

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
БЕСЕДЫ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ
Учебное пособие

В учебном пособии в форме вопросов и ответов дается краткое изложение основных разделов традиционного курса сопротивления материалов: предисловие, основные понятия, растяжение и сжатие, сдвиг, геометрические характеристики плоских сечений, кручение, напряженное состояние в точке тела, прямой изгиб, гипотезы прочности, кривой изгиб, внецентренное сжатие, изгиб с кручением, устойчивость стержней, задачи динамики, сопротивление усталости, общие теоремы и заключение. Принятая автором форма изложения материала предоставляет читателю возможность самостоятельного изучения сложной инженерной дисциплины без непосредственной помощи преподавателя.

Пособие предназначено для студентов машиностроительных специальностей вузов всех форм обучения. Оно может быть полезно и для студентов других технических специальностей, изучающих или интересующихся проблемами прочности конструкций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	5
2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ	17
3. СДВИГ	35
4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ.....	39
5. КРУЧЕНИЕ.....	48
6. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА	54
7. ПРЯМОЙ ИЗГИБ	62
8. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ.....	96
9. КОСОЙ ИЗГИБ	102
10. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ	106
11. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ.....	109
12. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ	112
13. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ	119
14. СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ	124
15. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ	133
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	146
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	147
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ	148
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	150

ПРЕДИСЛОВИЕ

*Образование – изумительная вещь,
но невозможно изучить все то,
что достойно изучения.
Оскар Уайльд*

Это учебное пособие написано в форме беседы между преподавателем и студентом. Оно охватывает практически все основные темы традиционного курса сопротивления материалов, читаемого кафедрой теоретической и прикладной механики студентам Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет». Пособие предназначается студентам *машиностроительных* специальностей. По мнению автора, оно может быть полезно и для студентов других специальностей университета, в частности, *строительных*, а также для всех тех студентов, которые интересуются вопросами прочности конструкций.

При подготовке пособия решающими оказались два тесно связанных между собой обстоятельства: отбор тем для беседы, а также ограниченность объема пособия. Не исключено, что уважаемый Читатель не обнаружит в пособии каких-то важных, с его точки зрения, разделов курса.

Наиболее подробно в пособии разобраны темы, которые чаще всего вызывают затруднения у студентов. Большое значение при этом придается соединению *физических* рассуждений с приводимыми, очень часто без вывода, *математическими* формулами (автору известно шутовское высказывание английского астрофизика *Стивена Хокинга* о том, что любая формула, включенная в книгу, уменьшает число ее читателей вдвое).

Как правило, при изучении курса сопротивления материалов студенты сталкиваются именно с этой проблемой, суть которой заключается в том, чтобы, с одной стороны, научиться превращать *физически* поставленную задачу в *математически* сформулированную проблему, а с другой – *уяснить* смысл полученных результатов. «Знать – вовсе не значит *понимать*. Это – только держать в памяти то, что ей дали на хранение», – писал еще в XVI веке известный французский мыслитель *Мишель Эйкем де Монтень*, – «... знание украшает, но не является фундаментом».

На выбор вопросов и на трактовку ответов на них большое влияние оказали беседы автора со своими коллегами по кафедре и, конечно же, со студентами, как на консультациях, так и во время экзаменов. Всем им, а также тем, кто помог автору в редактировании рукописи и особенно в изготовлении рисунков автор приносит свою искреннюю благодарность.

Автор надеется, что Читатель, тщательно изучивший настоящее пособие, сможет сознательно ориентироваться в многочисленных учебниках, а также в справочниках по сопротивлению материалов.

А теперь, перефразируя слова великого мудреца *Гиллея*, автор призывает студентов: «Идите и изучайте!»

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Автор рекомендует Читателю уделить настоящей теме беседы *особое внимание*. В ней приводятся основные понятия и определения новой, незнакомой для Читателя, дисциплины. Успешное изучение этой темы должно обеспечить *понимание* целей и задач всего курса сопротивления материалов.

К сожалению, многие студенты несколько легкомысленно относятся к подобному разделу учебника по сопротивлению материалов, считая, что его изложение является только данью традиции. Они, как правило, быстро пролистывают его, ошибочно полагая, что нужный материал излагается лишь в последующих разделах курса.

1.1. Что представляет собой дисциплина «Сопротивление материалов»?

Неподготовленному Читателю сразу же дать ответ на этот вопрос не так просто. И все же попробуем.

«Сопротивление материалов» является разделом механики *деформируемого твердого тела*, в котором изучается поведение *простейших* элементов инженерных конструкций (а также *материалов*, из которых они сделаны), находящихся под действием приложенных к ним нагрузок. Эта дисциплина дает *теоретические основы* расчета этих элементов на *прочность, жесткость и устойчивость*. «Сопротивление материалов» учит не только рассчитывать *простейшие* элементы самолета, корабля, здания, моста и т. п., но и определять их размеры с учетом *безопасности и экономичности*.

Основателем науки о сопротивлении материалов по праву считается итальянский ученый *Галилео Галилей (Galilei, 1564 – 1642 гг.)*, который первым, в своей книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки» (1638 г.), поставил вопрос о *прочности* твердых тел и первым попытался дать на него ответ.

Теоретические положения сопротивления материалов опираются на законы и теоремы *общей механики*, которые одинаково верны как для тел *абсолютно* твердых, так и для *деформируемых* твердых тел, то есть для *реальных* твердых тел, которые под действием внешней нагрузки *незначительно*, но все же изменяют свои первоначальные размеры и форму.

К основным понятиям, известным из механики *абсолютно твердого тела*, в сопротивлении материалов прибавляются новые понятия. Из этих новых понятий *двумя важнейшими* являются *деформация* и *напряжение*. Подробное объяснение этих понятий, а также упомянутых выше понятий *прочность, жесткость и устойчивость* будет дано ниже в этой же беседе.

Заметим, кстати, что, по мнению автора, вместо термина «абсолютно твердое тело», используемого в теоретической механике, лучше использовать термин «*недеформируемое твердое тело*».

1.2. За счет чего твердое тело, находящееся под действием внешних нагрузок, сопротивляется разрушению?

Ответ на этот вопрос, лежащий в основе всего курса сопротивления материалов, впервые дал английский ученый Роберт Гук (Hooke, 1635 – 1703 гг.). Он пришел к выводу, что *сопротивление твердого тела разрушению возможно только за счет возникновения в нем внутренних сил*.

При этом разрушение тела не произойдет только в том случае, если эти внутренние силы сумеют уравновесить внешнюю нагрузку.

1.3. Легко представить себе как груз растягивает, например, веревку. Но каким образом веревка может создать необходимую для противодействия грузу внутреннюю силу?

Дело в том, что под действием внешней нагрузки любое реальное твердое тело *изменяет свои первоначальные размеры и форму, или деформируется*. Например, если Вы, уважаемый Читатель, наступите на обычный строительный кирпич, то под действием Вашего веса его высота уменьшится примерно на $1/20000$ см.

Именно деформация (пусть даже очень маленькая, как в приведенном выше примере) *и позволяет твердому телу создать те внутренние силы, которые способны противодействовать внешней нагрузке и соответственно его разрушению* (см. также ответ на вопрос 1.10).

Когда мы к концу веревки подвешиваем груз, веревка *удлинится*. Это *удлинение*, в свою очередь, *приводит к возникновению внутри веревки результирующей внутренней силы, которая «тянет» камень вверх, удерживая его от падения* (действие и противодействие, как известно, равны по величине и противоположны по направлению).

Если внутренняя сила, обусловленная удлинением веревки, не сможет уравновесить вес груза, то веревка порвется.

Важно осознать, что *деформация* конструкции вовсе не является каким-то дефектом (если она, конечно, не слишком велика с точки зрения цели, которой служит эта конструкция). Наоборот, *деформация является тем важным свойством конструкции, без которого она не смогла бы противодействовать внешней нагрузке.*

1.4. Какая деформация называется упругой?

Предположим, что тело не разрушилось под действием внешней нагрузки. Будем теперь уменьшать нагрузку до нуля. При этом, благодаря внутренним силам, будет уменьшаться и деформация тела. *Способность материала восстанавливать первоначальные размеры и форму после сня-*

тия нагрузки называется **упругостью**. Та часть деформации, которая исчезает при разгрузке, называется **упругой деформацией**. Тело называется **абсолютно упругим**, если оно полностью восстанавливает свои размеры и форму после снятия нагрузки.

1.5. А какая деформация называется **пластической**?

Та часть деформации, которая не исчезает при разгрузке, называется **пластической**, а способность материала сохранять деформацию **пластичностью**. Пластическая деформация называется также **остаточной деформацией**.

Как правило, возникновение пластических деформаций связано с нарушением нормальной работы инженерной конструкции и поэтому их появление считается **недопустимым**.

Если же мы хотим придать твердому телу желательную для различных целей форму, например, при прокатке, ковке, штамповке и т. п., то без возникновения пластической деформации нам не обойтись.

1.6. Что называется **расчетной схемой**?

Расчет любой **реальной** конструкции начинается с выбора **расчетной схемы**. Она представляет собой упрощенную, идеализированную схему, которая отражает наиболее существенные особенности объекта, определяющие его поведение под действием внешней нагрузки. Выбор расчетной схемы начинается со схематизации свойств материала и характера деформирования твердого тела. Вторым шагом является схематизация **геометрической** формы реального объекта.

Формы элементов конструкций можно свести к следующим категориям: **стержень**, **оболочка**, **пластина** и **массивное тело**.

Стержень – это твердое тело, у которого один размер (**длина**) значительно (раз в десять) превышает два других его размера.

Представим себе некоторую плоскую фигуру, перемещающуюся в пространстве так, что **центр тяжести** этой фигуры все время остается на некоторой линии (прямой или кривой), а сама фигура остается **перпендикулярной** к этой линии. Описанная такой фигурой форма дает нам очертание **стержня** (прямолинейного или криволинейного). Линия, вдоль которой перемещается фигура, называется **осью стержня**, а сама фигура – его **поперечным сечением**.

Оболочка – это твердое тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, у которого один размер (**толщина**) много меньше двух других размеров.

Пластина (или **плита**) – это тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями.

Массивное тело – это такое твердое тело, у которого все три размера имеют один порядок.

В курсе сопротивления материалов, в основном, изучается напряженно-деформированное состояние *призматических стержней с прямолинейной осью*. Оболочки, пластины и массивные тела, как правило, не могут быть рассчитаны методами сопротивления материалов.

1.7. Какие основные задачи решаются в сопротивлении материалов?

Первая задача – расчет конструкции на *прочность*.

Прочностью называется способность конструкции сопротивляться разрушению. При этом под **нарушением прочности** понимается не только разрушение конструкции в буквальном смысле этого слова, но и возникновение в ней больших пластических деформаций. Говоря о достаточной прочности конструкции, полагают, что прочность будет обеспечена не только при заданном значении внешней нагрузки, но и при некотором возможном ее увеличении, то есть конструкция должна иметь определенный *запас прочности*.

Вторая задача – расчет конструкции на *жесткость*.

Жесткостью называется способность конструкции сопротивляться деформированию. Иногда деформация конструкции, отвечающей условию прочности, может воспрепятствовать нормальной ее эксплуатации.

Пусть, например, прогиб нагруженного моста посередине составил $1/500$ от длины его пролета l . При этом по нормам *допускаемый* прогиб не должен превышать $l/800$. В этом случае говорят, что мост является прочным, но жесткость его недостаточна.

Третья задача – расчет *устойчивости* конструкции.

Под **устойчивостью** понимают способность конструкции сохранять положение равновесия, отвечающее действующей на нее нагрузке. Иными словами, положение равновесия конструкции *устойчиво* в том случае, если, получив произвольное малое отклонение от этого положения равновесия, конструкция снова к нему возвращается после исчезновения причин, вызвавших это отклонение.

Проблема устойчивости возникает, например, при расчете *длинного* стержня на сжатие. Может случиться так, что при некоторой нагрузке, называемой *критической*, такой стержень, отвечающий и условию прочности, и условию жесткости, *внезапно* изогнется (*потеряет устойчивость прямолинейной формы равновесия*). Это может привести к неминуемой катастрофе *всей конструкции*, в состав которой входит данный стержень.

Таким образом, *сопротивление материалов* – это инженерная дисциплина, в которой даются теоретические основы расчета **простейших** элементов конструкции (стержней) на прочность, жесткость и устойчивость.

1.8. Как классифицируются внешние силы?

Внешние силы, действующие на конструкцию, делятся на *активные*, которые принято называть *нагрузками*, и *реактивные* – реакции связей.

По способу приложения нагрузки могут быть *объемными* (собственный вес, силы инерции), то есть действующими на каждый бесконечно малый элемент объема, и *поверхностными*. Поверхностные нагрузки делятся на *сосредоточенные* и *распределенные*.

Нагрузки, распределенные по некоторой поверхности и действующие по направлению нормали к этой поверхности, характеризуются *давлением*, то есть отношением силы, действующей на элемент поверхности, к площади данного элемента. В Международной системе единиц (СИ) *давление* измеряется в *паскалях*, *мегапаскалях* ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$; $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$) и т. д., а в технической системе – в килограммах силы на квадратный миллиметр и т. д. (кгс/мм^2 , кгс/см^2).

В сопротивлении материалов часто рассматриваются поверхностные нагрузки, распределенные *по длине* элемента конструкции. Такие нагрузки характеризуются *интенсивностью*, обозначаемой обычно буквой q и выражаемой в ньютонах (килоньютонах) на метр (Н/м, кН/м) или в килограммах силы на метр (кгс/м) и т. д.

Реальные нагрузки, действующие на конструкцию, не всегда могут быть сведены лишь к сосредоточенным и распределенным нагрузкам. Возможны и *моментные* воздействия, например, в виде *сосредоточенных моментов*. Последние выражаются в единицах силы, умноженных на единицу длины (кН·м, кгс·м и т. д.). Напомним, что термины «*сосредоточенный момент*», «*пара*», «*плечо*» были введены в 1804 г. французским ученым Луи Пуансо (Poinsot, 1777–1859 гг.).

По характеру изменения во времени нагрузки бывают *статические* (нарастающие *медленно* от нуля до своего конечного значения и в дальнейшем не изменяющиеся) и *динамические* (изменяющиеся с течением времени *свою величину* и (или) *точку приложения* и при этом изменяющие их *достаточно быстро*).

1.9. Какие основные допущения принимаются в сопротивлении материалов?

Структура реальных твердых тел настолько сложна, что они в своем естественном виде не могут стать предметом изучения в сопротивлении материалов. Твердые тела приходится *идеализировать*, то есть наделять их такими свойствами, которые, с одной стороны, достаточно точно передают основные характеристики реальных твердых тел, а с другой стороны, являются достаточно простыми для их представления в виде математических соотношений. Целью такой идеализации является получение определенных законов в виде уравнений, правильно описывающих основные свойства твердого тела.

При построении теории расчета на прочность, жесткость и устойчивость принимаются допущения, относящиеся как к *свойствам* материалов, так и допущения, связанные с *деформацией* твердого тела.

К *первой* группе допущений относятся следующие:

1) Считается, что материал твердого тела представляет собой *сплошную среду*, то есть полагают, что материал полностью заполняет весь объем тела, без каких-либо пустот. Это представление о твердом теле, как о сплошной среде, дает возможность применять при исследовании его напряженно-деформированного состояния методы дифференциального и интегрального исчисления, которые требуют непрерывности функции в каждой точке объема тела.

2) Материал считается *однородным*, то есть его физико-механические свойства являются одинаковыми во всех точках тела.

3) Материал считается *изотропным*, то есть его физико-механические свойства в каждой точке тела одинаковы во всех направлениях. Материал, *не обладающий* этим свойством, называется *анизотропным*. К анизотропным материалам, например, относится дерево.

4) Полагают, что материал является *идеально упругим*, то есть после снятия внешней нагрузки его деформация полностью исчезает.

Вторая группа допущений связана с деформацией твердого тела:

1) Деформации считаются *малыми*. Отсюда следует, что при составлении уравнений равновесия, а также при определении внутренних сил можно не учитывать деформацию тела. Это допущение иногда называют *принципом начальных размеров*.

Рассмотрим, например, стержень, заделанный одним концом в стену и нагруженный на свободном конце сосредоточенной силой P (рис. 1.1).

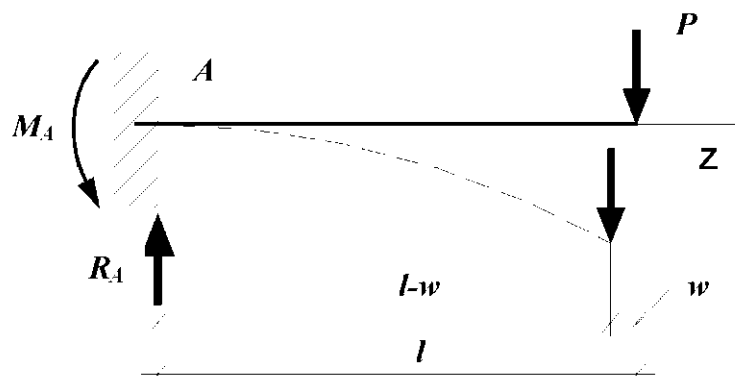


Рис. 1.1. Принцип начальных размеров

Определим значение реактивного момента M_A , возникающего в жесткой заделке. Для этого воспользуемся соответствующим уравнением равновесия, известного уважаемому Читателю, из *теоретической механики*:

$$\sum M_A = 0; \quad +M_A - Pl = 0.$$

Отсюда легко можно найти, что $M_A = Pl$.

