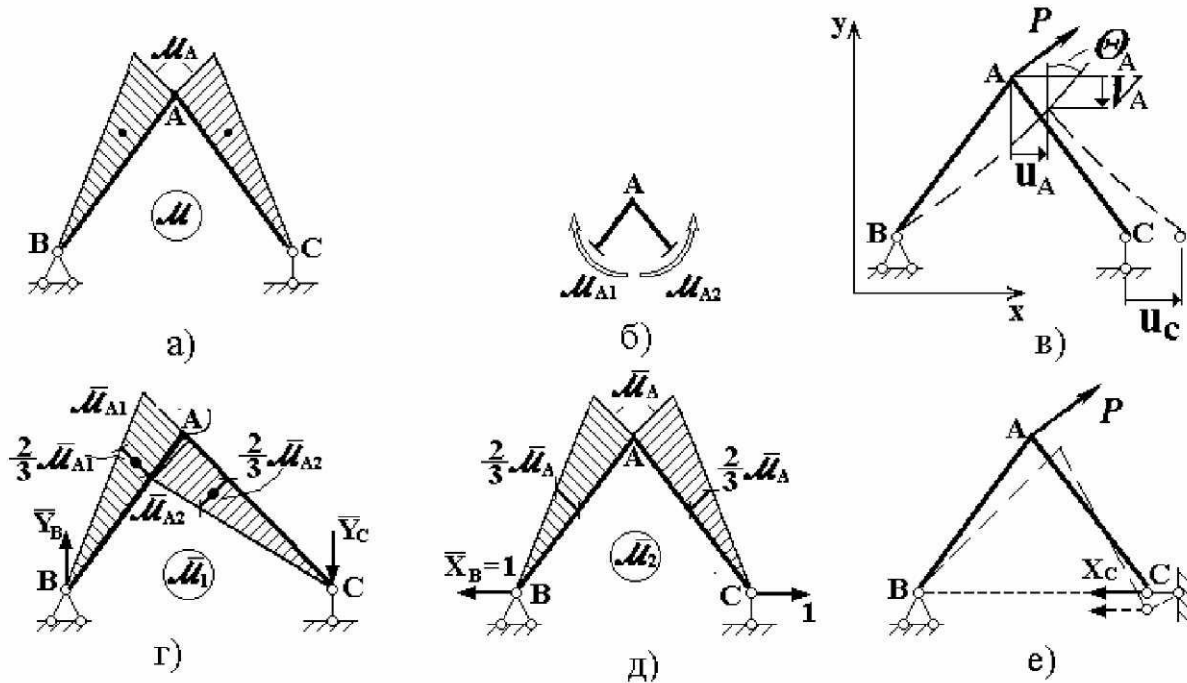


Рис. 7.2

Эпюры моментов строятся на осевых линиях стержней плоской рамы. При этом величина M в сечении откладывается по нормали к оси стержня со стороны сжатых волокон. Эпюра M может быть построена с использованием выражений (7.2), (7.3) для M_1 и M_2 . Либо эта эпюра строится непосредственно, определяя моменты в концевых сечениях стержней рамы с использованием схемы нагружения, показанной на рис. 7.1,в.

Следует отметить, что из условия равновесия узла A рамы справедливо равенство моментов, действующих в концевых сечениях двух стержней, сходящихся в этом узле (рис. 7.2,б):

$$M_{A1} = M_{A2} = M_A = Y_C l_2 \sin \alpha_2. \quad (7.4)$$

Если в каком-то узле рамы приложен внешний момент, то внутренние изгибающие моменты в сечениях стержней возле узла будут отличаться на величину внешнего момента.

В каждом сечении стержней плоской рамы, а значит, и узле рамы, можно определить три перемещения (рис. 7.2,в): два линейных и одно угловое. Иначе говоря, узел плоской рамы имеет *три степени свободы*.

Для определения перемещений сечений стержневой системы удобно использовать метод Максвелла-Мора и способ Верещагина. Например, для определения угла поворота (θ_A) узла A и горизонтального перемещения (u_C) сечения C необходимо рассмотреть единичные состояния системы, приложив соответствующие единичные нагрузки, построить единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 (рис. 7.2,г,д) и умножить грузовую эпюру M (см. рис. 7.2,а) на эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 . В результате получим:

$$\theta_A = \frac{1}{EJ_x} \left(\left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_{A1} l_1 \right) \frac{2}{3} \bar{M}_{A1} - \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_{A2} l_2 \right) \frac{2}{3} \bar{M}_{A2} \right) = \frac{\mathcal{M}_A}{3EJ_x} (\bar{M}_{A1} l_1 - \bar{M}_{A2} l_2);$$

$$u_C = \frac{1}{EJ_x} \left(\left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_{A1} l_1 \right) \frac{2}{3} \bar{M}_A + \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_{A2} l_2 \right) \frac{2}{3} \bar{M}_A \right) = \frac{\mathcal{M}_A \bar{M}_A}{3EJ_x} (l_1 + l_2);$$

$$\bar{M}_{A1} = \bar{Y}_B l_1 \sin \alpha_1; \quad \bar{M}_{A2} = \bar{Y}_C l_2 \sin \alpha_2; \quad \bar{Y}_B = \bar{Y}_C = 1/(l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2);$$

$$\bar{M}_A = l_1 \cos \alpha_1 = l_2 \cos \alpha_2; \quad \mathcal{M}_A = Y_C l_2 \sin \alpha_2.$$

Следует отметить, что не всегда три связи обеспечивают геометрическую неизменяемость плоской системы. На рис. 7.2,е представлена та же рама с тремя связями, но она является мгновенно изменяемой системой. Реакция горизонтальной связи X_C не уравнивает момент, создаваемый силой P относительно узла B . Рама должна немного повернуться относительно шарнира B как жесткое целое, после чего она станет геометрически неизменяемой системой. При этом реакция в подвижном шарнире C изменит направление и сможет уравновесить момент, создаваемый силой P . Однако, величина реакции X_C будет очень большой из-за малости "плеча" реакции. Как следствие, в значительной степени возрастают изгибающие моменты и напряжения в стержнях, что может привести к потере несущей способности рамы.

Статически определимые системы имеют минимально необходимое число внешних и внутренних связей. Три внешние связи (например, заделка или неподвижный и подвижный шарниры) препятствуют перемещению рамы как жесткого целого. По три внутренние связи в любом сечении рамы препятствуют взаимному перемещению одной части рамы относительно другой. Удаление хотя бы одной внешней или внутренней связи превращает систему в геометрически изменяемую. Например, удалив одну внутреннюю связь (врезав шарнир) в узле плоской рамы, получаем изменяемую систему (рис. 7.3,а).

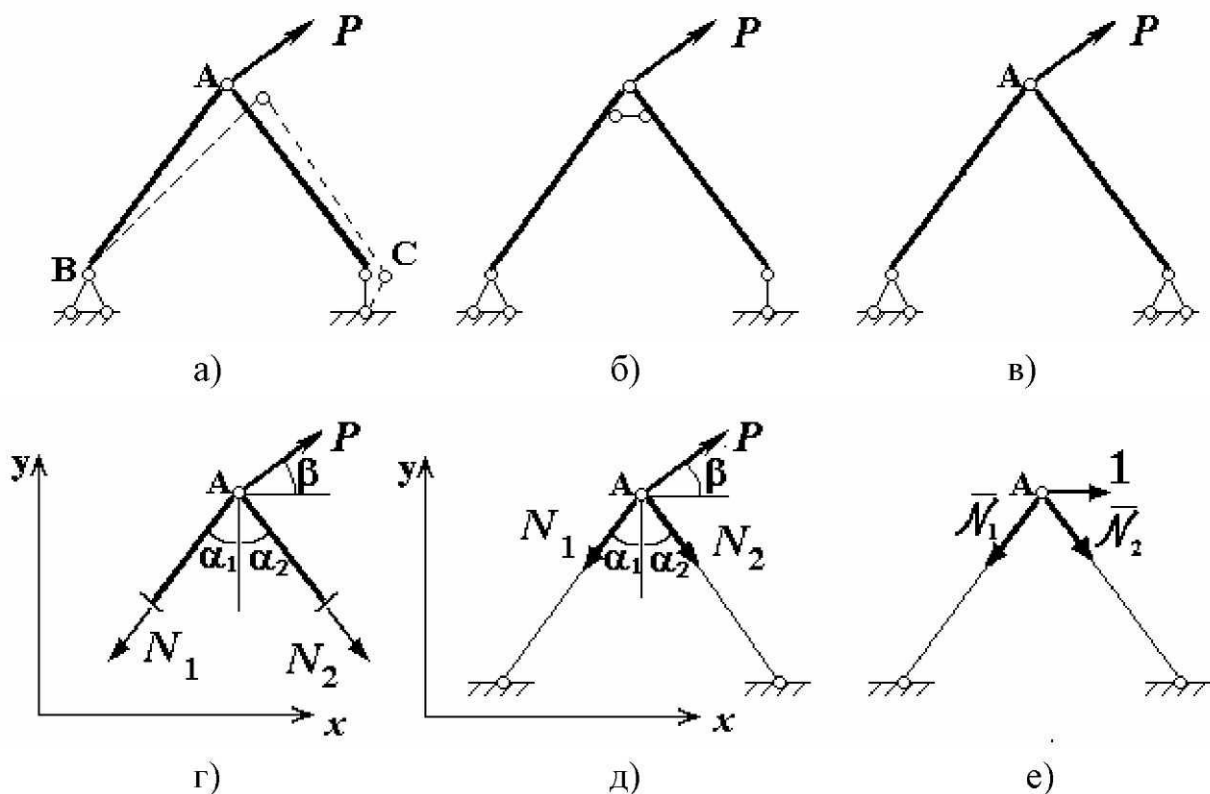


Рис. 7.3

Для восстановления геометрической неизменяемости можно ввести связь, как показано на рис. 7.3,б. Это дает наглядное представление о «жестком» узле рамы. Если же элементы соединены шарнирно, то для неизменяемости плоской стержневой системы необходимо ввести дополнительную (четвертую) внешнюю связь (рис. 7.3,в). В этом случае получаем простейшую ферменную (шарнирно-стержневую) систему. Из-за наличия шарниров по концам стержня в этой системе только растягиваются или сжимаются. *Стержневые системы, элементы которых в основном испытывают деформацию растяжения или сжатия, называются фермами.*

Система, показанная на рис. 7.3,а, становится геометрически неизменяемой, если добавить третий стержень (рис. 7.4,а). В этом случае получаем простую статически определимую ферму. Система, представленная на рис. 7.3,в, является простейшим примером неизменяемой системы, потому что даже малое перемещение узла невозможно без деформации стержней. Отсюда получаем такое правило, что всякий новый узел, добавленный в процессе образования геометрически неизменяемой фермы, может быть присоединен при помощи двух стержней, оси которых не лежат на одной прямой (рис. 7.4,б,в).

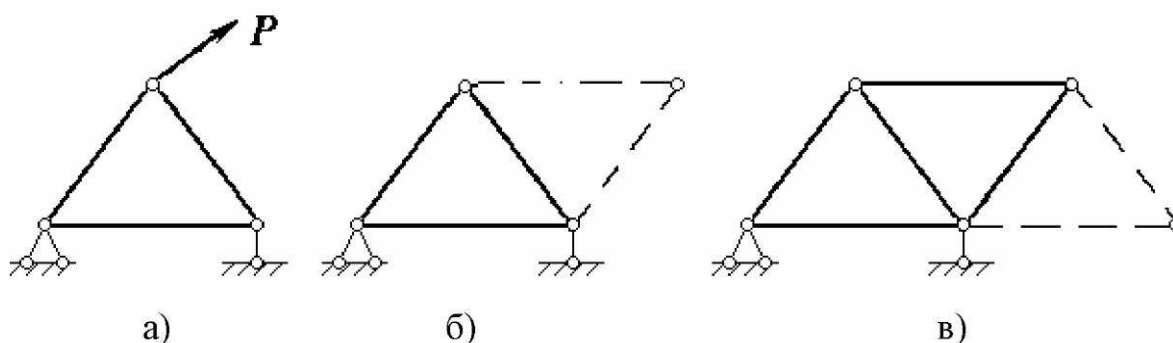


Рис. 7.4

Шарнирно-стержневые системы (фермы) могут быть нагружены только силами, приложенными в узлах. Для определения усилий в системе можно использовать два способа.

В первом способе можно применить *метод сечений*. Разрезаются стержни-связи, и одна часть системы с закрепленными шарнирами отбрасывается. В сечениях стержней действие отброшенных частей заменяется усилиями N_1 и N_2 (рис. 7.3,г). Уравновешивая оставшуюся часть, определяют усилия N_1 и N_2 . Для этого составляют два уравнения равновесия для системы сходящихся сил.

По второму способу усилия N_1 и N_2 по линии действия переносятся к узлу А (рис. 7.3,д). Тем самым производится преобразование усилий в реакции упругих связей, действующих на узел А. Обратим внимание, что реакции, направленные от узла, соответствуют растягивающим усилиям в стержнях (см. рис. 7.3,г,д). Реакции N_1 и N_2 , (усилия в стержнях) опять-таки могут быть определены из уравнений равновесия узла:

$$\Sigma F_x = 0; \quad -N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 + P \cos \alpha = 0; \quad N_1 = \frac{\cos(\alpha_2 - \beta)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} P; \quad (7.6)$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad -N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 + P \sin \alpha = 0; \quad N_2 = -\frac{\cos(\alpha_1 + \beta)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} P.$$

При $N_i > 0$ стержень растягивается, а при $N_i < 0$ – сжимается.

Выражения для N_1 и N_2 проще получить, проектируя силы на оси, перпендикулярные осям стержней.

7.2.2. Расчет на прочность

Элементы шарнирно-стержневой системы (фермы) работают на растяжение или сжатие. Поэтому расчет на прочность таких систем проводится таким же образом, как и ступенчатого стержня (см. раздел 3.5). Для ка-

ждого стержня определяют нормальные напряжения, из которых выбирают наибольшие напряжения σ_{max} (по абсолютной величине):

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sigma_{max} = \left(\frac{N_i}{F_i} \right)_{max}, \quad (7.7)$$

где m – количество стержней в системе.

Если ферма выполнена из пластичного материала, то условие прочности применяется в виде:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]; \quad (7.8)$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} \quad \text{или} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{0,2}}{n_T}.$$

Для фермы, выполненной из хрупкого материала, условие прочности следует записать в таком виде:

$$\begin{cases} \sigma_{max}^p \leq [\sigma]_p, \\ \sigma_{max}^c \leq [\sigma]_c, \end{cases} \quad [\sigma]_p = \frac{\sigma_{вр}}{n_6}, \quad [\sigma]_c = \frac{\sigma_{вс}}{n_6}, \quad (7.9)$$

где максимальные растягивающие напряжения σ_{max}^p и сжимающие напряжения σ_{max}^c определяются с использованием формул (7.7) для соответствующих стержней.