Но все ли здесь нами выполнено правильно? К сожалению, нет. Ведь *прямолинейное* положение стержня вовсе не является его положением *равновесия*. Под действием силы P стержень неизбежно *изогнется*. При этом точка приложения нагрузки сместится как по вертикали, так и по горизонтали.

Если записать уравнение *равновесия* стержня для *деформированного* (*изогнутого*) состояния, то реактивный момент, возникающий в заделке, окажется равным:

$$M_A = P(l - w).$$

Принимая в сопротивлении материалов упомянутое выше допущение *о малости деформаций*, мы полагаем, что перемещением w можно пренебречь по сравнению с длиной стержня l , то есть $w \ll l$. Тогда, действительно, мы получим, что $M_A \approx Pl$.

Однако необходимо помнить, что допущение *о малости деформаций* не всегда является справедливым.

Заметим, что иногда *принцип начальных размеров* называют *принципом отвердения*, что не совсем верно. Принцип отвердения используется, например, при изучении поведения *жидких* тел. Если такая система находится в равновесии, то можно предположить, что она *отвердела* и сделалась неизменяемой. И тогда к ней можно будет применить уравнения равновесия *твердого* тела.

2) Полагают, что *перемещения* точек твердого тела *пропорциональны* *внешним нагрузкам*, вызывающим эти перемещения, то есть считается, что тело является *линейно деформируемым*.

Необходимо отметить, что допущение *о линейной деформируемости* конструкции *нельзя* отождествлять с законом *Гука*, как это делается, к сожалению, в некоторых учебниках по сопротивлению материалов.

Дело в том, что закон *Гука*, о котором мы будем говорить подробнее в следующей беседе, устанавливает линейную зависимость между *внутренними силами* и *деформациями*, а не *внешними силами* и *перемещениями*.

3) Для линейно деформируемых конструкций справедлив *принцип независимости действия сил* (*принцип суперпозиции*). Этот принцип формулируется следующим образом.

Результат действия группы сил не зависит от последовательности нагружения ими конструкции и равен сумме результатов действия каждой из этих сил в отдельности.

В основе этого принципа лежит допущение *о малости деформаций*, а также предположение *об обратимости процессов нагрузки и разгрузки* конструкции.

1.10. В чем заключается суть метода сечений и для чего он применяется?

Метод сечений позволяет определить внутренние силы (точнее говоря, *внутренние силовые факторы*), которые возникают в стержне, находящемся в равновесии под действием внешней нагрузки.

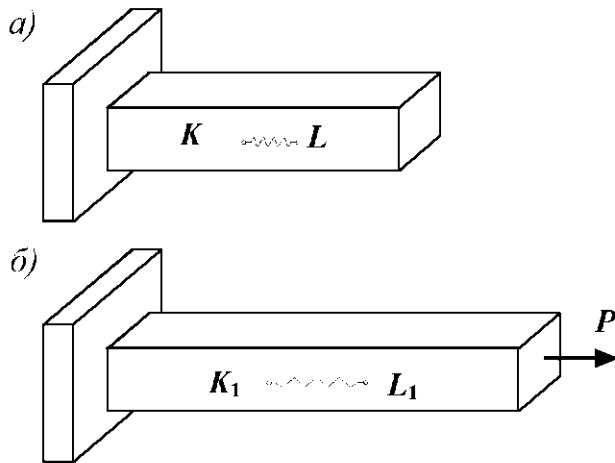


Рис. 1.2. Силы упругости

Рассмотрим, например, идеально упругий призматический стержень прямоугольного поперечного сечения (рис. 1.2, а).

Мысленно выделим внутри стержня какие-либо две частицы K и L , расположенные на бесконечно малом расстоянии друг от друга. Для большей наглядности предположим, что между этими частицами имеется некоторая пружинка, удерживающая их на определенном расстоянии друг от друга.

Пусть натяжение пружинки равно нулю.

Приложим теперь к стержню растягивающую силу P (рис. 1.2, б). Пусть в результате деформации стержня частица K перейдет в положение K_1 , а частица L – в положение L_1 . Соединяющая эти частицы пружинка при этом растянется. После снятия внешней нагрузки частицы вернуться в первоначальное положение K и L благодаря усилию, которое возникло в пружинке. Сила, которая возникла между частицами (в пружинке) в результате деформации идеально упругого стержня, называется *силой упругости* или *внутренней силой*. Она, как уже отмечалось, может быть найдена *методом сечений*.

Метод сечений подразделяется на четыре этапа. Для лучшего запоминания формулировки метода и его четырех этапов иногда вводится аббревиатура *РОЗУ*, представляющая начальные буквы наименований соответствующих этапов: *разрежем, отбросим, заменим, уравновесим*.

Мысленно **разрежем** стержень, находящийся в равновесии под действием некоторой системы P_i (рис. 1.3, а), на две части плоскостью, перпендикулярной к его оси z .

Напомним, что *реакции связей* также относятся к внешним силам, поэтому среди сил, показанных на рис. 1.3, могут быть как *активные*, так и *реактивные* силы.

Отбросим одну из частей стержня, например, переднюю и рассмотрим оставленную нами часть.

Поскольку мы как бы разрезали *бесчисленное множество пружин*, соединявших бесконечно близкие частицы тела, разделенного теперь на

две части, в каждой точке поперечного сечения стержня необходимо приложить *силы упругости*, которые возникли между этими частицами вследствие *деформации* тела.

Иными словами, действие отброшенной передней части стержня вместе с приложенными к ней внешними силами мы **заменим** *внутренними силами* (рис. 1.3, б). Эти *внутренние силы* оказывают *противодействие* внешней нагрузке, приложенной к оставленной части тела.

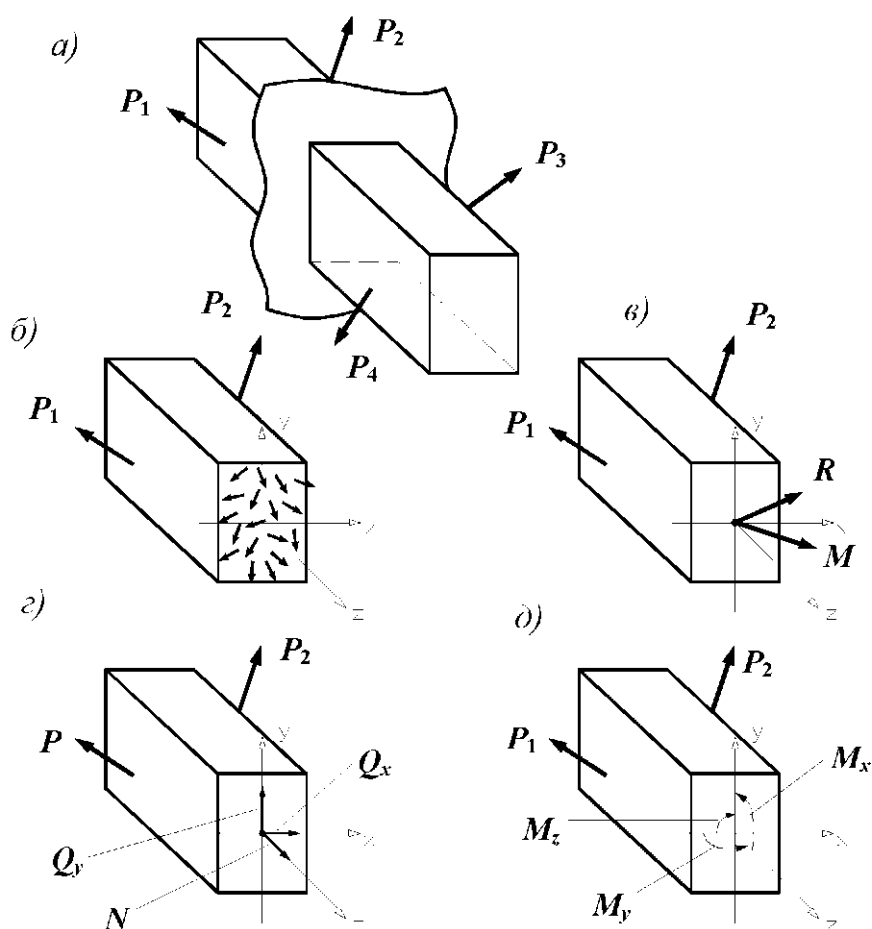


Рис. 1.3. Метод сечений

Бесконечную систему внутренних сил по правилам теоретической механики с помощью известной теоремы Пуансо (1804 г.) можно привести к одной точке – к *центру тяжести поперечного сечения*. В результате мы получим *главный вектор R* и *главный момент M* (рис. 1.3, в). Разложим их на составляющие по осям x , y и z . Заметим, что оси x и y представляют собой *главные оси*, проходящие через *центр тяжести поперечного сечения* (подробнее см. беседу 4).

В итоге мы получим *шесть внутренних силовых факторов*, возникающих в поперечном сечении стержня при его деформировании: три силы N , Q_x , Q_y (рис. 1.3, г) и три момента M_x , M_y , M_z (рис. 1.3, д).

Сила N называется *продольной силой*, Q_x, Q_y – *поперечными* (или *перезывающими*) *силами*, момент относительно оси z M_z – *крутящим моментом*, моменты относительно осей x, y M_x, M_y – *изгибающими моментами*.

Необходимо отметить, что внутренние силовые факторы – *векторные* величины, *составляющие* главного вектора R и главного момента M по осям координат. Поэтому ошибочно говорить, например, что продольная сила N является *проекцией* главного вектора R на ось стержня, поскольку проекция вектора – это *скалярная*, а не *векторная* величина.

Как мы уже отмечали выше, ***разрушение тела не произойдет только в том случае, если эти шесть внутренних усилий сумеют уравновесить внешнюю нагрузку, действующую на рассматриваемую нами часть стержня.***

Поэтому ***уравновесим*** оставленную нами часть стержня.

Записываем ***уравнения равновесия***:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0; \sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0.$$

Из этих уравнений и определяются внутренние усилия, возникающие в рассматриваемом поперечном сечении стержня.

При этом оказывается, что:

- продольная сила N равна сумме проекций всех сил (*активных и реактивных*), действующих на *любую* из частей рассеченного стержня, на ось z ;
- поперечные силы Q_x, Q_y равны сумме проекций всех сил, действующих на *любую* из частей стержня, на оси x и y соответственно;
- крутящий момент M_z равен сумме моментов всех сил, действующих на *любую* из частей стержня, относительно продольной оси z ;
- изгибающие моменты M_x, M_y равны сумме моментов всех сил, действующих на *любую* из частей стержня, относительно осей x и y соответственно.

1.11. Что называется напряжением в точке тела на данной площадке? В каких единицах оно измеряется?

Очевидно, что в общем случае нагружения внутренние силы в стержне распределены и по его длине, и по его поперечному сечению неравномерно. Для суждения об *интенсивности внутренних сил*, возникающих, например, в *некоторой точке поперечного сечения* стержня, вводится понятие о *напряжении* в этой точке. *Это понятие является ключевым понятием в сопротивлении материалов.*

Напряжением в точке тела K (обозначим его буквой p) называется ***интенсивность*** внутренней силы dR , возникающей на *бесконечно малой площадке* dF в окрестности данной точки (рис. 1.4, а).

В количественном выражении напряжение, возникающее в точке тела на площадке dF , равно:

$$p = dR/dF.$$

Заметим, что приведенное выражение, конечно же, *неправоммерно* рассматривать как процедуру *дифференцирования*, при которой роль аргумента играет площадь поперечного сечения.

Понятие о *напряжении* в точке твердого тела в некотором смысле *напоминает* понятие о *давлении*, которое действует, например, внутри жидкости. В технике под термином «давление» понимают величину, численно равную силе, действующей на единицу поверхности. Однако, хотя эти два понятия и сопоставимы, необходимо отметить следующее. Согласно закону *Блеза Паскаля* (*Pascal*, 1623 – 1662 гг.), *давление в точке жидкости одинаково во всех направлениях*. Если же мы проведем через точку *K* твердого тела другое сечение, то в новый разрез попадет другая *пружинка* и иной в общем случае будет и внутренняя сила. Следовательно, иным будет и напряжение, хотя оно и возникает в той же самой точке *K*.

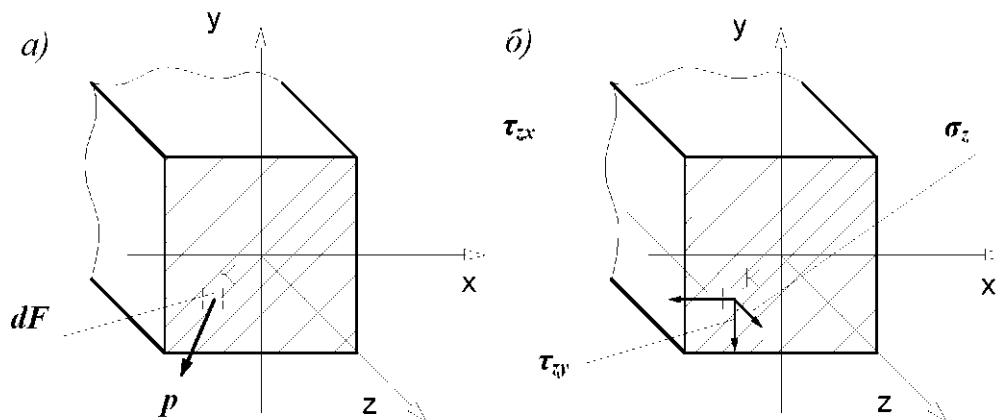


Рис. 1.4. Напряжение в точке тела поперечного сечения

Таким образом, при произвольном приложении внешней нагрузки напряжения, возникающие в некоторой точке тела на разных площадках, проходящих через данную точку, отличаются друг от друга.

Понятие о *напряжении* в точке деформируемого твердого тела ввел в 1822 г. французский ученый *Огюстен Луи Коши* (*Cauchy*, 1789 – 1857 гг.).

В дальнейшем мы увидим, что основную роль в расчетах прочности конструкций играет не *полное* напряжение p , а его *составляющие* на оси координат x , y и z : *нормальное* напряжение (σ_z – *сигма*), направленное по перпендикуляру к площадке (параллельно оси z), и *касательные* напряжения (τ_{xz} , τ_{yz} – *тау*), лежащие в плоскости сечения и направленные соответственно вдоль осей x и y (рис. 1.4, б). Первый индекс z у касательных напряжений τ_{xz} , τ_{yz} характеризует нормаль к площадке, на которой они возникают.

Заметим, что иногда касательные напряжения называются *тангенциальными напряжениями* (от латинского слова *tangens* – касающийся) или *скальвающими*.

Между полным p , нормальным σ_z и касательными напряжениями τ_{zx} и τ_{zy} существует следующая очевидная зависимость:

$$p = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}.$$

Отметим, что *касательные* напряжения служат мерой тенденции одной части сечения *сместаться* относительно другой его части.

Единица измерения нормальных и касательных напряжений в системе СИ – паскаль (Па). Один паскаль – это напряжение, при котором на площадке в один квадратный метр возникает внутренняя сила, равная одному *ньютону* (то есть равная приблизительно весу одного яблока). Как мы увидим в дальнейшем, эта единица напряжения очень мала. В сопротивлении материалов чаще используются другие единицы:

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}; \quad 1 \text{ кН/см}^2 \approx 10^7 \text{ Па} = 10 \text{ МПа}.$$

В технической системе единиц напряжения, как правило, измеряются в килограммах силы на миллиметр (или сантиметр) в квадрате (кгс/мм^2 или кгс/см^2). Следует запомнить, что $1 \text{ кгс/мм}^2 \approx 1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}$.

В заключение необходимо отметить следующее. Ведя речь о напряжениях или о внутренних силовых факторах, мы *не рекомендуем* говорить, что они *действуют* в поперечном (или в некотором другом) сечении стержня, как поступают авторы некоторых учебниках по сопротивлению материалов. Правильнее говорить, что они *возникают* в рассматриваемом сечении стержня, поскольку при деформировании стержня и напряжения, и внутренние силовые факторы *противодействуют* внешней нагрузке, то есть они не играют *активной* роли. В крайнем случае слово «действуют» следует употреблять, заключая его в кавычки.

Наконец, еще раз подчеркнем, что *нельзя говорить о напряжении в данной точке тела, не указывая положения площадки, на которой оно возникает*.

1.12. Тогда еще один вопрос. Бесконечную систему внутренних сил, которая *возникает* в поперечном сечении стержня, мы приводим к *центру тяжести сечения*. В результате получаем так называемые *главный вектор* и *главный момент*. Но почему мы здесь используем слово «*главный*»?

Эти старые термины, конечно же, неудачны и могут дезориентировать студента. Они возникли в результате неверного перевода французского слова «*generale*», обозначающего «*общий*», а вовсе не «*главный*». Эти термины имеют слишком большой «стаж». Они закрепились в великом множестве изданных книг и стали уже традиционными.

1.13. И последний вопрос. Почему в некоторых учебниках по сопротивлению материалов для обозначения тела, у которого один размер значительно превышает два других его размера помимо термина «*стержень*» часто используются и такие, например, слова, как «*балка*», «*вал*», «*стойка*» и «*брус*»?

Нам кажется, что термин «*стержень*» наиболее универсален. Он может употребляться при любом виде деформации. Термин «*балка*» следует использовать только в том случае, когда речь идет об *изгибе* стержня, «*вал*» – при его *кручении*, «*стойка*» – в задачах *устойчивости* стержня. Термин «*брус*» представляется нам не очень удачным. Этот термин – из лексикона строительного дела, в частности, он используется в специальном курсе *деревянных* конструкций.

2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Растяжение и сжатие – это наиболее простой и часто встречающийся вид деформации, поэтому именно с этой темы мы и продолжим нашу беседу. На растяжение (сжатие) работают многие элементы конструкций: стержни ферм, колонны, канаты лебедок, штоки паровых машин и др.

2.1. Какой вид деформации называется *растяжением* (*сжатием*)? Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях стержня при растяжении (*сжатии*)?

Растяжением (сжатием) называется такой вид деформации стержня, при котором происходит изменение его первоначальной длины.

Растяжение (сжатие) стержня вызывается внешними силами, действующими вдоль его оси z , проходящей через центр тяжести поперечного сечения. При этом в любом поперечном сечении стержня возникает только одно внутреннее усилие – *продольная сила* N , которая является равнодействующей всех внутренних сил, возникающих в каждой точке этого поперечного сечения и направленных *параллельно* оси стержня.

2.2. Что называется *эпюрой продольных сил* и с какой целью она строится?

В тех случаях, когда продольные силы, возникающие в различных поперечных сечениях стержня, неодинаковы, закон их изменения по длине стержня представляется в виде графика $N(z)$, называемого *эпюрой продольных сил* N . Эта эпюра наглядно демонстрирует нам, какие участки стержня испытывают растяжение, а какие – сжатие. При этом *продольную силу* N , *противодействующую растяжению* стержня, принято считать *положительной*, а *сжатую отрицательной*. Эпюра N необходима для оценки *прочности* стержня. По этой эпюре определяется *опасное* сечение

стержня. Как правило, это то его поперечное сечение, в котором продольная сила принимает *наибольшее* по абсолютной величине значение.

Построение эпюры N производится с помощью рассмотренного нами выше *метода сечений*. Продемонстрируем его применение на следующем примере (рис. 2.1).

Мы покажем, как определяется продольная сила N только в одном, намеченном нами поперечном сечении (рис. 2.1, *а*). В других поперечных сечениях стержня она может быть определена по аналогии.

Прежде всего, нам необходимо найти опорную реакцию R (рис. 2.1, *б*), возникающую в заделке. Направим ее, например, вверх.

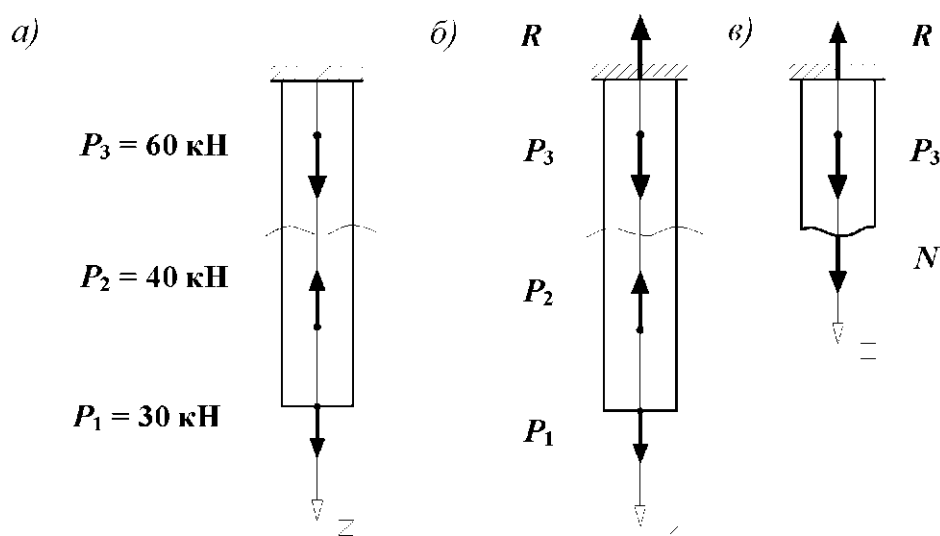


Рис. 2.1. Определение продольного усилия N в стержне при растяжении (сжатии)

Составим уравнение равновесия $\sum Z = 0$ для *всего* стержня:

$$\sum Z = -R + P_3 - P_2 + P_1 = 0.$$

Отсюда находим, что

$$R = P_3 - P_2 + P_1 = 60 - 40 + 30 = +50 \text{ кН}.$$

Знак «плюс» в полученном результате говорит о том, что предварительное направление опорной реакции R вверх было выбрано нами верно.

Разрежем теперь стержень по намеченному сечению и *мысленно отбросим* его нижнюю часть. Действие отброшенной части стержня нам необходимо *заменить* продольной силой N . Это мы можем осуществить следующими двумя способами.

Первый способ — будем **всегда** направлять продольную силу N *от сечения*, то есть будем предполагать, что она противодействует **растяжению** стержня. В этом случае положительный результат, полученный после **уравновешивания** оставленной части стержня, укажет нам на то, что внутренняя сила действительно соответствует растяжению, а отрицательный — что она противодействует сжатию.

По существу, первый способ является *формальным*.

Второй способ – будем направлять продольную силу, согласно здравому смыслу. То есть будем ориентироваться на значения внешних сил, действующих на рассматриваемую часть стержня, и помнить о том, что сила N должна их *уравновесить*. Тогда знак «плюс» в решении покажет, «угадали» или «не угадали» мы истинное направление продольной силы.

Проиллюстрируем *первый способ*. Направим, не задумываясь, внутреннюю силу N от сечения (рис. 2.1, в).

Для удобства вычисления значения продольной силы N *закроем отброшенную нами нижнюю часть стержня, например листком бумаги*. Разрушение стержня в рассматриваемом нами поперечном сечении *не произойдет* в том случае, если внутреннее усилие N *уравновесит* внешние силы R и P_3 , то есть те силы, которые мы *видим*. Записываем уравнение равновесия:

$$\begin{aligned}\sum Z &= +N + P_3 - R = 0; \\ N &= R - P_3 = +50 - 60 = -10 \text{ кН.}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Знак «минус» в полученном результате говорит нам о том, что в рассматриваемом сечении возникает продольное усилие N , противодействующее *сжатию* стержня.

Аналогичный результат мы получим и при отбрасывании верхней части стержня. Убедимся в этом, воспользовавшись теперь (для иллюстрации) *вторым способом*. Закроем верхнюю часть стержня листком бумаги. Мы увидим, что внешняя сила $P_1 = 30$ кН растягивает, а сила $P_2 = 40$ кН сжимает нижнюю часть стержня. Продольное усилие N , возникающее в рассматриваемом нами поперечном сечении стержня, должно уравновесить эти две силы. Поскольку $P_2 > P_1$, сила N должна быть направлена к сечению стержня, то есть противодействовать *сжатию*. Тогда

$$N = P_2 - P_1 = 40 - 30 = 10 \text{ кН.}$$

С учетом принятого выше правила знаков, на эпюре продольных сил найденное значение N должно быть отложено со знаком «минус».

Таким образом, мы получили тот же самый результат.

2.3. По какому правилу осуществляется вычисление продольной силы N в произвольном поперечном сечении стержня?

Правило это очень простое: *для определения продольной силы N , возникающей в некотором поперечном сечении стержня, необходимо найти алгебраическую сумму всех внешних сил (активных и реактивных), действующих на любую из рассматриваемых частей стержня*.

Если принято решение воспользоваться *первым, формальным способом*, то, складывая эти внешние силы, следует применить следующее правило знаков: *силы, вызывающие растяжение рассматриваемой части*

стержня, включаются в упомянутую алгебраическую сумму со знаком «плюс», а силы, вызывающие сжатие, со знаком «минус» (см. выражение (2.1)).

Второй способ представляется автору все же более целесообразным. В этом случае студент просто *вынужден* при определении продольной силы и построении эпюры N задумываться о *виде* деформации стержня (растянут он или сжат в рассматриваемом поперечном сечении).

2.4. В чем заключается смысл гипотезы плоских сечений?

Многочисленные эксперименты показывают, что при *растяжении* стержня продольные и поперечные риски, *нанесенные на его поверхности до деформации*, остаются *практически* прямолинейными и взаимно перпендикулярными между собой и после деформации стержня. Изменяются лишь расстояния между ними. Причем между поперечными рисками расстояния увеличиваются, а между продольными – уменьшаются.

Можно предположить, что и *внутри* стержня деформации имеют такой же характер, как и на его поверхности. Следовательно, *поперечные сечения, плоские и нормальные к оси стержня до деформации, остаются плоскими и нормальными к его оси и после деформации*. В этом и заключается смысл *гипотезы плоских сечений*, предложенной итальянским ученым Яковом Бернулли (Bernoulli, 1654 – 1705 гг.).

2.5. Как распределены нормальные напряжения по поперечному сечению стержня? По какой формуле они вычисляются?

Из гипотезы Бернулли следует, что *все продольные волокна стержня деформируются одинаково*. Поэтому можно считать, что при растяжении (сжатии) напряжения во всех точках поперечного сечения стержня *одинаковы* и направлены по *нормали* к поперечному сечению. Такие напряжения, напомним, называются *нормальными напряжениями*.

Если в рассматриваемом поперечном сечении стержня *возникает* продольное усилие N , а F – площадь этого поперечного сечения, то, с учетом изложенного выше, нормальные напряжения при растяжении (сжатии) вычисляются по формуле

$$\sigma_z = N/F. \quad (2.2)$$

Для нормального напряжения σ_z , как и для продольной силы N , принимается следующее правило знаков: *при растяжении оно считается положительным, а при сжатии отрицательным*.

2.6. О чем говорит принцип Сен-Венана?

Приведенная формула (2.2) справедлива лишь для *тех поперечных сечений стержня, которые достаточно удалены от места приложения внешней нагрузки*. Вблизи от места ее приложения, в общем случае нагружения, гипотеза плоских сечений *не выполняется*. Здесь распределение

деформаций и напряжений носит сложный характер и требует других, более точных методов определения.

Суть принципа, который предложил в 1853 г. французский ученый *Адемар Жан-Клод Барре де Сен-Венан (de Saint-Venant, 1797 – 1886 гг.)*, заключается в следующем.

Вблизи от места приложения внешних сил распределение напряжений и деформаций стержня **зависит** от способа их приложения. **Вдали** от места нагружения распределение напряжений и деформаций практически **не зависит** от способа приложения нагрузки, а зависит только от ее статического эквивалента.

Справедливость принципа *Сен-Венана* не имеет теоретического доказательства, но она подтверждается опытными данными.

2.7. Что происходит с продольным и поперечными размерами стержня при растяжении (сжатии)? Связана ли поперечная деформация с продольной деформацией стержня?

Пусть в результате деформации первоначальная длина стержня l станет равной l_1 . Изменение длины

$$\Delta l = l_1 - l$$

называется *абсолютным удлинением* стержня. Оно измеряется в единицах длины, например, в сантиметрах (см).

Отношение абсолютного удлинения стержня к его первоначальной длине называется *относительным удлинением* или *продольной деформацией*. Эта безразмерная величина обозначается ε_z (*эпсилон*) и вычисляется по формуле

$$\varepsilon_z = \Delta l / l. \quad (2.3)$$

При *растяжении* продольная деформация считается *положительной*, а при *сжатии* – *отрицательной*.

Поперечные размеры стержня в результате деформирования также изменяются, при этом при растяжении они уменьшаются, а при сжатии – увеличиваются. Если материал является *изотропным*, то его *поперечные деформации* в направлении осей x и y равны между собой: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon'$.

Опытным путем установлено, что при растяжении (сжатии) в *пределах упругих деформаций* отношение поперечной деформации к продольной является *постоянной* для данного материала величиной. Абсолютная величина этого отношения

$$\mu = |\varepsilon' / \varepsilon_z|$$

называется *коэффициентом поперечной деформации* или *коэффициентом Пуассона* – по имени французского ученого *Симеона Дени Пуассона (Poisson, 1781 – 1840 гг.)*. Для различных материалов коэффициент *Пуассона* изменяется в следующих пределах: $0 \leq \mu \leq 0,5$. Например, для пробки $\mu = 0$, для каучука $\mu = 0,5$, для стали $\mu = 0,3$, а для золота $\mu = 0,42$.

2.8. Почему коэффициент Пуассона не может принимать значение большее, чем 0,5?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, определим изменение объема стержня, имеющего, например, прямоугольное поперечное сечение с размерами b и h , при его растяжении.

Длина стержня l увеличится и станет равной

$$l_1 = l + \Delta l = l(1 + \varepsilon_z).$$

Поперечные размеры b и h уменьшатся:

$$b_1 = b - \Delta b = b(1 - \mu\varepsilon_z), \quad h_1 = h - \Delta h = h(1 - \mu\varepsilon_z).$$

Площадь поперечного сечения после деформации будет равна:

$$F_1 = b(1 - \mu\varepsilon_z)h(1 - \mu\varepsilon_z).$$

Учитывая, что деформация ε_z мала и пренебрегая величиной $(\mu\varepsilon_z)^2$ по сравнению с единицей, получим:

$$F_1 \approx bh(1 - 2\mu\varepsilon_z).$$

Тогда объем стержня после деформации определится по формуле

$$V_1 = l_1 F_1 = l(1 + \varepsilon_z)bh(1 - 2\mu\varepsilon_z) \approx V[1 + \varepsilon_z(1 - 2\mu)].$$

Трудно себе представить, что при растяжении объем стержня уменьшится. Тогда из условия $V_1 \geq V$ найдем, что $1 - 2\mu \geq 1$. Или, окончательно,

$$\mu \leq 0,5.$$

2.9. Как записывается закон Гука при растяжении (сжатии)?

Для большинства материалов в пределах упругих деформаций между напряжением σ_z и продольной деформацией ε_z существует линейная зависимость

$$\sigma_z = E\varepsilon_z. \quad (2.4)$$

Напряжение пропорционально деформации – так формулируется в настоящее время закон Гука.

Впервые этот закон был опубликован в виде анаграммы *ceiiniossstuv* в 1676 г. английским ученым Робертом Гуком в его работе «Десяток изобретений, которые я намерен опубликовать». При правильной расстановке букв анаграмма читается следующим образом: «*Ut tensio, sic vis*». В переводе с латинского языка это означает: «Каково удлинение, такова и сила».

Заметим, что к такому же заключению в 1680 г., независимо от Гука, пришел и французский ученый Эдме Мариотт (*Mariotte*, 1620 – 1684 гг.).

Коэффициент пропорциональности E , стоящий в формуле (2.4), называется *модулем продольной упругости* или *модулем Юнга* – по имени английского ученого Томаса Юнга (*Young*, 1773 – 1829 гг.). Его значение для данного материала может быть установлено только опытным путем. В справочниках обычно приводится среднее значение модуля Юнга.

Иногда модуль Юнга называют и «модулем упругости первого рода». Однако использование этого термина в настоящее время не рекомендуется.

Заметим, что существуют материалы (например, чугун), которые лишь с некоторым приближением можно считать подчиняющимися закону Гука. А такие материалы, как кожа и ткани, и вовсе ему не подчиняются.

Необходимо также отметить, что материалы, которые подчиняются закону Гука, перестают ему следовать при достижении деформации (напряжения) определенного значения.

2.10. Что характеризует модуль продольной упругости? В каких единицах он измеряется?

Из формулы (2.4) видно, что чем больше модуль Юнга, тем меньше (при том же значении напряжения) деформация материала. Следовательно, модуль продольной упругости характеризует **жесткость материала при растяжении (сжатии)**. Из этой же формулы видно, что модуль Юнга измеряется в тех же единицах, что и нормальное напряжение σ_x .

Так, например, для всех марок сталей $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, для алюминиевых сплавов $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа, для пленки скорлупы яйца $E = 8$ МПа, а для алмаза $E = 12 \cdot 10^5$ МПа.

К сожалению, само название – **модуль продольной упругости** – провоцирует иногда студента на неверное истолкование его физического смысла. Так, на вопрос о том, что он характеризует, зачастую можно услышать следующий *неверный* ответ: «Модуль Юнга характеризует упругость материала. Поэтому, чем он больше, тем больше упругость материала».