При расчете на прочность рамы, как отмечалось выше, можно учитывать только напряжения от изгиба. Поэтому условие прочности для рамы записывается в таком же виде, что и для балки (6.12):

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}; \quad (7.10)$$

$$\sigma_{max} = \left(\frac{M_i}{W_{xi}} \right)_{max}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Здесь учтено, что стержни могут быть различного сечения, и следует выбирать наибольшее значение нормальных напряжений в зависимости не только от изгибающего момента M , но и от момента сопротивления сечения W_x на отдельных участках рамы.

7.2.3. Определение перемещений

Для определения перемещений в плоских стержневых системах рационально использовать метод единичной нагрузки и интеграл Мора (6.23). Расчетная формула для искомого перемещения в ферме или раме учитывает вклад различных внутренних усилий в стержнях.

Для определения перемещений узлов шарнирно-стержневой системы интеграл Мора с учетом постоянства линейной деформаций по длине каждого стержня ($\varepsilon = \varepsilon_i$) преобразуется в сумму:

$$\delta = \int_l \bar{N} \varepsilon ds = \sum_{i=1}^m \bar{N}_i \Delta l_i, \quad (7.11)$$

где δ – искомое перемещение (линейное перемещение узла или угол поворота жесткого тела); \bar{N}_i – нормальная сила в i -ом стержне в единичном состоянии; Δl_i – изменение длины i -го стержня в грузовом состоянии; m – число стержней.

Используя закон Гука для стержня в форме (3.22), учитывающей силовое, температурное и кинематическое (за счет возможных отклонений длин от номинальных размеров) воздействия на стержень, формулу (7.11) запишем в виде:

$$\delta = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{N}_i N_i l_i}{E_i F_i} + \sum_{i=1}^m \bar{N}_i \alpha_{Ti} \Delta T_i l_i + \sum_{i=1}^m \bar{N}_i \Delta_{oi}. \quad (7.12)$$

Отметим, что в ферменных системах шарнирные узлы имеют только линейные перемещения или две степени свободы. Например, для определения горизонтального перемещения u_A узла A (см. рис. 7.3,д) необходимо выполнить следующее:

- 1) определить усилия N_1 и N_2 в грузовом состоянии по формулам (7.6);
- 2) снять заданную нагрузку и в узле A горизонтально приложить единичную силу (рис. 7.3,е), от которой найти усилия \bar{N}_1 и \bar{N}_2 в единичном состоянии (также эти усилия можно определить из формул (7.6) при $\bar{P} = 1$ и $\beta = 0$);
- 3) найти искомое перемещение, используя первую сумму в формуле (7.12):

$$u_A = \frac{\bar{N}_1 N_1 l_1}{E_1 F_1} + \frac{\bar{N}_2 N_2 l_2}{E_2 F_2}.$$

Если стержни системы только нагреваются ($\Delta T_i > 0$) или охлаждаются ($\Delta T_i < 0$), то для определения перемещения узла используется вторая сумма в формуле (7.12). Если стержни имеют отклонения от номинальных размеров ($\Delta_{oi} > 0$ или $\Delta_{oi} < 0$), то для определения перемещения узла после сборки относительно своего номинального положения используется третья сумма в формуле (7.12). Отметим, что *при изменении температуры и от-*

клонении от номинальных размеров в стержнях статически определимой системы усилия не возникают.

При определении перемещений в заданном направлении для произвольной рамы применяется модифицированная формула (6.24) вида:

$$\delta_K^{(j)} = \sum_{i=1}^m \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}_i M_i ds}{(EJ_x)_i}, \quad (7.13)$$

где $\delta_K^{(j)}$ – искомое перемещение сечения K в j -ом направлении (линейное или угловое перемещение сечения); M, \overline{M} – изгибающие моменты в i -ом стержне для грузового и единичного состояний рамы; l_i, EJ_{xi} – длина и изгибная жесткость i -ого стержня.

Для рамы, состоящей из прямолинейных стержней (участков), при вычислении перемещения удобно воспользоваться *способом Верещагина* с использованием формулы:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \eta_i}{EJ_{xi}}, \quad (7.14)$$

где n – число простых фигур, на которые разбивается грузовая эпюра рамы.

7.3. Моделирование связей

Если жесткость прикрепляемого объекта намного выше, чем жесткость связей, то этот объект моделируется как «абсолютно жесткое тело». Для закрепления материальной точки (узла) с двумя степенями свободы необходимы два стержня-связи (см. рис. 7.3,в). Для закрепления абсолютно жесткого тела с тремя степенями свободы необходимы три стержня-связи (рис. 7.5,а). При определении трех реакций в этих связях используются три уравнения статики.

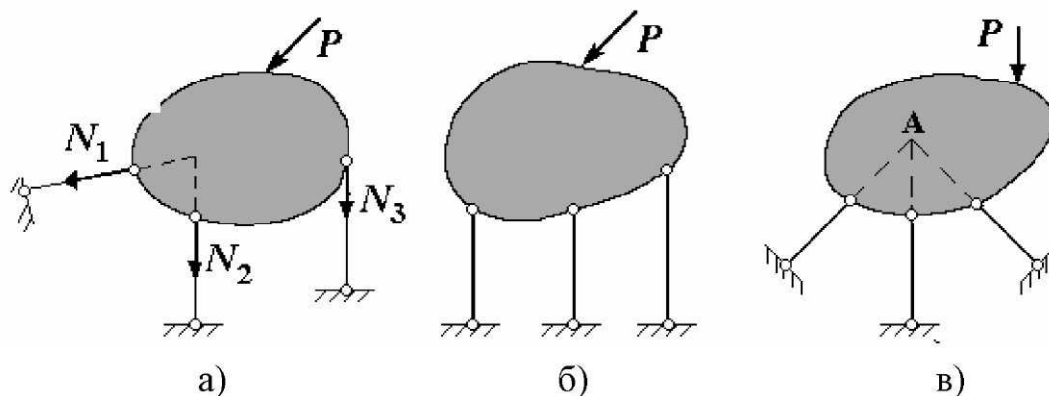


Рис. 7.5

Если реакции связей не уравновешивают нагрузку, то система геомет-

рически изменяема. Например, в системе, изображенной на рис. 7.5,б, не уравновешена горизонтальная составляющая нагрузки, а в системе, изображенной на рис. 7.5,в, не уравновешен момент от силы P относительно точки A (точки пересечения осей всех стержней). Точнее говоря, указанные системы являются мгновенно изменяемыми.

На рис. 7.6 показаны различные варианты статически определимого закрепления абсолютно жесткого тела с помощью упругих связей-стержней и жестких связей.

На рис. 7.6,а,б,в у абсолютно жесткого тела исключаются по одной степени свободы, а в системах на рис. 7.6,г,д,е – по две степени свободы.