Напомним, что **упругость** – это **способность** восстанавливать первоначальные размеры и форму после снятия внешней нагрузки. Следовательно, к упругости, в этом смысле слова, модуль Юнга не имеет никакого отношения. Закон Гука, в котором фигурирует модуль продольной упругости E , говорит нам о том, что напряжение пропорционально деформации только в пределах упругих деформаций. И именно в том смысле следует понимать слово «упругость» в упомянутом термине.

2.11. Как вычисляется абсолютное удлинение стержня?

Из формул (2.2), (2.3) и (2.4) легко получить зависимость для абсолютного удлинения стержня:

$$\Delta l = Nl/EF. \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) иногда также называют законом Гука, но уже не для материала, а для всего стержня. Произведение EF , стоящее в знаменателе формулы (2.5), характеризует **жесткость стержня** при растяжении (сжатии).

2.12. Какие напряжения возникают в наклонных сечениях стержня, то есть в сечениях, которые не являются поперечными?

Начнем ответ со следующих рассуждений. Да, мы уже умеем определять нормальные напряжения, которые возникают в *опасном поперечном* сечении стержня. Но можем ли мы утверждать, что эти нормальные напряжения являются наибольшими и именно их значения следует использовать для оценки прочности стержня? Нам уже известно, что касательные напряжения в поперечном сечении стержня при растяжении (сжатии) не возникают. Но возникают ли они в *наклонных* сечениях?

Таким образом, нам необходимо научиться определять напряжения на **любых** площадках, проходящих через некоторую точку K тела, и находить именно те площадки, на которых нормальные и касательные напряжения достигают наибольших значений.

А теперь ответим на поставленный вопрос. **Разрежем** стержень, растягиваемый силами P , плоскостью, проходящей через точку K и наклоненной под углом α к поперечному сечению (рис. 2.2, а). **Отбросим** правую часть стержня.

Внешняя нормаль z' к этому *наклонному* сечению будет составлять с осью z такой же угол α . Действие отброшенной нами правой части стержня на левую часть **заменяем** внутренними усилиями (рис. 2.2, б). Чтобы левая часть стержня находилась в **равновесии**, в каждой точке наклонного сечения стержня должно возникнуть *продольное* противодействующее усилие. Очевидно, что равнодействующая *всех* этих внутренних усилий N равна внешней силе P .

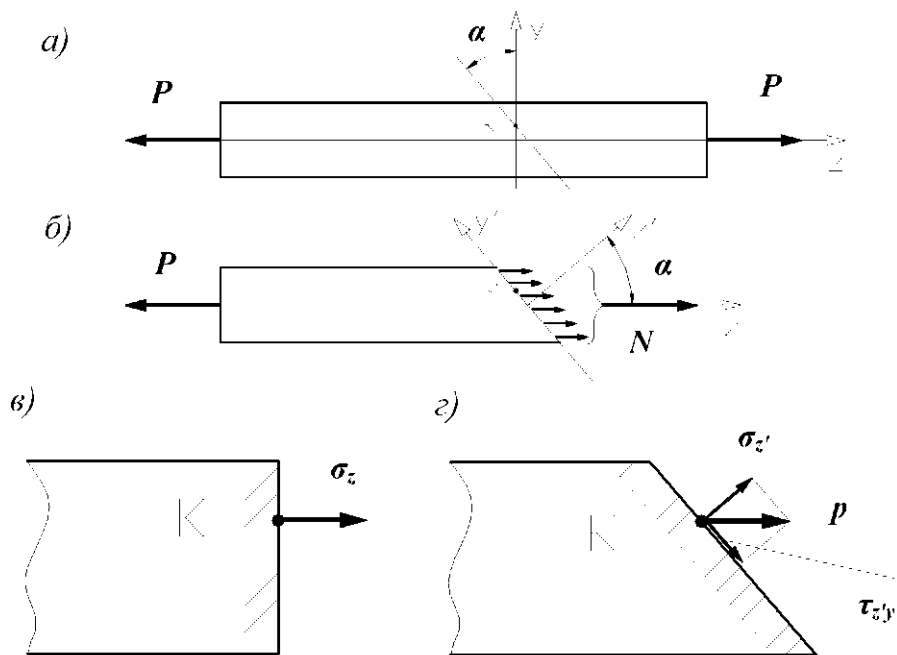


Рис. 2.2. Напряжения в наклонных сечениях

Будем считать, что внутренние усилия равномерно распределены по всей площади наклонного сечения $F_1 = F/\cos\alpha$. Тогда *полное* напряжение в *каждой* точке наклонного сечения будет равно:

$$p = N/F_1 = N \cos\alpha / F = \sigma_z \cos\alpha,$$

где $\sigma_z = N/F$ – нормальное напряжение, возникающее в этих же точках (в том числе и в точке K), но в *поперечном* сечении стержня (рис. 2.1, в).

Разложим полное напряжение p , возникающее в некоторой точке K наклонного сечения, на две составляющие – *нормальное* σ_z и *касательное* $\tau_{z'y'}$ напряжения (рис. 2.2, г). Они будут равны:

$$\sigma_z = p \cos\alpha = \sigma_z \cos^2\alpha; \quad \tau_{z'y'} = p \sin\alpha = \sigma \sin 2\alpha/2.$$

Проследим, как будет меняться каждое из этих напряжений с изменением угла наклона сечения α от нуля до 90° .

При увеличении угла α нормальное напряжение в точке K будет постепенно уменьшаться от своего максимального значения до нуля. Касательное напряжение при этом будет сначала возрастать от нулевого до максимального значения $\tau_{\max} = \sigma_z/2$ при $\alpha = 45^\circ$, а затем убывать. При угле $\alpha = 90^\circ$ касательное напряжение снова станет равным нулю.

Следовательно, **наибольшее нормальное** напряжение действительно возникает в точках **поперечного** сечения стержня. В **продольном** сечении оно равно **нулю**. Отсюда следует, что продольные волокна стержня не давят друг на друга.

Наибольшие **касательные** напряжения возникают в сечениях, расположенных под углом 45° к оси стержня. В поперечном и в продольном сечениях стержня они равны нулю.

2.13. Как проводится испытание материала на растяжение?

Механические характеристики *материала* определяются в результате испытания *образца* на специальных прессах. Форма образца может быть различной. Как правило, это стержень с участком *постоянного* поперечного сечения (круглого или прямоугольного) длиной l_0 . Концы образца имеют специальные утолщения для их закрепления в испытательной машине.

Перед началом испытания замеряется площадь поперечного сечения средней части образца F_0 . Значения растягивающей силы P и удлинения средней части образца Δl в каждый момент нагружения определяются специальными устройствами. При испытании нагрузка увеличивается медленно и плавно. Современные испытательные машины снабжены записывающим прибором, который при испытании образца автоматически вычерчивает график зависимости между нагрузкой P и абсолютным удлинением Δl . Такой график называется *диаграммой растяжения*. Идея построения такого графика была предложена *Яковом Бернулли*, поэтому он иногда называется *диаграммой Бернулли*.

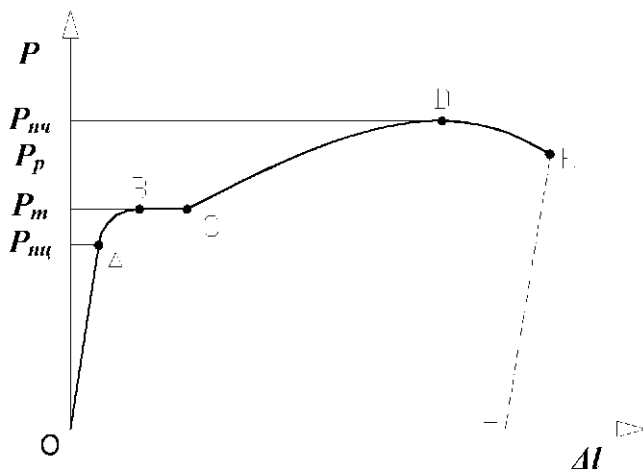


Рис. 2.3. Диаграмма растяжения образца из стали марки Ст. 3 в осях $P - \Delta l$

Рассмотрим, например, диаграмму растяжения образца, изготовленного из стали марки Ст. 3 (рис. 2.3). Заметим, что эта диаграмма характеризует поведение именно **образца**, а не **материала**, из которого он сделан.

В начальной стадии испытания, до точки A с ординатой P_{nc} (индекс «*nc*» – сокращение от слова *пропорциональность*), зависимость между силой P и удлинением Δl

носит *линейный* характер, то есть удлинение образца растет пропорционально росту внешней нагрузки. Этот факт свидетельствует о *линейной деформируемости* образца. Затем диаграмма искривляется и при некотором значении растягивающей силы P_m (индекс «*m*» – сокращение от слова *текучесть*) наблюдается значительный рост удлинения образца без увеличения нагрузки. Это явление называется *текучестью*. Практически горизонтальный участок диаграммы BC называется *площадкой текучести*, а точка B – *критической точкой* диаграммы. При некотором значении растягивающей силы P_m , соответствующем критической точке B , на поверхности образца, если он, например, полирован, мы заметим появление сначала нескольких полосок, параллельных между собой и расположенных под углом примерно 45° к оси образца. Далее появляется вторая система линий, пересекающая первую и наклоненную к оси под тем же углом, что и первая. Такая система сопряженных линий называется *линиями Людерса – Чернова*. Эти линии впервые были описаны в 1859 г. немецким металлургом *В. Людерсом* и независимо от него в 1884 г. русским металлургом *Д.К. Черновым* (1839 – 1921 гг.).

Упомянутые линии представляют собой следы *сдвигов* частиц материала. *Направления этих линий соответствуют площадкам, на которых при растяжении возникают наибольшие касательные напряжения.*

За точкой C удлинение образца начинает расти быстрее нагрузки. Число *линий Людерса – Чернова* растет, они сливаются друг с другом и теряют ясность своих очертаний. Этот участок диаграммы называется *зоной упрочнения*. В наивысшей точке диаграммы (в точке D) при силе равной $P_{max} = P_{nc}$ (индекс «*nc*» – сокращение от слова *прочность*) на образце внезапно появляется местное сужение – *шейка*, которая представляет собой результат накопления деформаций сдвига. Сопротивление образца

растяжению, после образования шейки, падает, и его *разрыв* происходит в точке K при нагрузке $P_p < P_{nc}$ (индекс «р» – сокращение от слова *разрыв*).

При разрыве образца, как правило, появляется поперечная трещина в центре тяжести поперечного сечения (посредине шейки), а остальная часть сечения скалывается под углом 45° к оси образца так, что на одной части разорванного образца образуется *выступ*, а на другой – *кратер*.

Линия разгрузки образца KL представляет собой прямую линию, параллельную участку OA . Следовательно, полное удлинение образца в момент разрыва (в точке K) состоит из двух частей: упругого, исчезающего после снятия нагрузки, и остаточного, равного длине отрезка OL .

2.14. Силы и удлинения, соответствующие характерным точкам диаграммы Бернулли, зависят не только от свойств материала, но и от размеров образца. А как определить механические характеристики материала образца?

Для того чтобы исключить влияние абсолютных размеров образца, диаграмму, изображенную на рис. 2.3, перестраивают: ординаты делят на начальную площадь поперечного сечения F_0 , а абсциссы – на начальную расчетную длину образца l_0 . В результате получается так называемая *условная диаграмма растяжения*. Она строится в координатах $\varepsilon_z - \sigma_z$ (рис. 2.4) и отличается от диаграммы Бернулли только масштабом.

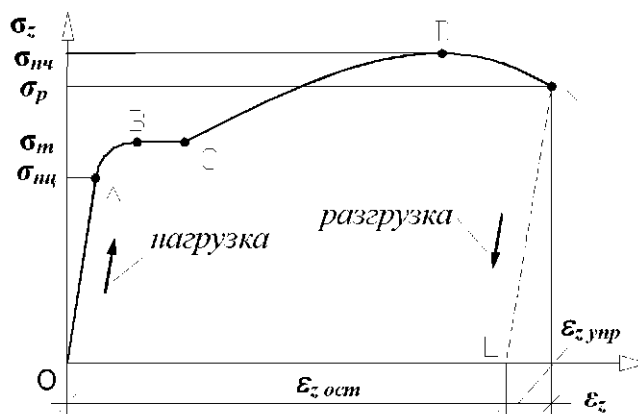


Рис. 2.4. Диаграмма растяжения образца из стали марки Ст. 3 в осях $\varepsilon_z - \sigma_z$

Условной эта диаграмма называется потому, что напряжения и деформации вычисляются по *первоначальным* размерам образца. Справедливость такого подхода определяется только практическими соображениями.

На условной диаграмме (см. рис. 2.4) отмечены следующие основные механические характеристики материала:

На условной диаграмме (см. рис. 2.4) отмечены следующие основные механические характеристики материала:

- **предел пропорциональности** – наибольшее напряжение, до которого выполняется закон Гука

$$\sigma_{nc} = P_{nc} / F_0 ;$$

- **предел текучести** – напряжение, при котором материал «течет»

$$\sigma_m = P_m / F_0 ;$$

- **предел прочности** – наибольшее напряжение, которое выдерживает материал без разрушения

$$\sigma_{nc} = P_{nc} / F_0 .$$

Например, для стали марки Ст. 3 упомянутые выше характеристики соответственно равны: $\sigma_{nc} \approx 210$ МПа, $\sigma_m \approx 240$ МПа, $\sigma_{tr} \approx 400$ МПа.

2.15. Для всех ли материалов диаграмма растяжения имеет вид, показанный на рис. 2.4?

Конечно же, нет. На рис. 2.4 приведена диаграмма растяжения для стали марки Ст. 3. Этот материал относится к так называемым *пластичным* материалам, которые имеют площадку текучести и разрушаются при *больших* остаточных деформациях.

Необходимо, правда, отметить, что не для всех пластичных материалов площадка текучести имеет *четко* выраженный характер. Для таких материалов вводится понятие *условного (или технического) предела текучести*, представляющего собой напряжение, которое возникает в материале образца при относительном его удлинении, равном 0,2 %.

Иногда условный предел текучести обозначают $\sigma_{0,2}$.

Заметим, что *пластичность* – это *положительное* свойство материала. Она играет большую роль в обеспечении надежности конструкций. Пластические свойства материала оцениваются следующими двумя характеристиками, которые также определяются при испытании на растяжение:

- *относительное остаточное удлинение образца при разрыве* (в процентах), вычисляемое по формуле

$$\delta = [(l_1 - l_0) / l_0] \times 100 ,$$

где l_1 – конечная длина расчетной части образца;

- *относительное поперечное сужение образца при разрыве* (в процентах), определяемое по формуле

$$\psi = [(F_0 - F_1) / F_0] \times 100 ,$$

где F_1 – площадь поперечного сечения образца в месте разрыва (иными словами, площадь поперечного сечения шейки).

Однако существуют и такие материалы, например чугун, которые характерны тем, что они вообще *не имеют* площадки текучести. Их разрушение происходит *без образования шейки*. Диаграмма сжатия для них обрывается сразу же после достижения предела прочности и при очень *малых* остаточных деформациях. Такие материалы называют *хрупкими*.

2.16. В учебниках по сопротивлению материалов встречаются два понятия: «предел прочности» и «временное сопротивление разрыву». Тожественны ли они?

Не совсем. Первое из них относится к случаю, когда образец разрушается без образования шейки, что характерно для *хрупких* материалов. Второе относится к *пластичным* материалам. Временное сопротивление

разрыву обозначают σ_{σ} . В настоящем пособии мы не разграничиваем эти два понятия и принимаем для них общее, указанное выше, обозначение σ_{m} .

2.17. Как ведут себя материалы при испытании на сжатие?

Строительные материалы, такие как бетон и цемент, испытывают в основном на сжатие. Дерево испытывают на сжатие как вдоль, так и поперек волокон. Сталь испытывают на сжатие реже, чем на растяжение.

Образцы для испытания на сжатие имеют, как правило, форму кругового цилиндра с отношением высоты образца к диаметру не более 3.

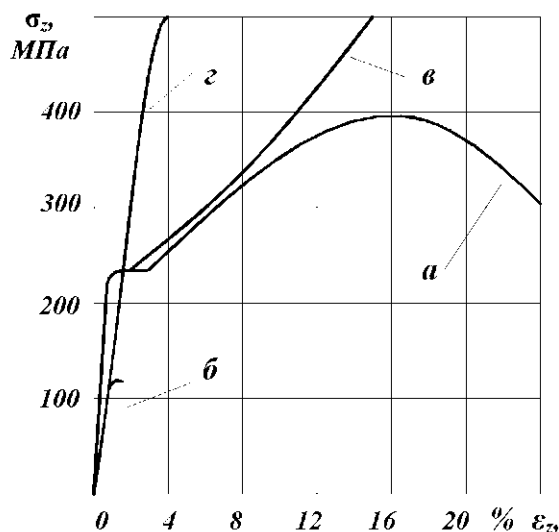
Для стали марки Ст. 3 *диаграмма сжатия* вплоть до предела текучести полностью повторяет диаграмму растяжения, то есть $\sigma_{m}^{(c)} = \sigma_{m}^{(p)}$, $\sigma_m^{(c)} = \sigma_m^{(p)}$. Различие начинает сказываться после наступления текучести. При этом *площадка текучести при сжатии менее четко выражена, чем при растяжении*. При больших деформациях различие становится особенно ощутимым, и в первую очередь из-за того, что сжатие сопровождается увеличением площади поперечного сечения образца, вследствие чего испытание требует постоянно возрастающей нагрузки.

Следовательно, *при сжатии пластичного материала получить такую характеристику, как предел прочности, не представляется возможным*. Исследуемый образец, не претерпевая разрушения, расплющивается, и дальнейшее испытание ограничивается возможностями пресса.

В расчетной практике предел прочности пластичного материала на сжатие условно принимается таким же, как и на растяжение.

Диаграмма сжатия *хрупкого* материала по виду напоминает диаграмму растяжения, но предел прочности на сжатие, как правило, в несколько раз больше, чем на растяжение ($\sigma_{m}^{(c)} \gg \sigma_{m}^{(p)}$). Разрушение образца при сжатии происходит обычно путем сдвига одной части относительно другой, происходящим примерно под углом 45° к оси образца.

Рис. 2.5. Сравнительные свойства низколегированной стали и серого чугуна при испытании на растяжение и сжатие: а – диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали; б – диаграмма растяжения серого чугуна; в – диаграмма сжатия низкоуглеродистой стали; г – диаграмма сжатия серого чугуна



Наглядное представление о сравнительных механических характеристиках низкоуглеродистой стали и серого чугуна при растяжении и сжатии дают диаграммы, показанные на рис. 2.5.

2.18. Какое напряжение называется *допускаемым*? Как записывается условие прочности при растяжении и сжатии?

Испытания материала на растяжение и сжатие позволяют определить *предельные* напряжения $\sigma_{пред}$, то есть те напряжения, при которых *материал образца непосредственно разрушается* или же в нем возникают *большие пластические деформации*.

Таким образом, в качестве *предельного* напряжения принимается:

- для пластичного материала – *предел текучести* (то есть считается, что разрушение пластичного материала начинается при появлении в нем *заметных* пластических деформаций):

$$\sigma_{пред} = \sigma_m^{(p)} = \sigma_m^{(c)} = \sigma_m;$$

- для хрупкого материала – *предел прочности*, значение которого при растяжении и сжатии различно: $\sigma_{пред} = \sigma_{пч}^{(p)}$ или $\sigma_{пред} = \sigma_{пч}^{(c)}$.

Для обеспечения прочности *реального стержня* необходимо так выбрать его размеры и материал, чтобы наибольшее нормальное напряжение, возникающее в некоторой точке, было *меньше* предельного напряжения:

$$\sigma_{zmax} < \sigma_{пред}.$$

Однако даже в том случае, когда наибольшее *расчетное* напряжение σ_{zmax} в стержне будет близко к *предельному* напряжению, гарантировать его прочность еще нельзя. Дело в том, что внешние нагрузки, воздействующие на реальный стержень, не могут быть нами определены достаточно точно. Да и расчетные напряжения в стержне в ряде случаев могут быть вычислены лишь приближенно. Наконец, возможны отклонения действительных механических характеристик материала, применяемого для стержня, от характеристик, заложенных в расчете. Из сказанного следует, что стержень должен быть спроектирован с некоторым *расчетным коэффициентом запаса прочности*:

$$n = \sigma_{пред} / \sigma_{zmax} > 1. \quad (2.6)$$

Ясно, что чем больше n , тем прочнее деталь. Однако совершенно очевидно, что очень большой коэффициент запаса прочности приводит к перерасходу материала и это делает стержень тяжелым и неэкономичным.

В зависимости от назначения конструкции и целого ряда других обстоятельств устанавливается *допускаемый (или нормативный) коэффициент запаса прочности*, который обозначается $[n]$.

Прочность стержня считается обеспеченной, если $n \geq [n]$. Это условие и называют *условием прочности*.

Используя выражение (2.6), перепишем условие прочности в виде:

$$n = \sigma_{пред} / \sigma_{z\max} \geq [n].$$

Отсюда можно получить и другую форму записи условия прочности:

$$\sigma_{z\max} \leq \sigma_{пред} / [n].$$

Отношение предельного напряжения к допускаемому коэффициенту запаса прочности (то есть отношение, стоящее в правой части последнего неравенства) называется **допускаемым напряжением**. Оно обозначается $[\sigma]$ и определяется по формуле

$$[\sigma] = \sigma_{пред} / [n].$$

В случае, когда предельные и соответственно допускаемые напряжения при растяжении и сжатии различны, их обозначают $[\sigma]_p$ и $[\sigma]_c$.

Пользуясь понятием допускаемого напряжения, можно условие прочности сформулировать следующим образом: *прочность стержня будет обеспечена, если возникающее в нем наибольшее напряжение не превышает допускаемого напряжения.*

Тогда окончательно условие прочности при растяжении (сжатии) записывается в следующем виде:

$$\sigma_{z\max} = N_{\max} / F \leq [\sigma]. \quad (2.7)$$

В случае, когда *расчетное* напряжение $\sigma_{z\max}$ получается значительно ниже *допускаемого*, площадь *опасного* поперечного сечения стержня должна быть уменьшена.

2.19. А что делать, когда расчетное напряжение незначительно, но все же *превышает* допускаемое напряжение?

Такое незначительное превышение в расчетах на прочность допускается, но не более, чем на 5 %.

К сожалению, приходится констатировать, что студенты не всегда правильно понимают условие прочности (2.7). Так, на естественный вопрос, что произойдет со стержнем (конструкцией), если расчетное напряжение $\sigma_{z\max}$ превысит допускаемое напряжение $[\sigma]$, например, на 10 %, можно услышать ответ, что конструкция *разрушится*.

Это неверно. Она может и не разрушиться, если, например, выполняется условие, что $\sigma_{z\max} < \sigma_{пред}$. Еще раз подчеркнем, что *допускаемое напряжение представляет собой долю от предельного напряжения.*

Поэтому незначительное превышение *расчетного* напряжения над *допускаемым* напряжением означает лишь только снижение надежности конструкции. В этом случае *расчетный* коэффициент запаса прочности получается меньше *допускаемого* ($n < [n]$).

2.20. По какой формуле осуществляется подбор *требуемой площади поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии)?*

Из неравенства (2.7) следует, что

$$F_{\text{треб}} \geq N_{\text{max}} / [\sigma].$$

2.21. В учебниках по сопротивлению материалов очень часто вместо термина «*предельное напряжение*» употребляется термин «*опасное напряжение*». Они одинаковы?

Предпочтение, на наш взгляд, следует отдать термину «*предельное напряжение*», которое и используется в настоящем пособии. И вот почему.

Слово «*опасный*» ассоциируется только с *предупреждением* о возможности или о большой вероятности *разрушения* и вовсе не означает, что оно уже началось или обязательно должно произойти. Но, если напряжение, например, достигло предела прочности, то нет никаких сомнений, что разрушение действительно началось. И это напряжение *предельное*, а не *опасное*.

2.22. А как записывается *условие жесткости*?

Оно имеет вид: $\Delta l \leq [\Delta l]$, где $[\Delta l]$ – допускаемое удлинение стержня.

2.23. Что понимается под *энергией упругой деформации при растяжении (сжатии)* и чему она равна?

В науке под *энергией* понимается *способность совершать работу*.

При растяжении (сжатии) внешние силы совершают работу на перемещениях, которые получают точки их приложения в результате деформирования стержня. Вследствие этой работы, внутри тела накапливается потенциальная энергия деформации V . Последняя измеряется в системе СИ в джоулях (1 ДЖ = 1 Н·м). Один *джоуль* – это примерно потенциальная энергия яблока, находящегося на кухонном столе, по отношению к полу.

Энергию можно запасти, например, в пружине. Однако, как заметил Гук, поведение пружины является прототипом поведения деформируемого твердого тела при воздействии на него внешней нагрузки. Таким образом, любое деформируемое упругое тело является как бы аккумулятором энергии.

Потенциальная энергия деформации при растяжении (сжатии) определяется по формуле (подробнее см. беседу 15)

$$V_N = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF} dz.$$

2.24. Какие системы называются *статически неопределимыми*?

Системы, для которых не удастся определить все опорные реакции из уравнений статики, называются статически неопределимыми.

Рассмотрим, например, нагруженный стержень, заделанный обоими концами (рис. 2.6, а). В заделках возникают реакции, направленные вдоль оси стержня: R_A и R_B . Для их определения мы имеем только одно уравнение статики:

$$\sum Z = -R_A + P - R_B = 0. \quad (2.8)$$

Назовем эту расчетную схему *заданной системой (ЗС)*.

Для раскрытия статической неопределенности необходимо записать *дополнительное* уравнение. Это уравнение связано с деформацией ЗС и называется *уравнением перемещений*.

Поступим следующим образом. Отбросим, например, нижнюю заделку и действие отброшенной связи на стержень заменим некоторой реактивной силой R_B , которую мы в дальнейшем будем рассматривать как активную силу (рис. 2.6, б). Полученный таким образом стержень назовем *основной системой (ОС)*. Это название происходит от слова «основа» для дальнейшего расчета. Полученный нами стержень уже является статически определенным. Он заделан одним концом и нагружен двумя активными силами P и R_B . Правда, значение силы R_B мы пока не знаем.

Очевидно, что удлинение ЗС равно нулю, то есть $\Delta l = 0$. Поэтому неизвестную нам силу R_B мы можем найти из условия, что и удлинение ОС тоже равно нулю:

$$\Delta l = \Delta l_{OC} = 0.$$

Это уравнение и является тем самым *дополнительным* уравнением (*уравнением перемещений*), которое свидетельствует о том, что *заданная и основная системы деформируются одинаково*.

Используя принцип суперпозиции, запишем удлинение ОС в виде:

$$\Delta l_{OC} = -\frac{R_B l}{EF} + \frac{Pa}{EF} = 0.$$

Отсюда легко находим, что

$$R_B = Pa/l.$$

Таким образом, статическая неопределенность нами раскрыта.

Вернемся к ЗС. Из уравнения (2.8) находим опорную реакцию R_A :

$$R_A = P - R_B = P - Pa/l = Ph/l.$$

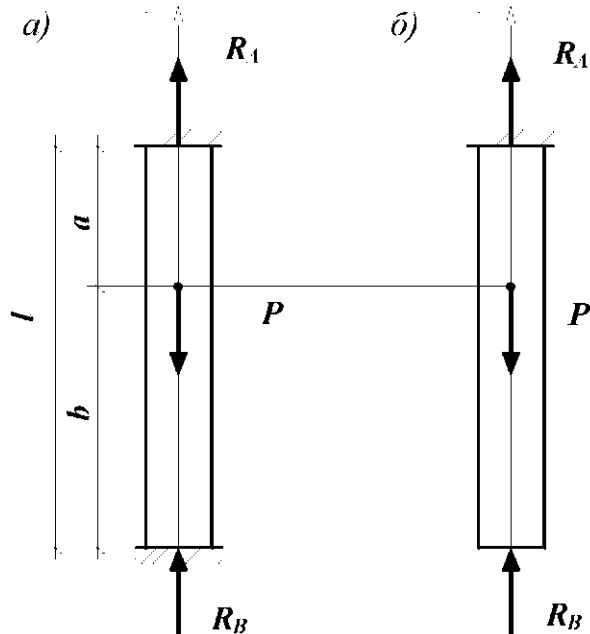


Рис. 2.6. Статически неопределенный стержень при растяжении (сжатии)

Теперь мы можем перейти к построению эпюры продольных сил, определению напряжений и деформаций в стержне, оценке его прочности и жесткости.

2.25. Возникают ли в стержне напряжения при его *нагреве* или *охлаждении*?

Если при нагреве (охлаждении) стержня ничто не препятствует изменению его длины, то никаких напряжений в нем *не возникает*.

При нагреве линейные размеры тела увеличиваются, а при охлаждении – уменьшаются. Абсолютное удлинение стержня, вызванное изменением его температуры на Δt градусов Цельсия, определяется по формуле

$$\Delta l_t = \alpha l \Delta t,$$

где α – коэффициент линейного расширения материала стержня, а l – его длина.

Для стали, например, коэффициент линейного расширения примерно равен $\alpha = 0,0000115$. Если стальной стержень с первоначальной длиной $l = 1$ м равномерно нагреть на 20°C , то его длина увеличится на 0,23 мм.

Иная картина имеет место для *статически неопределимого стержня*.

Предположим, что мы нагреваем стержень, жестко защемленный по концам (см., например, рис. 2.6, *а* ($P \equiv 0$)). Стержень хотел бы *удлиниться* на величину $\Delta l_t = \alpha l \Delta t$, но этому препятствуют заделки. В них возникают реактивные силы $R_A = R_B$, которые в итоге приводят к *сжатию* стержня.

Таким образом, при нагреве (охлаждении) статически неопределимого стержня в нем *всегда* возникают напряжения, которые принято называть *температурными напряжениями*.

Определим температурные напряжения σ_t в рассмотренном нами случае. Отбросим мысленно нижнюю заделку и действие отброшенной связи на стержень заменим реактивной силой R_B (см. рис. 2.6, *б* ($P \equiv 0$)).

Удлинение стержня Δl , равное нулю, может быть представлено в виде

$$\Delta l = \Delta l_t - \Delta l(R_B) = \alpha l \Delta t - R_B l / EF = 0.$$

Отсюда

$$R_B = \alpha \Delta t EF.$$

Тогда температурные напряжения в стержне равны

$$\sigma_t = N/F = R_B/F = \alpha \Delta t E.$$

2.26. Следует ли учитывать *собственный вес* стержня при *растяжении* и *сжатии*?

Знакомясь выше с теорией растяжения и сжатия стержня, мы *пренебрегли* влиянием его *собственного веса*. Дело в том, что при тех значительных внешних нагрузках, с которыми приходится сталкиваться при расчете *реального* стержня относительно *небольшой* длины, увеличение

напряжения в нем за счет собственного веса в процентном выражении весьма невелико и поэтому собственный вес такого стержня действительно можно не учитывать.

Другую картину мы будем наблюдать при расчете *очень длинных* стержней, например, канатов, применяемых для подъема руды, или штанг насосов, используемых для откачивания воды в рудниках. Здесь собственный вес стержня уже будет играть большую роль.

Рассмотрим жестко закрепленный верхним концом стержень длиной l и площадью поперечного сечения F . Пусть вес единицы объема материала стержня (удельный вес) равен γ . Тогда вес всего стержня $G = \gamma Fl$.

Наибольшие нормальные напряжения, которые возникнут в поперечном сечении стержня вблизи заделки, будут равны

$$\sigma_{\max} = N_{\max} / F = G / F = \gamma l.$$

Из условия прочности $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ можно определить *предельную длину* стержня:

$$l_{np} = [\sigma] / \gamma.$$

Рассмотрим, например, пеньковый канат, удельный вес которого $\gamma = 0,01$ мН/м³. При допускаемом напряжении $[\sigma] = 5$ МПа предельная длина получается равной:

$$l_{np} = 5 / 0,05 \approx 500 \text{ м.}$$

Как известно, глубина многих рудников бывает гораздо больше полученного значения.

Иногда определяют не предельную, а так называемую *разрывную длину* стержня:

$$l_p = \sigma_{nc} / \gamma,$$

где σ_{nc} – предел прочности.

Например, для каната, изготовленного из стали марки Ст. 3 с пределом прочности $\sigma_{nc} = 400$ МПа и удельным весом $\gamma = 0,078$ МН/м³, получим:

$$l_p = 400 / 0,078 \approx 5130 \text{ м.}$$

2.27. Правильно ли говорить, например, «загрузить стержень такой-то нагрузкой», «загруженный элемент» и т. п.?

Действительно, в устной речи, а иногда в учебной и технической литературе можно встретить подобные или иные выражения. Однако эти выражения, конечно же, неправильные. *Загрузить* можно какую-либо емкость, например «загрузить вагон». Правильно говорить «нагрузить стержень», «нагруженный элемент» и т. д.

3. СДВИГ

Если деформация растяжения возникает, когда стержень тянут, а сжатия – когда его сдавливают, то деформация *сдвига* происходит тогда, когда его пытаются, например, разрезать ножницами. Сдвиг и будет темой нашей третьей беседы. Вследствие сдвига разрушаются сварные и болтовые соединения, дают течь корабли, шатаются столы и т. п.

3.1. Что такое *сдвиг*? Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях стержня при сдвиге?

Сдвигом называется такой вид деформации, при котором одна часть стержня *смещается* относительно другой (как скользят, например, карты в колоде). Деформация сдвига будет происходить, например, в том случае, если к стержню приложить две равные по значению и противоположно направленные силы P , перпендикулярные к его оси z (рис. 3.1, *a*). Расстояние между этими силами Δz должно быть очень малым, чтобы моментом $P \cdot \Delta z$, создаваемым этими силами, можно было пренебречь.