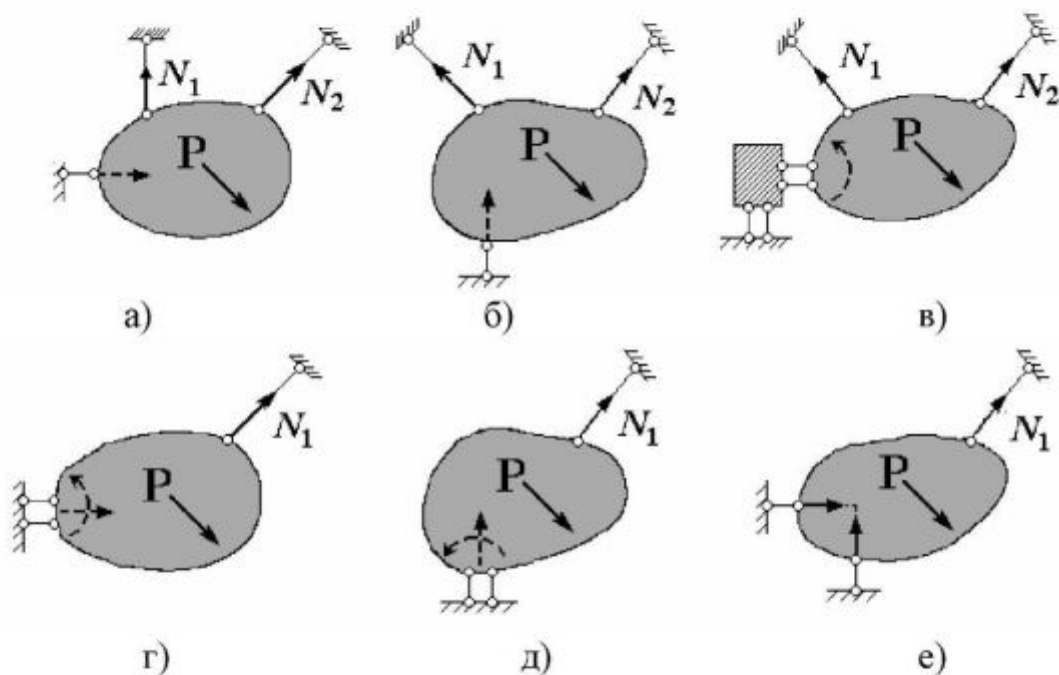


Рис. 7.6

В расчетах стержневых систем используются нормальные силы N_i в стержнях. Поэтому при определении этих усилий рационально составлять такие уравнения равновесия, чтобы в них не входили реакции жестких связей.

Не рекомендуется применять стержневую систему, показанную на рис. 7.7,а, при углах α , близких 90° .

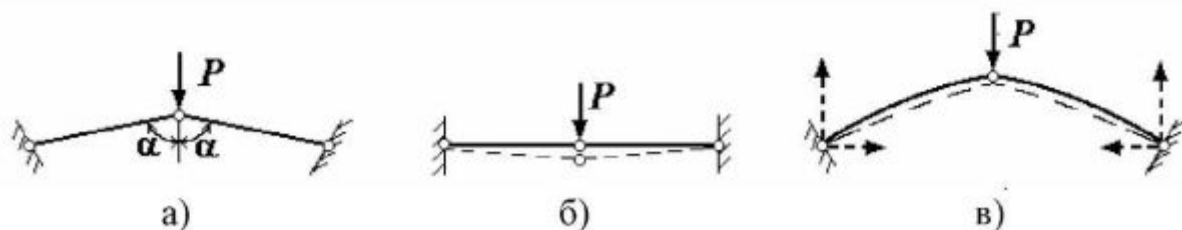


Рис. 7.7

В этом случае усилия в стержнях, даже при малом значении силы P , могут достигать недопустимо большой величины (при $\alpha = 90^\circ$ система превращается в мгновенно изменяемую (рис. 7.7,б)). Такую стержневую систему более рационально проектировать в виде *арки* с криволинейными стержнями (рис. 7.7,в). В этих конструкциях существенное значение имеет как изгиб, так и сжатие стержневых элементов. Горизонтальные (распорные) реакции увеличивают сжатие элементов, но при этом существенно уменьшают изгибающие моменты.

Конструкцию, показанную на рис. 7.8,а, можно моделировать в виде *комбинированной системы* (рис. 7.8,б). Элементы комбинированной стержневой системы испытывают различные виды деформаций. Балка изгибается, а пружины моделируются стержнями-связями, которые растягиваются или сжимаются. Моделирование пружин стержнями осуществляется на основе равенства их жесткостей.

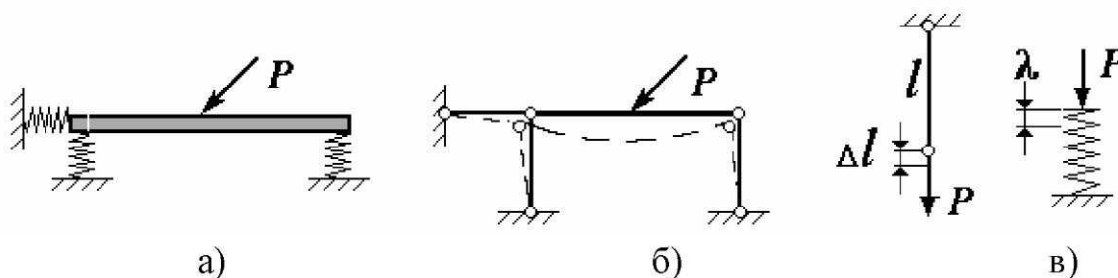


Рис. 7.8

Пружина и стержень эквивалентны по своим упругим характеристикам, если при одинаковой осевой нагрузке (рис. 7.8,в) изменение длины стержня Δl равно изменению длины пружины λ . С учетом того, что

$$\lambda = P/c, \quad \Delta l = P/EF, \quad \Delta l = \lambda,$$

получим:

$$\frac{1}{c} = \frac{l}{EF} \rightarrow c = \frac{EF}{l},$$

где c – коэффициент жесткости пружины или стержня-связи.

Величина, обратная коэффициенту жесткости, называется *коэффициентом податливости* ($1/EF$). Зная коэффициент жесткости пружины, всегда можно подобрать эквивалентный по жесткости стержень, и наоборот.

8. Сложное сопротивление бруса

Ранее рассматривались простейшие виды деформации бруса, при которых от действия определённой нагрузки в поперечных сечениях бруса возникали отдельные внутренние силовые факторы: N при растяжении или сжатии, M_k при кручении, M и Q при прямом изгибе. Однако в других случаях нагружения в поперечных сечениях бруса может возникать несколько внутренних силовых факторов, в общем случае – все шесть внутренних силовых факторов. Такая сложная деформация бруса называется *сложным сопротивлением*. Используя принцип суперпозиции, сложное сопротивление бруса может быть представлено как сумма простых видов деформации. Особо оговаривается лишь случай бруса относительно большой жёсткости при действии сжимающей силы, чтобы исключить возможность потери устойчивости бруса (см. часть 2 учебного пособия). Чаще всего рассматривают такие специальные случаи сложного сопротивления бруса: косою изгиб, косою изгиб с растяжением (сжатием), внецентренное растяжение (сжатие), изгиб с кручением.

8.1. Косою изгиб

Косою изгиб – это сложная деформация бруса, возникающая при действии поперечной нагрузки в плоскости, проходящей через ось бруса, но не совпадающей ни с одной из главных плоскостей бруса.

Плоскость действия нагрузки называется *силовой плоскостью*. *Главной плоскостью* называется плоскость, в которой расположены соответствующие главные оси инерции всех поперечных сечений бруса. В общем случае таких плоскостей две. Например, для призматического консольного бруса (рис. 8.1,а) – вертикальная (Oyz) и горизонтальная (Oxz) плоскости.

Примечание. Исключение составляет брус, имеющий сечение в виде круга, кольца или правильного многоугольника. Для такого бруса никогда не будет косою изгиба.

Рассмотрим особенности косою изгиба на примере консольной призматической балки, нагруженной силой P в торцевом сечении под углом α к плоскости Oyz (см. рис. 8.1,а). Разложим силу P на составляющие P_x и P_y по осям:

$$P_x = P \sin \alpha; \quad P_y = P \cos \alpha. \quad (8.1)$$

Каждая из этих сил действует в одной из главных плоскостей балки и вызывает прямой изгиб. Используя принцип суперпозиции, представим косою изгиб как сумму двух прямых изгибов.

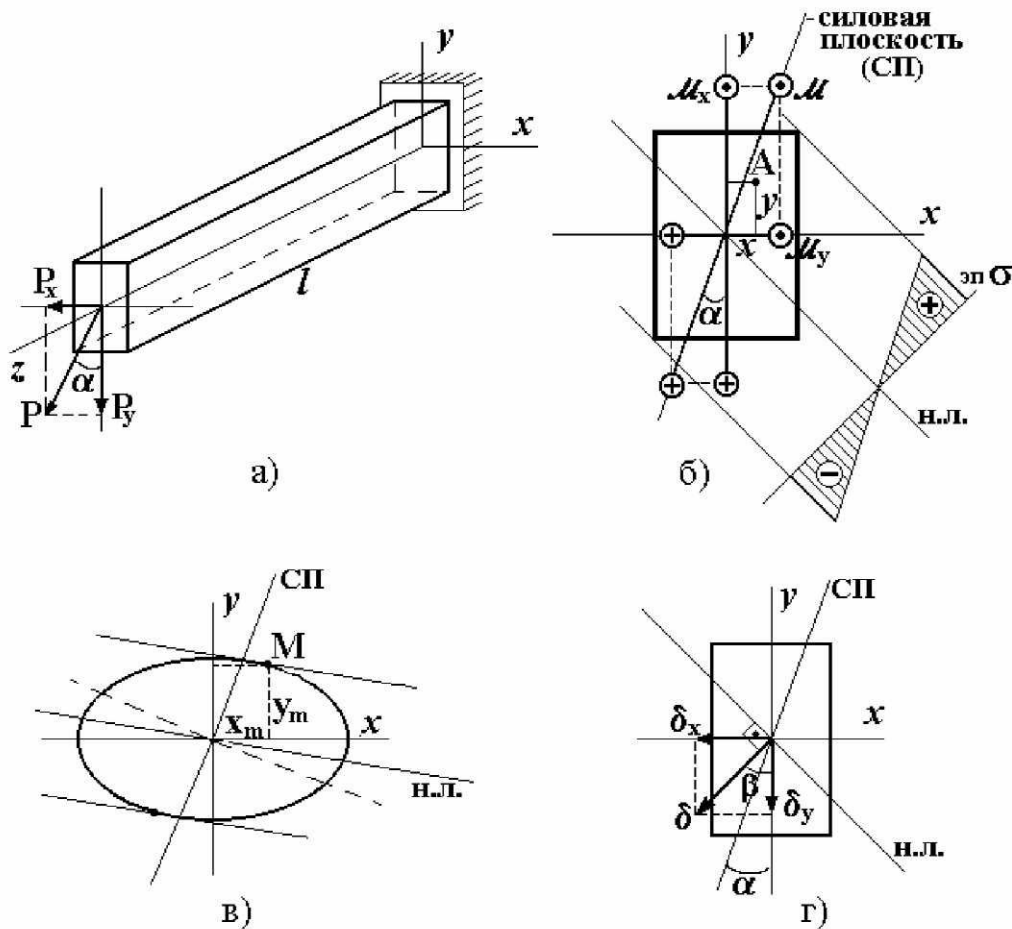


Рис. 8.1

Напряжения при косом изгибе. Опасное сечение – вблизи заделки, где расчётные значения изгибающих моментов от сил P_x и P_y равны:

$$M_x = P_y l = Pl \cos \alpha = M \cos \alpha, \quad M_y = P_x l = Pl \sin \alpha = M \sin \alpha, \quad M = Pl. \quad (8.2)$$

Запишем выражения для нормальных напряжений в произвольной точке $A(x, y)$ сечения балки (рис. 8.1, б), рассматривая их как сумму напряжений для каждого прямого изгиба (см. формулу (6.7)):

$$\sigma(x, y) = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x. \quad (8.3)$$

Для вычисления максимальных напряжений необходимо знать положение нейтральной линии сечения. Согласно определению нейтральная линия представляет геометрическое место точек, где нормальные напряжения равны нулю:

$$\sigma(x, y) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0.$$

Откуда, учитывая соотношения (8.2), получаем *уравнение нейтральной линии* при косом изгибе:

$$y = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} x \quad \text{или} \quad y = -\left(\frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha\right) x. \quad (8.4)$$

Нейтральная линия проходит через центр сечения и квадранты, смежные с теми, где расположена линия *силовой плоскости* (рис. 8.1,б). Из условия $J_x \neq J_y$ следует, что *нейтральная линия не перпендикулярна силовой плоскости*. При этом нейтральная линия повернута от направления, перпендикулярного силовой плоскости, в сторону главной оси минимального момента инерции. Соответственно, при $J_x = J_y$ невозможен кривой изгиб, так как все центральные оси сечения являются главными (всегда имеет место прямой изгиб).

Зная положение нейтральной линии, можно построить эпюру нормальных напряжений в сечении (*эн.σ* на рис. 8.1,б). Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удалённых от нейтральной линии (x_m, y_m – координаты такой опасной точки):

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{J_x} y_m + \frac{M_y}{J_y} x_m. \quad (8.5)$$

Для сечения произвольной формы координаты x_m, y_m обычно определяются графическим образом для точек касания контура сечения линиями, параллельными нейтральной линии (рис. 8.1,в). Для сечений, имеющих наружные угловые точки и две плоскости симметрии (прямоугольник, двутавр и т.д.), $x_m = x_{max}, y_m = y_{max}$. Тогда максимальные напряжения определяются согласно формулам (8.5) и (6.8) наиболее просто, используя моменты сопротивления сечения относительно осей x, y ($W_x = J_x/y_{max}, W_y = J_y/x_{max}$):

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}. \quad (8.6)$$

Из формулы (8.6) видно, что при кривом изгибе могут значительно увеличиваться нормальные напряжения в балках, имеющих сечения с существенно различными моментами сопротивления (например, двутавр или швеллер, для которых $W_x \gg W_y$).

Касательные напряжения при кривом изгибе играют такую же второстепенную роль, как и при прямом изгибе. При кривом изгибе величина полных касательных напряжений в определённой точке сечения находится как геометрическая сумма компонент τ_x и τ_y :

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} .$$

Напряжения τ_x и τ_y вычисляются по формуле (6.11) для каждого прямого изгиба с использованием соответствующих значений поперечных сил Q_x и Q_y .

Перемещения при косом изгибе балки. При определении перемещений также применяется принцип суперпозиции. Например, компоненты δ_x и δ_y линейного перемещения центра сечения балки в главных плоскостях вычисляются с использованием какого-нибудь метода, а полное перемещение δ определяется как геометрическая сумма этих компонент (рис. 8.1,г). Значение и направление полного перемещения определяют по формулам:

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\delta_x}{\delta_y}, \quad (8.7)$$

где β – угол между вектором $\bar{\delta}$ и осью Oy .