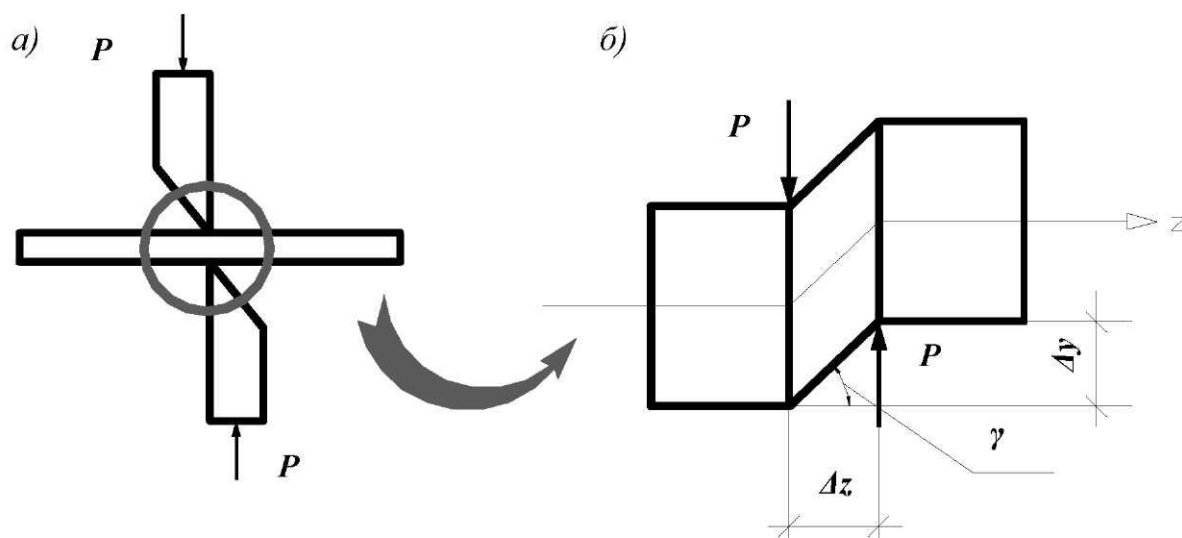


Рис. 3.1. Деформация сдвига

Применив *метод сечений* (разрезав стержень между силами P), можно легко установить, что в поперечном сечении стержня возникает только одно внутреннее усилие – *поперечная (перерезывающая) сила* $Q_y = P$.

Далее мы увидим, что сдвиг возникает и при *кручении* стержня.

3.2. Что называется *абсолютным сдвигом* и *углом сдвига* (относительным сдвигом)?

В результате деформации сдвига одно поперечное сечение стержня смещается относительно другого на некоторую величину Δy , называемую *абсолютным сдвигом*.

Малый угол γ , на который изменится первоначально *прямой* угол (рис. 3.1, б), называется *углом сдвига* или *относительным сдвигом*. Угол сдвига выражается в *радианах*.

3.3. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях стержня при сдвиге?

Как уже отмечалось во введении, при смещении одного поперечного сечения относительно другого возникают *касательные* напряжения.

Будем считать, что касательные напряжения распределены по всей площади поперечного сечения *равномерно* (рис. 3.2).

Тогда, если в поперечном сечении стержня площадью F возникает перерезывающая сила $Q_y = P$, то касательные напряжения в *любой* точке этого сечения будут равны

$$\tau_{zy} = Q_y / F.$$

Касательные напряжения τ_{zy} измеряются в тех же единицах, что и нормальные напряжения σ_z : мегапаскалях, килоньютонах на квадратный сантиметр (МПа, кН/см²), а также в килограммах силы на квадратный сантиметр или миллиметр (кгс/см², кгс/мм²).

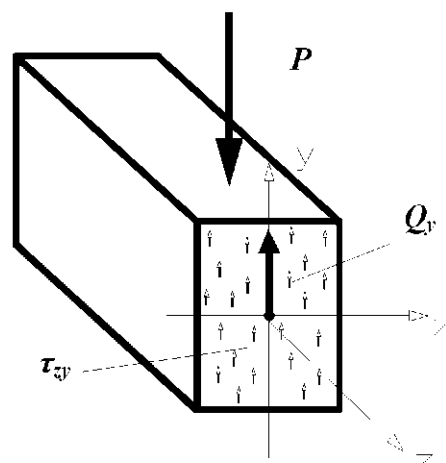


Рис. 3.2. Касательные напряжения при чистом сдвиге

3.4. Как записывается закон Гука при сдвиге? Что называется модулем сдвига и в каких единицах он измеряется?

Опытным путем установлено, что в пределах *упругой* сдвиговой деформации касательные напряжения пропорциональны углу сдвига:

$$\tau_{zy} = G\gamma. \quad (3.1)$$

Соотношение (3.1) представляет собой *закон Гука при сдвиге*.

Коэффициент пропорциональности G в этой формуле называется *модулем сдвига*. Видно, что он измеряется в тех же единицах, что и касательное напряжение.

Модуль сдвига G является *физической постоянной* для материала, характеризующей его *жесткость при сдвиге*. Значение модуля сдвига G может быть определено экспериментально.

3.5. Какая зависимость существует между модулем сдвига и модулем Юнга?

Для *изотропных* материалов эта зависимость имеет вид:

$$G = E / [2(1 + \mu)].$$

Как уже отмечалось ранее, значение коэффициент Пуассона μ лежит в пределах $0 \leq \mu \leq 0,5$. Следовательно,

$$E/3 \leq G \leq E/2.$$

Например, для стали *любой* марки:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1 + 0,3)} \approx 8 \cdot 10^4 \text{ МПа.}$$

Аналогичное значение *модуля сдвига* для стали может быть получено в результате проведения эксперимента на сдвиг (или на кручение).

3.6. Как выглядит диаграмма $\gamma - \tau_{xy}$ при сдвиге?

Вид диаграммы $\gamma - \tau_{xy}$ аналогичен диаграмме $\varepsilon_z - \sigma_z$ при растяжении, которую мы рассматривали выше. Так, для *пластичного* материала на ней, в частности, имеются точки, характеризующие *предел пропорциональности* при сдвиге τ_{pq} , *предел текучести* τ_m , а также *предел прочности* τ_{pq} . Последний соответствует *срезу* образца. Для многих материалов между *пределом текучести* при сдвиге τ_m и *пределом текучести при растяжении* σ_m существует следующая зависимость:

$$\tau_m = \sigma_m / \sqrt{3}.$$

3.7. Чему равна потенциальная энергия деформации при сдвиге?

Если участок стержня длиной Δz испытывает чистый сдвиг, то накапливаемая в нем потенциальная энергия деформации определяется по формуле (подробнее см. беседу 15)

$$V_{Q_y} = \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{GF} \Delta z.$$

3.8. Как записывается условие прочности при сдвиге?

Касательное напряжение, отвечающее безопасной работе материала при сдвиге, называется *допускаемым напряжением* и обозначается $[\tau]$. Для *пластичных* материалов оно должно быть меньше предела текучести τ_m :

$$[\tau] = \tau_m / n_m,$$

а для *хрупких* материалов – меньше предела прочности τ_{pq} :

$$[\tau] = \tau_{pq} / n_{pq}.$$

Тогда условие прочности при сдвиге имеет вид:

$$\tau_{xy} = Q_y / F \leq [\tau]. \quad (3.2)$$

По формуле (3.2) осуществляется *проверочный расчет* соединений, работающих на срез.

Для определения *требуемой* площади поперечного сечения (*проектировочный расчет*) необходимо воспользоваться следующим неравенством, вытекающим из формулы (3.2):

$$F_{\text{треб}} \geq Q_y / [\tau].$$

3.9. Что такое срез? И как правильнее говорить «расчет на сдвиг» или же «расчет на срез»?

Под **срезом** обычно понимается непосредственное разрушение материала стержня, происходящее в результате деформации сдвига.

Под **сдвигом** понимается, собственно, угловая деформация или же вид напряженного состояния — чистый сдвиг.

Нам представляется, что, например, при проверке прочности соединений предпочтительнее говорить: «расчет на срез». Если же мы изучаем напряженное состояние, то правильнее говорить: «напряженное состояние при сдвиге».

3.10. В некоторых учебниках по сопротивлению материалов для модуля сдвига G встречаются и другие наименования, например, модуль упругости второго рода. Стоит ли использовать этот термин?

Употребление этого термина, как и другого термина «модуль упругости при сдвиге», которые, действительно, иногда можно встретить как в учебной литературе, так и в практике преподавания, мы бы не рекомендовали.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Ранее мы установили, что прочность и жесткость стержня при растяжении и сжатии определяются *площадью* его поперечного сечения F :

$$\sigma_z = N/F \leq [\sigma];$$
$$\Delta l = Nl/EF \leq [\Delta l].$$

То есть, чем больше *площадь* поперечного сечения стержня, тем меньше возникающее в нем напряжение и меньше удлинение стержня.

Аналогично в условии прочности при сдвиге мы опять встречаемся с *площадью* поперечного сечения F :

$$\tau_{xy} = Q_y/F \leq [\tau].$$

Однако при других видах деформации, в чем мы убедимся в последующих наших беседах, площадь поперечного сечения уже не является той геометрической характеристикой, которая исчерпывающе определяет способность стержня сопротивляться внешней нагрузке.

Возьмем, например, обычную ученическую линейку и начнем ее *изгибать*. Мы легко убедимся в том, что если расположить линейку «реб-

ром», то ее изгиб будет значительно меньше, чем в том случае, когда она будет расположена «плашмя».

Почему? Попробуем ответить на этот вопрос уже сейчас. При изгибе стержня его поперечные сечения *поворачиваются* вокруг некоторой оси (в дальнейшем мы узнаем, что эта ось называется *нейтральной*). И мерой сопротивления этому вращению, как нам известно из теоретической механики, является уже не площадь, а *момент инерции* поперечного сечения, который существенно зависит от *высоты* поперечного сечения.

Поэтому в настоящей беседе мы, отвлекаясь от физических свойств материала, и изучим некоторые *геометрические характеристики* поперечного сечения стержня, которые определяют его способность сопротивляться другим видам деформации, в частности, *изгибу* и *кручению*.

4.1. Что называется *статическим моментом* площади поперечного сечения относительно некоторой оси?

Рассмотрим произвольную плоскую фигуру (поперечное сечение стержня) площадью F . Проведем через произвольную точку O оси координат x и y . Выделим элемент площади dF с координатами x и y (рис. 4.1).

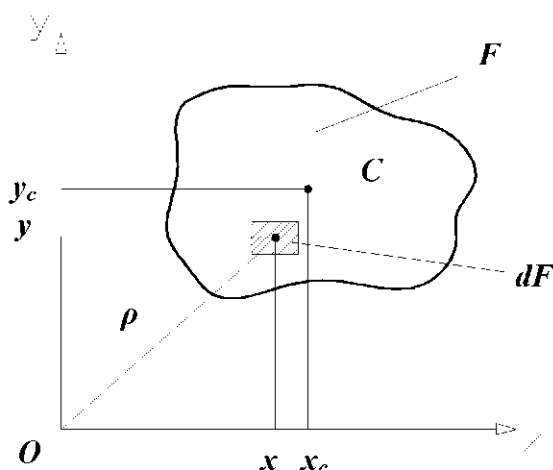


Рис. 4.1. Поперечное сечение стержня

По аналогии с понятием *момента силы относительно оси* введем понятие *статического момента* (или просто *момента*) *площади* фигуры относительно оси.

Величину, равную произведению площади dF на расстояние y до оси x (иными словами, произведение элементарной площади на *плечо*), назовем *статическим моментом элемента площади* относительно оси x :

$$dS_x = dF \cdot y.$$

По аналогии *статический момент элемента площади* dF относительно оси y будет равен:

$$dS_y = dF \cdot x.$$

Просуммировав такие произведения по всей площади F , мы получим *статические моменты* площади всей фигуры относительно осей x и y соответственно:

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF. \quad (4.1)$$

Статический момент площади фигуры относительно оси измеряется в единицах длины в кубе (как правило, в см^3). Он может быть *положительным*, *отрицательным* и, как мы увидим в дальнейшем, *равным нулю*.

Пусть x_c, y_c – координаты центра тяжести фигуры. Продолжая аналогию с моментом силы, можно записать следующие выражения:

$$S_x = Fy_c; \quad S_y = Fx_c. \quad (4.2)$$

Таким образом, *статическим моментом площади фигуры относительно оси называется произведение площади фигуры на расстояние от ее центра тяжести до этой оси.*

4.2. Как определить координаты центра тяжести поперечного сечения стержня?

Из формул (4.2) следует, что *статический момент площади фигуры относительно центральной оси (то есть оси, проходящей через центр тяжести фигуры) равен нулю.*

Сопоставляя (4.1) и (4.2), мы легко получим формулы, позволяющие определить положение центра тяжести поперечного сечения стержня:

$$x_c = \int_F x dF / F; \quad y_c = \int_F y dF / F. \quad (4.3)$$

Если площадь всей фигуры можно разбить на n простых частей, для которых известны и площадь F_i , и положение центра тяжести x_i и y_i , то вместо формул (4.3) мы получим:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$

4.3. Что называется осевым, полярным и центробежным моментами инерции фигуры? В каких единицах они измеряются?

Осевым моментом инерции площади фигуры называется интеграл произведений элементарных площадей на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси. Так, моменты инерции произвольной фигуры (см. рис. 4.1) относительно осей x и y соответственно равны:

$$I_x = \int_F y^2 dF; \quad I_y = \int_F x^2 dF. \quad (4.4)$$

Полярным моментом инерции площади фигуры относительно данной точки (полюса) называется интеграл произведений элементарных площадей на квадраты их расстояний до полюса:

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF. \quad (4.5)$$

Если через полюс проходят две взаимно перпендикулярные оси x и y , то $\rho^2 = x^2 + y^2$. И тогда

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = \int_F (x^2 + y^2) dF = I_x + I_y.$$

Из формул (4.4) и (4.5) видно, что значения осевых и полярного моментов инерции всегда *положительны*, поскольку координаты x, y и расстояние ρ входят в них в квадрате.

Центробежным моментом инерции площади фигуры называется интеграл произведений элементарных площадей на их расстояния до осей x и y :

$$I_{xy} = \int_F x y dF.$$

Моменты инерции измеряются в единицах длины в четвертой степени (как правило, см^4).

Понятие о моменте инерции впервые ввел в науку в 1673 г. французский ученый *Христиан Гюйгенс* (*Huygens*, 1629 – 1695 гг.).

4.4. Какие оси называются главными осями?

В зависимости от положения координатных осей *центробежный момент инерции* может быть *положительным, отрицательным, а также равным нулю*. Рассмотрим, например, квадрат (рис. 4.2, а).

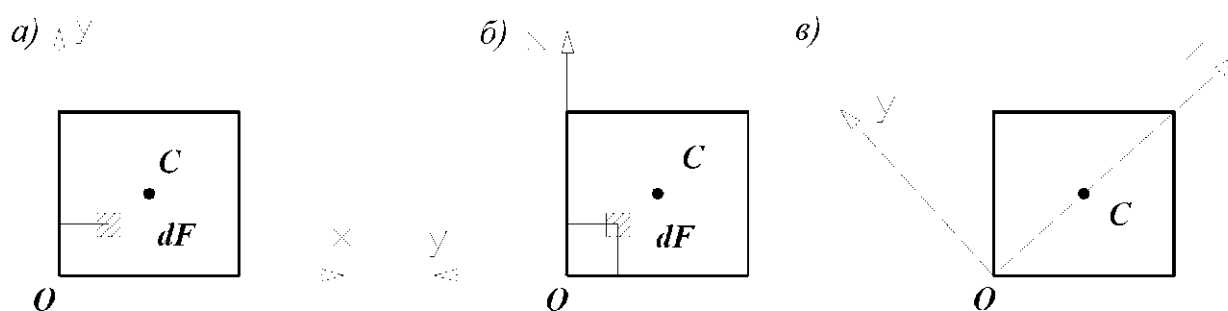


Рис. 4.2. Изменение центробежного момента инерции фигуры при повороте координатных осей

Центробежный момент инерции квадрата I_{xy} относительно осей x , y положителен, так как координаты x , y у всех элементов площади положительные. При повороте осей вокруг начала координат на угол 90° (рис. 4.2, б) знак центробежного момента инерции становится отрицательным, так как в этом случае координаты x всех элементарных площадей положительны, а координаты y – отрицательны.

Очевидно, что можно найти такое положение двух взаимно перпендикулярных осей x , y , при котором $I_{xy} = 0$. Такие оси называются **главными осями**. Для квадрата такие оси изображены на рис. 4.2, в.

Если фигура имеет ось **симметрии**, то эта ось является одной из главных осей (другая ось перпендикулярна ей).

Главные оси, проходящие через **центр тяжести** поперечного сечения стержня, называются **главными центральными осями**.

Понятие о главных осях впервые введено в 1755 г. Яношем Сегнером (*Segner*, 1704 – 1777 гг.) и, независимо от него, в 1758 г. Леонардом Эйлером (*Euler*, 1707 – 1783 гг.).