При косом изгибе $\beta \neq \alpha$, а вектор $\bar{\delta}$ полного перемещения перпендикулярен нейтральной линии (см. рис. 8.1,г). Таким образом, *при косом изгибе плоскость изгиба бруса (балки) всегда не совпадает с плоскостью действия нагрузки.*

8.2. Косой изгиб с растяжением (сжатием)

В этом случае имеет место сложная деформация бруса, включающая два прямых изгиба и осевое растяжение или сжатие (рис. 8.2,а). Кроме изгибающих моментов (M_x и M_y), определяемых для опасного сечения по формулам (8.2), учитывается и нормальная сила $N = \pm P_0$ (знак «+» соответствует растягивающей силе P_0 , знак «-» – сжимающей силе). Используя принцип суперпозиции, по аналогии с выражением (8.3) суммарные напряжения записываются следующим образом:

$$\sigma(x, y) = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x . \quad (8.8)$$

Уравнение нейтральной линии в сечении из условия $\sigma(x, y) = 0$ принимает вид:

$$y = ax + b, \quad a = - \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y}, \quad b = - \frac{N \cdot J_x}{M_x \cdot F} . \quad (8.9)$$

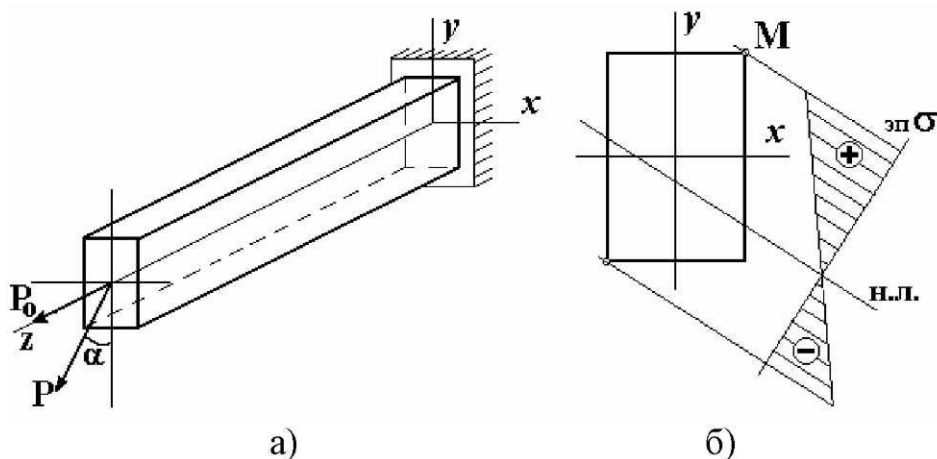


Рис. 8.2

Таким образом, нейтральная линия не проходит через начало координат в сечении. Как следствие, наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения получают различной величины для любого сечения. Эпюра нормальных напряжений в сечении (*эп.σ*) показана на рис. 8.2,б. Максимальные напряжения определяются для точки, наиболее удалённой от нейтральной линии (т.М на рис. 8.2,б с координатами x_m, y_m):

$$\sigma_{max} = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y_m + \frac{M_y}{J_y} x_m . \quad (8.10)$$

8.3. Внецентренное растяжение (сжатие)

Внецентренным растяжением (сжатием) называется сложная деформация бруса, возникающая при действии двух равных и противоположно направленных сил по линии, параллельной оси бруса и не совпадающей с ней (рис. 8.3,а).

В любом поперечном сечении бруса возникают следующие внутренние силовые факторы (рис. 8.3,б):

$$N = P; \quad M_x = P \cdot y_p; \quad M_y = P \cdot x_p , \quad (8.11)$$

где x_p, y_p – координаты точки приложения силы P в торцевом сечении.

(На рис. 8.3,б изображение нормальной силы N соответствует внецентренному растяжению.) Расстояние от точки приложения силы до центра сечения называется *эксцентриситетом*.

Таким образом, внецентренное растяжение (сжатие) можно рассматривать как частный случай совместной деформации косоугольного изгиба и осевого растяжения (сжатия).

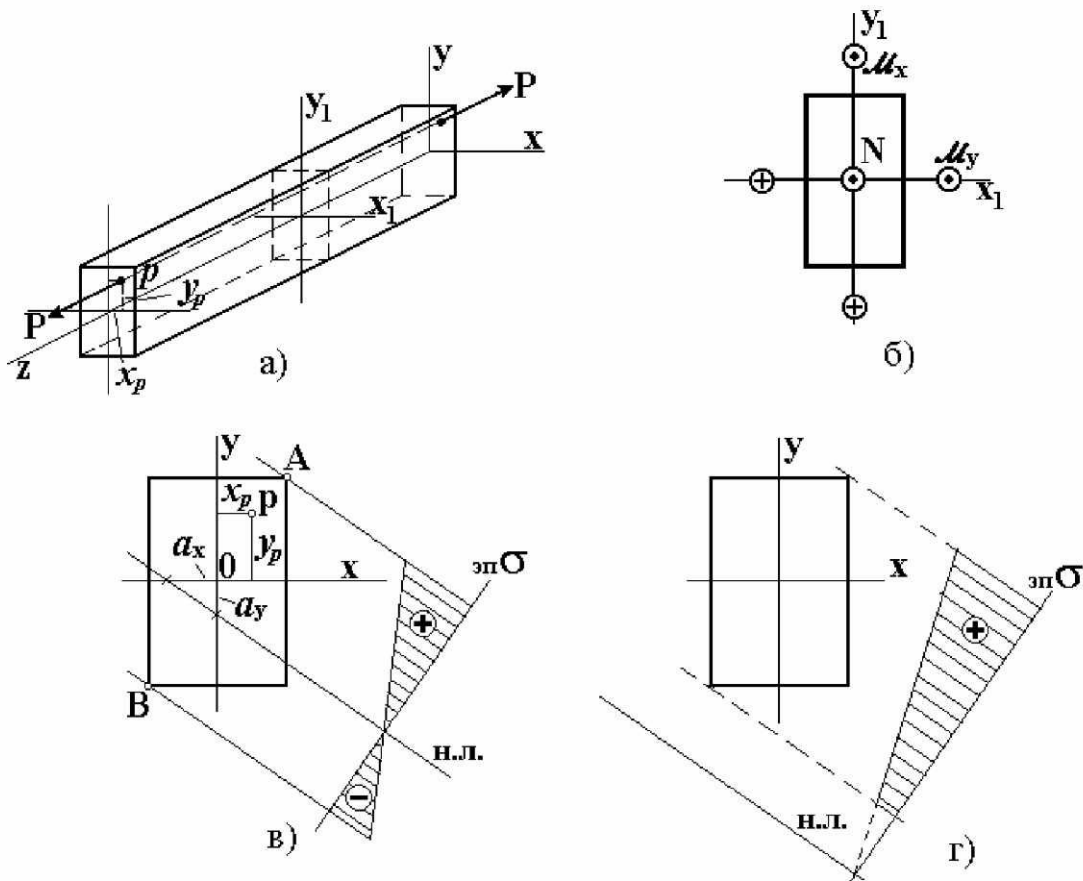


Рис. 8.3

Подставляя формулы (8.11) в (8.8), получим выражение для нормальных напряжений в произвольной точке сечения:

$$\sigma(x, y) = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_p}{J_x} y + \frac{P \cdot x_p}{J_y} x = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p y}{i_x^2} + \frac{x_p x}{i_y^2} \right), \quad (8.12)$$

где $i_x = \sqrt{J_x/F}$; $i_y = \sqrt{J_y/F}$ – радиусы инерции сечения относительно главных осей.

При *внецентренном сжатии* первое слагаемое в выражении (8.12) подставляется со знаком минус, так как $N = -P$.

Положение нейтральной линии определяется из условия $\sigma(x, y) = 0$. Тогда из выражения (8.12) получаем *уравнение нейтральной линии*:

$$1 + \frac{y_p y}{i_x^2} + \frac{x_p x}{i_y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{y}{a_y} + \frac{x}{a_x} = 1, \quad (8.13)$$

где $a_x = -\frac{i_y^2}{x_p}$; $a_y = -\frac{i_x^2}{y_p}$.