Заметим, что иногда *главные оси* называют *главными осями инерции*. Автор рекомендует пользоваться первым определением, поскольку термин *инерция* к осям не имеет никакого отношения.

4.5. Какие моменты инерции называются *собственными*?

Осевые и центробежный моменты инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести поперечного сечения стержня, иногда называются *собственными* моментами инерции.

4.6. По какой формуле вычисляются моменты инерции фигуры относительно оси, параллельной центральной? Какие моменты инерции называются *переносными*?

Пусть две взаимно перпендикулярные оси x и y проходят через центр тяжести C поперечного сечения стержня. Проведем другие оси координат x' и y' , параллельные осям x и y . Обозначим a и b координаты центра тяжести C в новых осях x' и y' (рис. 4.3, а).

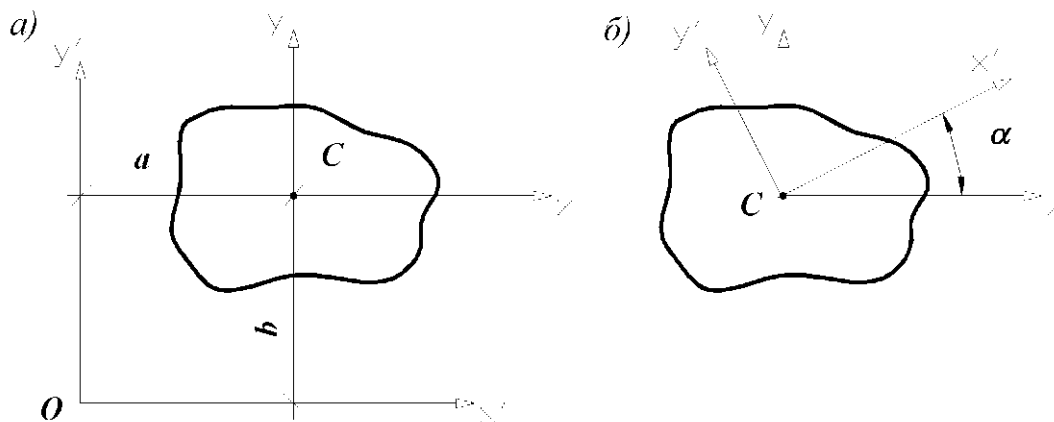


Рис. 4.3. Параллельный перенос и поворот координатных осей

Тогда осевые и центробежный моменты инерции фигуры относительно новых осей x' и y' будут определяться по следующим формулам:

$$I_{x'} = I_x + \underline{b^2 F}; \quad I_{y'} = I_y + \underline{a^2 F}; \quad I_{x'y'} = I_{xy} + \underline{abF}. \quad (4.6)$$

Очень часто эти формулы необоснованно приписывают немецкому ученому Якобу Штейнеру (Steiner, 1796 – 1863 гг.). Однако на самом деле они были доказаны еще в 1749 г. Эйлером.

Первые слагаемые в формулах (4.6) ранее нами были названы *собственными* моментами инерции. Вторые (подчеркнутые) слагаемые в этих формулах называются *переносными* моментами инерции.

Отметим, что координаты a и b подставляются в формулы (4.6) с учетом их знаков, что является крайне важным, в частности, для третьей из этих формул.

4.7. Как изменяются собственные моменты инерции при повороте координатных осей?

Пусть нам известны собственные моменты инерции I_x , I_y и I_{xy} относительно двух взаимно перпендикулярных осей x и y , проходящих через

центр тяжести C поперечного сечения стержня. Проведем через точку C другие оси x' и y' , повернутые относительно осей x и y на угол α (рис. 4.3, б). Будем считать этот угол *положительным*, если поворот осей происходит *против хода часовой стрелки*.

Можно показать, что моменты инерции поперечного сечения относительно *новых осей* x' и y' будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= (I_x + I_y)/2 + (I_x - I_y)\cos 2\alpha/2 - I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_{y'} &= (I_x + I_y)/2 - (I_x - I_y)\cos 2\alpha/2 + I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_{x'y'} &= (I_x - I_y)\sin 2\alpha/2 + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из формул (4.7) видно, что

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = \text{const}. \quad (4.8)$$

Следовательно, **сумма собственных осевых моментов инерции поперечного сечения является величиной постоянной**, то есть она не изменяется при повороте координатных осей.

Из этих же формул (4.7) можно получить следующую важную зависимость:

$$I_{x'}I_{y'} - I_{x'y'}^2 = I_x I_y - I_{xy}^2 > 0. \quad (4.9)$$

Как уже отмечалось выше, две взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр тяжести фигуры, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными центральными осями инерции*. Тогда при $I_{x'y} = 0$ из третьей формулы (4.7) после несложных преобразований можно определить направления этих осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -2I_{xy} / (I_x - I_y). \quad (4.10)$$

Из полученного выражения (4.10) мы найдем два значения угла α_0 , которые отличаются друг от друга на угол 90° . Они и определяют положение двух главных центральных осей инерции.

4.8. Какие собственные осевые моменты инерции называются главными центральными моментами инерции?

При повороте центральных осей и приближении их к главным центральным осям *большой из собственных осевых моментов инерции становится еще больше, стремясь к своему максимальному значению I_{\max} , а меньший – еще меньше, приближаясь к минимальному значению I_{\min}* .

Моменты инерции фигуры относительно главных центральных осей I_{\max} и I_{\min} называются главными центральными моментами инерции. Они могут быть вычислены по следующим формулам, вытекающим из соотношений (4.7) и (4.9):

$$I_{\max} = (I_x + I_y)/2 + \sqrt{(I_x - I_y)^2/4 + I_{xy}^2};$$

$$I_{\min} = (I_x + I_y)/2 - \sqrt{(I_x - I_y)^2/4 + I_{xy}^2}.$$
(4.11)

Из (4.11) легко получить следующее условие, аналогичное (4.8):

$$I_{\max} + I_{\min} = I_x + I_y = \text{const}.$$

4.9. Как для сложной фигуры определить, какая из главных центральных осей является осью максимум, то есть той осью, относительно которой осевой момент инерции принимает наибольшее значение I_{\max} ?

По определению осевой момент инерции равен интегралу произведений элементарных площадей на квадрат их расстояний до соответствующей оси. Поэтому чем больше элементарные площади удалены от оси и чем больше таких площадей, тем больше и осевой момент инерции.

4.10. Чему равны главные центральные моменты инерции простейших фигур: прямоугольника и круга?

Для прямоугольного поперечного сечения (рис. 4.4, а) оси x и y являются главными центральными осями, поскольку они проходят через центр тяжести фигуры и являются осями симметрии.

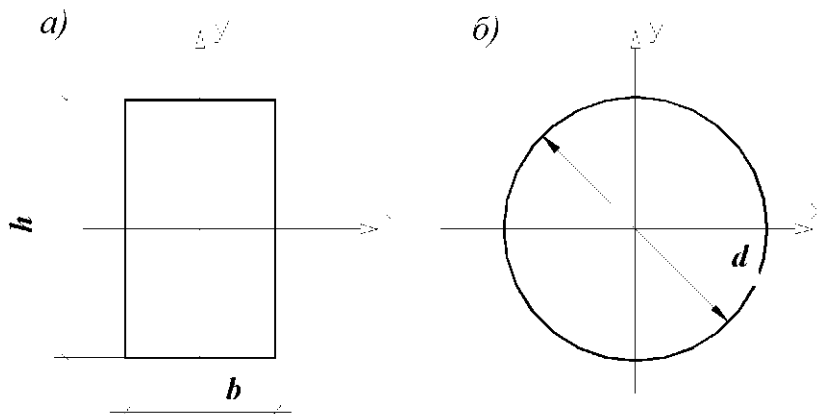


Рис. 4.4. Прямоугольное и круглое поперечные сечения стержня

Главные моменты инерции прямоугольника равны:

$$I_{\max} = I_x = bh^3/12; \quad I_{\min} = I_y = hb^3/12.$$

Необходимо запомнить, что размер стороны, параллельной рассматриваемой оси, входит в выражение для главного момента инерции прямоугольника в первой степени, а размер стороны, перпендикулярной к оси, в третьей степени.

Для круглого поперечного сечения любые две взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр тяжести фигуры, являются главными центральными осями (рис. 4.4, б). Очевидно также, что для круга $I_{\max} = I_{\min}$. Если d – диаметр круга, то $I_x = I_y = \pi d^4/64$.

Учитывая, что

$$I_{\rho} = I_x + I_y,$$

можно легко получить следующую формулу для *полярного* момента инерции стержня круглого поперечного сечения:

$$I_{\rho} = \pi d^4 / 32.$$

4.11. Встречаются ли помимо круглого поперечного сечения такие поперечные сечения, у которых *любые* центральные оси являются главными?

Да. Для *всех* поперечных сечений, у которых $I_{\max} = I_{\min}$, *любые* две взаимно перпендикулярны оси, проходящие через центр тяжести, всегда будут главными. Это правило вытекает из полученного нами ранее условия $I_{\max} + I_{\min} = I_x + I_y = \text{const}$, согласно которому ни один из осевых моментов инерции I_x или I_y не может быть меньше или больше, чем $I_{\max} = I_{\min}$. Следовательно, *осевые моменты инерции I_x и I_y тоже равны между собой и при повороте осей вообще не изменяются. Тогда любые две взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр тяжести поперечного сечения, являются главными центральными осями.*

Например, момент инерции квадрата относительно *любой* оси, проходящей через центр тяжести, равен $a^4/12$.

4.12. Что называется *радиусом инерции*?

Момент инерции фигуры относительно какой-либо координатной оси может быть представлен в виде произведения площади фигуры на квадрат некоторой величины, называемой *радиусом инерции*:

$$I_x = \int_F y^2 dF = F i_x^2; \quad I_y = \int_F x^2 dF = F i_y^2.$$

Новые геометрические характеристики в этих выражениях определяются по формулам

$$i_x = \sqrt{I_x / F}; \quad i_y = \sqrt{I_y / F}$$

и называются *радиусами инерции* поперечного сечения относительно осей x и y соответственно.

Главным центральным осям соответствуют *главные радиусы инерции*:

$$i_{\max} = \sqrt{I_{\max} / F}; \quad i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / F}.$$

Например, для *прямоугольника* (см. рис. 4.4, *a*) главные радиусы инерции равны:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h\sqrt{3}}{6}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \frac{b\sqrt{3}}{6}.$$

А для *круглого* поперечного сечения:

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{I_x}{F}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 / 64}{\pi d^2 / 4}} = \frac{d}{4}.$$

4.13. И все-таки, для чего нам необходимо знать положение главных центральных осей, а также значения главных центральных моментов инерции поперечного сечения стержня?

Их определение, как это не покажется уважаемому Читателю неожиданным, *напрямую* связано именно с обеспечением *прочности, жесткости и устойчивости* стержня (то есть, с теми основными вопросами, которые и изучаются в сопротивлении материалов), но при более сложных, чем центральное растяжение (сжатие) и сдвиг, видах деформации. Подробнее об этих видах деформации мы будем говорить в наших последующих беседах, а сейчас все-таки попытаемся ответить, хотя бы в общих чертах, на поставленный вопрос.

Рассмотрим следующий пример. Предположим, что нам необходимо заделать одним концом в стену обычную ученическую линейку, поперечное сечение которой представляет собой прямоугольник, у которого один размер (высота) намного больше другого размера (толщины). Предполагается, что на другом конце к этой линейке будет приложена вертикальная сила P .

Как нам следует расположить линейку в пространстве по отношению к этой нагрузке, чтобы напряжения в ней и прогиб свободного конца были минимальными? Ответ на этот вопрос очевиден – *«ребром»*. То есть таким образом, чтобы *силовая плоскость* (плоскость, в которой расположена внешняя нагрузка) была перпендикулярна к оси *максимум* поперечного сечения линейки. Правда, при этом нам необходимо помнить о том, что с ростом силы P линейка попытается «выскользнуть» из-под нагрузки. И в этом легко убедиться, выполнив соответствующий эксперимент. При некотором значении нагрузки $P_{кр}$, называемой *критической*, линейка внезапно изогнется вбок с одновременным закручиванием. Это явление, которое называется *потерей устойчивости плоской формы изгиба*, вряд ли произойдет с линейкой, расположенной *«плашмя»*. Очевидно, что расположенная таким образом линейка скорее сломается, чем потеряет устойчивость.

А как нам расположить под вертикальной сосредоточенной силой стержень, поперечное сечение которого представляет собой, например, швеллер с приваренным к его полке неравнобоким уголком? Ответ на этот вопрос следующий: и в этом случае, *с точки зрения прочности и жесткости*, стержень нужно расположить так, чтобы силовая плоскость была перпендикулярна к оси *максимум* данного поперечного сечения.

В заключение этой беседы отметим, довольно часто говорят просто *главные оси инерции* и *главные моменты инерции*, подразумевая, что эти понятия имеют отношения к центру тяжести поперечного сечения стержня.

5. КРУЧЕНИЕ

В этой беседе нам предстоит познакомиться с основами теории кручения, причем кручения только стержней *круглого* поперечного сечения. Круглый стержень, испытывающий деформацию *кручения*, принято называть *валом*. Кручение элементов конструкции и деталей машин встречается очень часто. Одним из наиболее характерных случаев является кручение вала машины. На кручение работают оси локомотивов, стержень винтовой цилиндрической пружины и т. д.

5.1. Какой вид деформации стержня называется *кручением*?

Мысленно заделаем, например, левый конец стержня *круглого* поперечного сечения в стену и приложим к его правому свободному концу внешний момент, вращающий относительно оси стержня z . Этот внешний момент мы будем называть *скручивающим* моментом и обозначать его $M_{скр}$. Такая внешняя нагрузка вызовет в стержне *деформацию кручения*, которая характеризуется тем, что *одно поперечное сечение поворачивается на некоторый угол относительно другого сечения*. Если угол поворота *мал*, то можно предположить, что расстояние между этими сечениями останется прежним. В поперечных сечениях стержня, при такой деформации, возникнет только *одно* внутреннее усилие – *крутящий момент*, который мы будем обозначать M_z .

Угол, на который повернется нагруженное крайнее правое поперечное сечение стержня относительно неподвижного левого сечения, называется *углом закручивания стержня* и обозначается буквой φ .

5.2. Как строится *эпюра крутящих моментов*?

Крутящий момент, *возникающий* в поперечном сечении стержня, определяется *методом сечений*. Как уже отмечалось в *первой* беседе, он равен *алгебраической сумме скручивающих моментов, приложенных к любой из частей стержня* (иными словами, действующих *по одну сторону* от рассматриваемого сечения стержня). Эпюра крутящих моментов представляет собой график, показывающий изменение крутящего момента по длине вала $M_z(z)$. При построении эпюры крутящих моментов обычно используется следующее правило знаков:

*Если при взгляде на поперечное сечение стержня мы видим, что внешний скручивающий момент вращает рассматриваемую часть стержня **против** хода часовой стрелки, то он вызывает в этом сечении **положительный** крутящий момент, который, в свою очередь, противодействуя этому скручивающему моменту, будет направлен **по ходу** часовой стрелки.*

5.3. Как определяется скручивающий момент по мощности, передаваемой валом, и по частоте вращения?

Скручивающий момент вычисляется по следующей формуле

$$M_{скр} = N/\omega, \quad (5.1)$$

где $M_{скр}$ – скручивающий момент, Н·м.; N – мощность, Вт; ω – угловая частота вращения вала, рад/с.

Если ω измеряется в оборотах в минуту, то формула (5.1) принимает вид:

$$M_{скр} = 9,55 N/\omega.$$

5.4. Какие допущения положены в основу теории кручения круглых стержней?

Считается, что при *малых углах закручивания* вала:

- поперечные сечения, плоские и перпендикулярные к его оси до деформации, остаются плоскими (*не коробятся*) и перпендикулярными к оси вала и после деформации (это допущение принято называть *гипотезой плоских сечений* или *гипотезой Бернулли*);
- радиусы поперечных сечений при деформации не искривляются и не изменяют своей длины;
- длина вала в результате закручивания также не изменяется.

Таким образом, *поперечное сечение вала ведет себя при кручении, как жесткий диск, и тогда деформацию кручения можно рассматривать как результат сдвига одного поперечного сечения относительно другого. Следовательно, в точках поперечного сечения вала возникают только касательные напряжения.*

Теория кручения, основанная на перечисленных выше допущениях, хорошо подтверждается многочисленными опытными данными. Одним из первых исследователей, экспериментально изучавших кручение круглых стержней, был французский ученый Шарль Огюстен Кулон (*Coulomb*, 1736 – 1806 гг.).

5.5. Как ведут себя стержни прямоугольного поперечного сечения при кручении?

Упомянутые допущения, сформулированные для круглого вала, не могут быть приняты для стержня *прямоугольного* поперечного сечения. При кручении такого стержня отдельные точки поперечного сечения перемещаются вдоль его оси. И поэтому все сечение, в целом, перестает быть плоским (оно *коробится*). Происходит так называемая *депланация* поперечного сечения стержня.