Нейтральная линия в сечении не проходит через начало координат

(центр сечения). Для её построения удобно использовать отрезки a_x и a_y , отсекаемые нейтральной линией на координатных осях (рис. 8.3,в). Если $x_p > 0, y_p > 0$, то отрезки $a_x < 0, a_y < 0$, т.е. нейтральная линия расположена по другую сторону от центра сечения, чем точка приложения силы P (полнос p). Эпюра нормальных напряжений в сечении (*эн.σ*) показана на рис. 8.3,в. Чем ближе сила P к оси бруса, тем дальше уходит нейтральная линия от центра сечения. При некотором положении силы P нейтральная линия может быть расположена вне сечения (рис. 8.3,г); тогда во всех точках сечения возникают напряжения одного знака.

Как обычно, опасной является точка, наиболее удалённая от нейтральной линии. С учетом её координат (x_m, y_m) , определяются максимальные напряжения из формулы (8.12):

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_p}{J_x} y_m + \frac{P \cdot x_p}{J_y} x_m . \quad (8.14)$$

Для сечения с выступающими угловыми точками формула (8.14) упрощается:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_p}{W_x} + \frac{P \cdot x_p}{W_y} . \quad (8.15)$$

Для бруса из материала, по-разному сопротивляющегося растяжению и сжатию, следует определять максимальные растягивающие и сжимающие напряжения (например, в т.А и т.В сечения на рис. 8.3,в):

$$\begin{aligned} \sigma_{max}^p = \sigma_A &= \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_p}{W_x} + \frac{P \cdot x_p}{W_y} ; \\ \sigma_{max}^c = |\sigma_B| &= \left| \frac{P}{F} - \frac{P \cdot y_p}{W_x} - \frac{P \cdot x_p}{W_y} \right| . \end{aligned} \quad (8.16)$$

Отметим практические случаи возникновения внецентренного растяжения (или сжатия) бруса:

- 1) конструктивные элементы с эксцентрично приложенной нагрузкой;
- 2) конструктивные элементы с односторонними вырезами при осевой нагрузке;
- 3) стержни с начальным прогибом.

Во всех случаях необходимо проводить расчёты на прочность с учетом выражений (8.14) - (8.16), так как напряжения при внецентренном растяжении (сжатии) всегда больше, чем при чисто осевой деформации за счёт дополнительной деформации изгиба. Особенно это касается элемен-

тов конструкций из хрупких материалов (бетона, кирпича), для которых недопустимы растягивающие напряжения из-за низкой прочности таких материалов при растяжении.

8.4. Расчёт на прочность при сложном сопротивлении бруса

Расчёт на прочность для рассмотренных случаев сложного сопротивления бруса проводится так же, как и при прямом изгибе балки (см. формулы (6.12) и (6.14) раздела 6.5). Основными являются нормальные напряжения, для которых и записывается условие прочности.

Для бруса из пластичного материала (как правило, $\sigma_{Tp} \approx \sigma_{Tc}$) условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad (8.17)$$

где максимальные напряжения σ_{max} для бруса определяются по формулам (8.5), (8.6), (8.10), (8.14), (8.15).

Для бруса из хрупкого материала, по-разному сопротивляющегося растяжению и сжатию, записываются два условия прочности:

$$\begin{cases} \sigma_{max}^p \leq [\sigma]_p \\ \sigma_{max}^c \leq [\sigma]_c \end{cases}, \quad \text{где } [\sigma]_p = \frac{\sigma_{\epsilon p}}{n_{\epsilon}}; \quad [\sigma]_c = \frac{\sigma_{\epsilon c}}{n_{\epsilon}}. \quad (8.18)$$

При этом, используя вышеуказанные формулы для σ_{max} , необходимо отдельно определять максимальные растягивающие и сжимающие напряжения. Условия прочности (8.18) часто используются в расчётах элементов строительных сооружений (колонн, стен и др.) при их внецентренном сжатии.

Список литературы

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
2. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1998. – 367 с.
3. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1979. – 696 с.
4. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
5. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. – М.: Мир, 1976. – 669 с.

**Вывод основных зависимостей
при растяжении, кручении и изгибе стержня**

При изучении отдельных видов деформации (нагружения) стержня в соответствующих разделах подробно рассматривалось получение основных зависимостей и их преобразования. В таблице, приведенной ниже, эти выводы указаны в сжатом виде.

<i>Вид нагружения</i>	<i>Растяжение</i>	<i>Кручение</i>	<i>Изгиб</i>	<i>№ ур-я</i>
Кинематические зависимости	$\varepsilon = \frac{dw}{dz}$	$\gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho$	$\varepsilon = \frac{d\theta}{dz} y$	(1)
Физические зависимости	$\sigma = E\varepsilon$	$\tau = G\gamma$	$\sigma = E\varepsilon$	(2)
Статические зависимости	$N = \int_F \sigma dF$	$M_{\kappa} = \int_F \rho \tau dF$	$M = \int_F y \sigma dF$	(3)
(1) → (2)	$\sigma = E \frac{dw}{dz}$	$\tau = G \frac{d\varphi}{dz} \rho$	$\sigma = E \frac{d\theta}{dz} y$	(4)
(4) → (3) Дифференциальные уравнения	$\frac{dw}{dz} = \frac{N}{EF}$	$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{\kappa}}{GJ_p}$	$\frac{d\theta}{dz} = \frac{M}{EJ_x}$	(5)
(5) → (4) Напряжения в сечении	$\sigma = \frac{N}{F}$	$\tau = \frac{M_{\kappa}}{J_p} \rho$	$\sigma = \frac{M}{J_x} y$	(6)
Максимальные напряжения в сечении	$\sigma = \frac{N}{F}$	$\tau_{max} = \frac{M_{\kappa}}{W_p}$ $W_p = J_p / \rho_{max}$	$\sigma_{max} = \frac{M}{W_x}$ $W_x = J_x / y_{max}$	(7)

Следует обратить внимание на единообразие получения и преобразования зависимостей при различных видах деформации бруса, а также на полную аналогию зависимостей при кручении и изгибе.

Основные расчетные формулы

Растяжение и сжатие

№	Смысл зависимости	Формула	Примечания
1	Определение внутренних сил по методу сечений	$\sum F_z = 0 \Rightarrow N$ $N = \sum P_i$	N – нормальная (продольная) сила P_i – внешние силы
2	Напряжения в поперечном сечении стержня	$\sigma = \frac{N}{F}$	σ – нормальные напряжения F – площадь поперечного сечения
3	Напряжения в наклонном сечении стержня	$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha$ $\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha$	σ – нормальные напряжения в поперечном сечении; α – угол между поперечным и наклонным сечениями
4	Условие прочности для стержня из пластичного материала	$\sigma_{max} \leq [\sigma]$	$[\sigma] = \sigma_T / n_T$ – допускаемые напряжения при растяжении и сжатии
5	Условия прочности для стержня из хрупкого материала	$\sigma_{max}^p \leq [\sigma]_p$ $\sigma_{max}^c \leq [\sigma]_c$	$[\sigma]_p = \sigma_{вр} / n_\sigma$, $[\sigma]_c = \sigma_{сж} / n_\sigma$ допускаемые напряжения при растяжении и сжатии
6	Линейная деформация на участке	$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$	l – длина участка Δl – изменение длины участка
7	Закон Гука для материала	$\sigma = E\varepsilon$, $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$	E – модуль Юнга материала
8	Закон Гука для участка стержня	$\Delta l = \frac{Nl}{EF}$	При постоянной деформации на участке $\varepsilon = const$
9	Коэффициент Пуассона	$\mu = \left \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right $	ε' – поперечная деформация ε – продольная деформация
10	Определение поперечной деформации	$\varepsilon' = -\mu\varepsilon$	μ – коэффициент Пуассона
11	Продольные перемещения поперечных сечений	$w_z = w_0 + \varepsilon z$	w_0 – перемещение сечения при $z=0$ на участке $\varepsilon = const$
12	Перемещение сечения в конце участка стержня	$w_k = w_n + \Delta l$	w_n – перемещение начального сечения участка
Стержневые системы			
13	Определение усилий из уравнений равновесия	$\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum m_i = 0$, $\Rightarrow N_i$	N_i – нормальная сила в i -ом стержне
14	Определение напряжений	$\sigma_i = N_i / F_i$	σ_i – напряжения в i -ом стержне
15	Определение перемещений по методу единичной нагрузки	$\delta = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{N}_i N_i l_i}{E_i F_i}$	\bar{N}_i – нормальная сила в i -ом стержне для единичного состояния; N_i – нормальная сила в i -ом стержне для грузового состояния; m – число стержней

Кручение

№	Смысл зависимости	Формула	Примечания
1	Определение внутренних моментов по методу сечений	$\sum m_z = 0 \Rightarrow M_k$	M_k – крутящий момент в сечении
2	Касательные напряжения в произвольной точке круглого сечения	$\tau = \frac{M_k}{J_p} \rho$	J_p – полярный момент инерции сечения; ρ – расстояние от центра сечения до точки
3	Максимальные касательные напряжения в сечении	$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p}$	$W_p = J_p / \rho_{max}$ – полярный момент сопротивления сечения; ρ_{max} – расстояние от центра до наиболее удаленных точек
4	Условие прочности вала при кручении	$\tau_{max} \leq [\tau]$	$[\tau] = \tau_T / n_T$ – допускаемые напряжения
5	Напряжения в наклонных площадках при чистом сдвиге	$\sigma_\alpha = \tau \cdot \sin 2\alpha$ $\tau_\alpha = \tau \cdot \cos 2\alpha$	τ – касательные напряжения чистого сдвига; α – угол между поперечным и наклонным сечениями
6	Закон Гука при чистом сдвиге	$\tau = G\gamma$	γ – угловая деформация (угол сдвига) G – модуль сдвига материала
7	Связь модуля сдвига G и модуля Юнга E	$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$	μ – коэффициент Пуассона
8	Относительный угол закручивания	$\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}; \varphi' = \frac{M_k}{GJ_p}$	φ – функция углов поворота сечений
9	Определение углов закручивания на участке	$\varphi_z = \varphi_0 + \varphi' \cdot z$	$\varphi' = const$ – относительный угол закручивания на участке
10	Угол закручивания участка вала	$\Delta\varphi = \varphi' l = \frac{M_k l}{GJ_p}$	$\varphi' = const$ на участке l – длина участка
11	Угловое перемещение сечения в конце участка вала	$\varphi_k = \varphi_n + \Delta\varphi$	φ_n – угол поворота начального сечения; $\Delta\varphi$ – угол закручивания участка
12	Условие жесткости вала	$\varphi'_{max} \leq [\varphi']$	$[\varphi']$ – допускаемый относительный угол закручивания
13	Касательные напряжения τ_{max} и τ' в прямоугольном сечении	$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k}$ $\tau' = \eta \tau_{max}$	$W_k = \alpha ab^2$ – момент сопротивления прямоугольного сечения при кручении; a, b – большая и малая стороны прямоугольника
14	Угол закручивания бруса прямоугольного сечения	$\Delta\varphi = \frac{M_k l}{GJ_k}$	$J_k = \beta ab^3$ – момент инерции прямоугольного сечения при кручении

Изгиб

№	Смысл зависимости	Формула	Примечания
1	Определение внутренних сил по методу сечений	$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q$ $\sum m_x = 0 \Rightarrow M$	Q – поперечная сила; M – изгибающий момент
2	Дифференциальные зависимости при изгибе	$\frac{dQ}{dz} = q; \quad \frac{dM}{dz} = Q$ $\frac{d^2 M}{dz^2} = q$	q – интенсивность распределенной нагрузки
3	Нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения	$\sigma = \frac{M}{J_x} y$	J_x – момент инерции сечения относительно главной центральной оси x ; y – расстояние от оси x до точки
4	Максимальные нормальные напряжения в сечении	$\sigma^{max} = \frac{M}{W_x}$	W_x – момент сопротивления сечения
5	Условие прочности для балки из пластичного материала	$\sigma_{max} \leq [\sigma]$	σ_{max} – максимальные напряжения в балке $[\sigma] = \sigma_T / n_T$ – допускаемые напряжения
6	Условия прочности для балки из хрупкого материала	$\sigma_{max}^p \leq [\sigma]_p$ $\sigma_{max}^c \leq [\sigma]_c$	$[\sigma]_p = \sigma_{cp} / n_\sigma$, $[\sigma]_c = \sigma_{cc} / n_\sigma$ допускаемые напряжения при растяжении и сжатии
7	Касательные напряжения в произвольной точке сечения балки	$\tau = \frac{Q \cdot S_x^*}{J_x \cdot b(y)}$	$b(y)$ – ширина сечения в месте определения напряжений; S_x^* – статический момент отсеченной части сечения
8	Зависимость между линейным и угловым перемещениями	$\theta = \frac{dV}{dz}$	V – прогиб сечения балки θ – угол поворота сечения балки
9	Определение кривизны оси балки в сечении	$k = \frac{d\theta}{dz}; \quad k = \frac{M}{EJ_x}$	M – изгибающий момент в сечении EJ_x – жесткость балки при изгибе
10	Дифференциальное уравнение упругой линии балки	$\frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{M}{EJ_x}$	$M(z)$ – функция изгибающего момента по длине балки
11	Интеграл Мора для определения перемещений сечений балки	$\delta = \int_l \frac{\overline{M} M}{EJ_x} dz$	δ – линейное или угловое перемещение сечения балки, $M(z)$, $\overline{M}(z)$ – функции моментов для грузового и единичного состояний
12	Способ Верещагина для вычисления интеграла Мора	$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \eta_i}{(EJ_x)_i}$	ω – площадь «грузовой эпюры»; η – ордината на «единичной эпюре» под центром площади грузовой эпюры

Содержание

Введение	3
1. Основные понятия.....	5
1.1. Моделирование реального объекта.....	5
1.2. Внутренние силы. Метод сечений.....	10
1.3. Напряжения.....	11
1.4. Перемещения и деформации.....	12
1.5. Закон Гука. Основные принципы.....	14
2. Механические свойства материалов	17
2.1. Напряженно-деформированное состояние образца	17
2.2. Испытание на растяжение	20
2.3. Испытание на сжатие	27
2.4. Влияние различных факторов на механические свойства материалов	28
2.5. Расчет на прочность. Коэффициент запаса	31
3. Растяжение и сжатие.....	36
3.1. Определение нормальных сил	36
3.2. Основные зависимости при растяжении	38
3.3. Перемещения сечений стержня	40
3.4. Учет факторов, влияющих на изменение длины стержня	42
3.5. Расчет стержня на прочность.....	43
3.6. Расчет статически определимого стержня	44
3.7. Расчет статически неопределимого стержня.....	49
4. Кручение	53
4.1. Чистый сдвиг	53
4.2. Кручение бруса круглого сечения.....	55
4.3. Сравнительный анализ полых и сплошных валов.....	60
4.4. Расчет валов на прочность и жесткость.....	61
4.5. Характер разрушения валов	63
4.6. Статически неопределимые задачи на кручение	66
4.7. Кручение бруса прямоугольного сечения	67
4.8. Кручение тонкостенного стержня открытого профиля	69
4.9. Расчет витых цилиндрических пружин с малым шагом.....	70