Эта задача является значительно более сложной по сравнению со случаем кручения стержня круглого поперечного сечения и *методами сопротивления материалов она не может быть решена.*

5.6. Какая зависимость существует между углом сдвига и *относительным* углом закручивания?

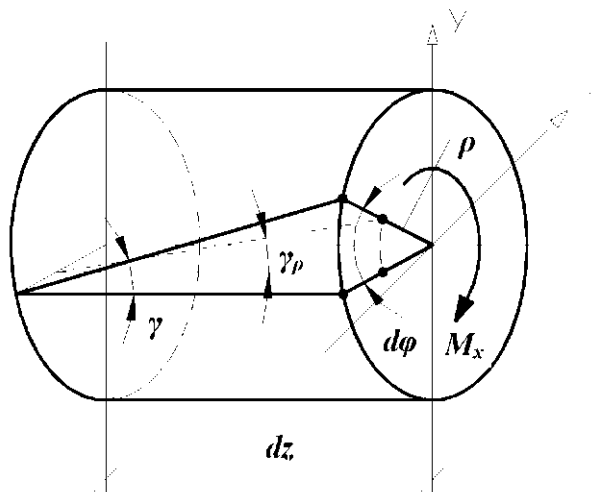


Рис. 5.1. Кручение

Рассмотрим часть вала длиной dz . Предположим, что правое поперечное сечение вала провернулось на угол $d\varphi$ относительно левого сечения. Для произвольного продольного волокна, отстоящего от оси вала на расстоянии ρ , возникнет *абсолютный* сдвиг, равный $\rho d\varphi$ (рис. 5.1).

Тогда угол сдвига

$$\gamma_\rho \approx \operatorname{tg} \gamma_\rho = \rho d\varphi / dz. \quad (5.2)$$

Входящая в формулу (5.2) величина $d\varphi / dz = \theta$

называется *относительным углом закручивания*.

Таким образом, между углом сдвига и относительным углом закручивания существует следующая зависимость:

$$\gamma_\rho = \rho \theta. \quad (5.3)$$

5.7. Как записывается закон Гука при кручении?

Так же, как и при сдвиге:

$$\tau_\rho = G \gamma_\rho,$$

или, с учетом зависимости (5.3),

$$\tau_\rho = G \gamma_\rho = G \rho \theta, \quad (5.4)$$

то есть, *касательные напряжения в произвольной точке поперечного сечения вала, отстоящей от центра тяжести сечения на расстоянии ρ , пропорциональны относительному углу закручивания*.

При этом в точках, равноудаленных от центра тяжести поперечного сечения, *численные значения касательных напряжений одинаковы*.

Из формулы (5.4) следует, что касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении вала при кручении, изменяются по линейному закону (пропорционально ρ – расстоянию от точки, в которой мы вычисляем напряжения, до центра тяжести). *Они равны нулю в центре вала и достигают максимального значения τ_{\max} в точках контура поперечного сечения* (рис. 5.2).

Из рис. 5.2 видно, что средняя часть поперечного сечения вала практически не участвует в сопротивлении кручению. В связи с этим на практике находят широкое применение *полые* валы. Такие валы, при той же

площади поперечного сечения F , могут воспринять большой скручивающий момент.

5.8. Как выражается крутящий момент через касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении вала?

При повороте поперечного сечения каждая его точка (кроме, разумеется, точки, лежащей на оси вала) перемещается по некоторой дуге окружности радиуса ρ . Поэтому направление касательного напряжения, возникающего в этой точке, должно быть *перпендикулярно* к радиусу ρ , проведенному в эту точку.

Элементарная внутренняя сила, возникающая на площадке dF (см. рис. 5.2), равна $\tau_\rho dF$, а ее момент относительно оси z (или центра тяжести поперечного сечения вала):

$$dM_z = (\tau_\rho dF) \rho.$$

Суммируя эти элементарные моменты по всей площади, получим выражение для крутящего момента, возникающего в поперечном сечении вала:

$$M_z = \int_F \tau_\rho \rho dF. \quad (5.5)$$

5.9. Какая зависимость существует между относительным углом закручивания и крутящим моментом?

Подставив выражение (5.4) в формулу (5.5), найдем:

$$M_z = G\theta \int_F \rho^2 dF. \quad (5.6)$$

С учетом того, что интеграл в выражении (5.6) представляет собой *полярный момент инерции* поперечного сечения I_ρ (см. формулу (4.6)), получим следующую форму записи *закона Гука при кручении*, но уже не для материала, а для стержня:

$$M_z = GI_\rho \theta.$$

Который читается следующим образом: *крутящий момент, возникающий в поперечном сечении стержня, пропорционален относительному углу закручивания.*

Напомним, что для стержня круглого поперечного сечения

$$I_\rho = \pi d^4 / 32 \approx 0,1 d^4.$$

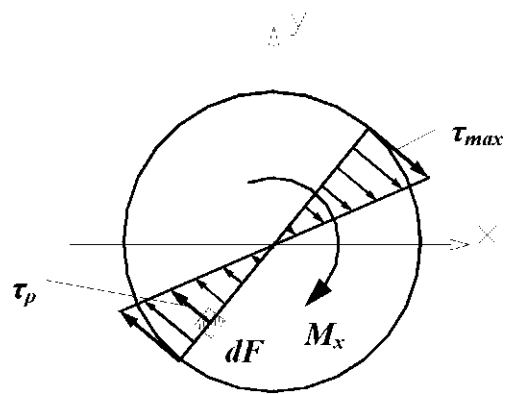


Рис. 5.2. Касательные напряжения при кручении

Тогда относительный угол закручивания равен:

$$\theta = d\varphi/dx = M_z/GI_\rho. \quad (5.7)$$

Из формулы (5.7) следует, что произведение GI_ρ характеризует **жесткость стержня при кручении**. Напомним, что модуль сдвига G характеризует жесткость **материала при сдвиге (кручении)**, а полярный момент инерции I_ρ является мерой сопротивления **вращению** поперечного сечения относительно оси стержня.

5.10. По какой формуле вычисляются касательные напряжения в произвольной точке поперечного сечения вала? Чему равны наибольшие касательные напряжения при кручении?

Подставив выражение (5.7) в формулу (5.4), получим:

$$\tau_\rho = M_z\rho/I_\rho. \quad (5.8)$$

Формула (5.8) позволяет вычислить касательное напряжение в любой точке поперечного сечения вала.

Наибольшие касательные напряжения τ_{\max} возникают в точках контура поперечного сечения при $\rho = d/2 = r$. Они равны:

$$\tau_{\max} = M_z r/I_\rho.$$

Введя обозначение $W_\rho = I_\rho/r$, окончательно получим:

$$\tau_{\max} = M_z/W_\rho. \quad (5.9)$$

Величина W_ρ называется **моментом сопротивления при кручении** (или **полярным моментом сопротивления**) и является геометрической характеристикой поперечного сечения вала. Момент сопротивления при кручении определяет способность вала сопротивляться кручению. Он измеряется в единицах длины в кубе (как правило, в см^3).

Заметим, что буквенное обозначение W , выбранное для обозначения момента сопротивления при кручении, очень похоже на перевернутую букву M , что способствует лучшему запоминанию формулы (5.9).

Для стержня круглого поперечного сечения:

$$W_\rho = \pi d^3/16 \approx 0,2d^3. \quad (5.10)$$

Для *полого* вала, имеющего внутренний диаметр d и внешний – D , полярный момент сопротивления равен:

$$W_\rho = \pi d^3(1 - \alpha^4)/16,$$

где $\alpha = d/D$.

5.11. Как записывается условие прочности при кручении?

Прочность вала считается обеспеченной, если наибольшие касательные напряжения, возникающие в его *опасном* поперечном сечении, не превышают допускаемых касательных напряжений при кручении:

$$\tau_{\max} = M_{z_{\max}}/W_{\rho} \leq [\tau]_{\kappa}. \quad (5.11)$$

Формула (5.11) служит для *проверочного расчета* вала на прочность.

Заметим, что незначительное превышение расчетного напряжения τ_{\max} над допускаемым напряжением $[\tau]_{\kappa}$ разрешается (не более 5 %).

При проектировочном расчете *требуемый* полярный момент сопротивления $W_{\rho}^{\text{треб}}$ определяется по следующей формуле, вытекающей из условия прочности (5.11):

$$W_{\rho}^{\text{треб}} \geq M_{z_{\max}}/[\tau]_{\kappa}.$$

Отсюда легко можно найти *требуемый диаметр* вала. Например, для вала сплошного поперечного сечения, используя (5.10), получим:

$$d^{\text{треб}} \geq \sqrt[3]{\frac{M_{z_{\max}}}{0,2[\tau]_{\kappa}}}. \quad (5.12)$$

Для вала *постоянного* диаметра опасным является сечение, в котором возникает наибольший крутящий момент $M_{z_{\max}}$. Если же вал имеет переменное по длине поперечное сечение, то может оказаться, что наибольшие касательные напряжения возникают не там, где крутящий момент максимален. Следовательно, в этом случае вопрос об *опасном* сечении должен быть исследован дополнительно.

Допускаемое напряжение $[\tau]_{\kappa}$ для пластичных материалов назначается в зависимости от их предела текучести τ_m при кручении (сдвиге):

$$[\tau]_{\kappa} = \tau_m/n_m.$$

Для хрупких материалов – в зависимости от предела прочности $\tau_{m\kappa}$:

$$[\tau]_{\kappa} = \tau_{m\kappa}/n_{m\kappa}.$$

5.12. По какой формуле вычисляется угол закручивания вала?

Из (5.7) следует, что угол закручивания вала определяется по формуле

$$\varphi = \int_l \frac{M_z}{GI_{\rho}} dx.$$

Если диаметр d постоянен по длине вала l и крутящий момент M_z имеет во всех поперечных сечениях одинаковое значение, то

$$\varphi = M_z l / GI_{\rho}.$$

5.13. Как записывается условие жесткости при кручении?

За меру жесткости при кручении принимается *относительный угол закручивания* вала θ . Условие жесткости имеет вид:

$$\theta = M_z / GI_{\rho} \leq [\theta], \quad (5.13)$$

где $[\theta]$ – значение *допускаемого относительного угла закручивания*, рад/м, которое зависит от назначения вала и условий его работы.

Если $[\theta]$ задано в град/м, то преобразовывать формулу (5.13) не следует. Проще просто перевести $[\theta]$ в рад/м, учитывая, что 1 рад \approx 57,3 град.

Неравенство (5.13) позволяет определить *требуемый* диаметр вала из условия *жесткости*. Так, для сплошного вала мы получим

$$d^{тр\text{еб}} \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{z\text{max}}}{\pi G[\theta]}} \approx \sqrt[4]{\frac{10M_{z\text{max}}}{G[\theta]}}. \quad (5.14)$$

Напомним, что вал должен удовлетворять и условию прочности, и условию жесткости. Поэтому из двух значений диаметра, найденных нами по формулам (5.12) и (5.14), мы должны взять наибольшее значение.

5.14. По какой формуле вычисляется *потенциальная энергия деформации* при кручении вала?

При кручении, как и при других видах деформации стержня, работа внешней силы (скручивающего момента) расходуется на создание в деформируемом теле определенного запаса энергии (*потенциальной энергии деформации*), которая определяется по формуле (см. также беседу 15):

$$V_{M_z} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_z^2}{GI_\rho} dz.$$

6. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА

С понятием о *напряженном состоянии в точке тела* мы уже встречались ранее. Так, в первой беседе мы обращали внимание Читателя на то, что *нельзя говорить о напряжении в точке тела, не указывая положение площадки, на которой оно возникает*, поскольку на различных площадках, проходящих через данную точку тела, могут возникнуть *разные* напряжения. Изучали мы напряженное состояние и в точке центрально растянутого (сжатого) стержня.

Ввиду того, что понятие о *напряженном состоянии в точке тела* является одним из *ключевых* понятий в курсе сопротивления материалов, считаем необходимым в этой беседе остановиться на этом вопросе более подробно.

6.1. Что понимается под *напряженным состоянием в точке тела*?

*Напряженным состоянием (НС) в точке тела называют совокупность нормальных и касательных напряжений, возникающих на **всевозможных** площадках, проходящих через данную точку.*

6.2. Какова конечная цель исследования *НС* в точке тела?

Для оценки прочности материала нас в первую очередь интересуют *наибольшие* значения нормальных и касательных напряжений, возникаю-

щих в данной точке тела. В дальнейшем мы установим, что для их определения нам необходимо знать нормальные и касательные напряжения на любых трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку тела.

Кроме того, нам необходимо знать и направления «действия» этих наибольших нормальных и касательных напряжений или, иными словами, на каких площадках, проходящих через данную точку тела, они возникают.

Здесь и далее *кавычки* нами используются потому, что внутренние усилия *не могут действовать*, поскольку не являются активными силами.

6.3. С чего начинается исследование *НС* в некоторой точке тела?

Оно начинается с того, что в окрестности исследуемой точки, например точки K (рис. 6.1), из нагруженного тела, находящегося в равновесии, мысленно вырезается элементарный параллелепипед со сторонами dx , dy и dz . Ввиду малости этого параллелепипеда можно считать, что *НС* во всех его внутренних точках одинаково (то есть *однородно*) и совпадает с *НС* в непосредственно исследуемой точке K . Поэтому мы будем предполагать, что как по граням, так и по любым другим сечениям элементарного параллелепипеда нормальные и касательные напряжения распределяются *равномерно*.

Эти предположения позволяют нам исследовать закон изменения напряжений по *наклонным* сечениям элементарного параллелепипеда, считая, что эти сечения проходят через исследуемую нами точку K .

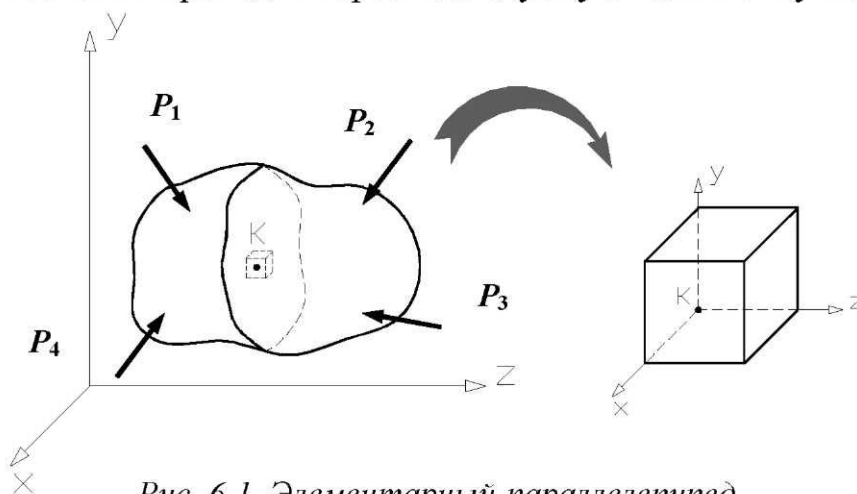


Рис. 6.1. Элементарный параллелепипед

6.4. Какие различают виды *НС* в точке тела?

В дальнейшем мы увидим, что в окрестности любой точки деформированного твердого тела *всегда* можно выделить элементарный параллелепипед, ориентированный в пространстве таким образом, что *по его граням* будут возникать только **нормальные** напряжения. В зависимости от того, испытывает ли такой параллелепипед «растяжение» («сжатие») в одном, в двух или в трех направлениях, различают следующие виды *НС* (рис. 6.2).

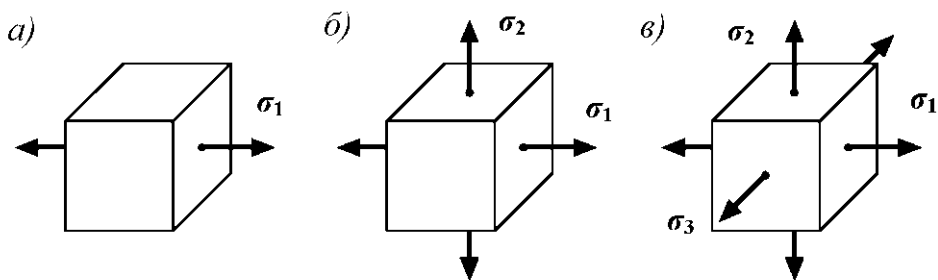


Рис. 6.2. Виды напряженного состояния в точке тела:
 а – линейное (одноосное); б – плоское (двухосное);
 в – объемное (трехосное)

С линейным *НС* мы уже сталкивались при изучении центрального растяжения (сжатия) стержня.

В задачах сопротивления материалов наиболее часто встречается *плоское НС*. Его характерным признаком является *полное отсутствие нормальных и касательных напряжений на двух параллельных гранях элементарного параллелепипеда*.

Именно этому случаю *НС* мы и уделим в дальнейшем *основное* внимание. В частности, мы будем полагать, что напряжения не возникают на гранях элементарного параллелепипеда с нормалью x . Тогда вместо объемного параллелепипеда, с целью упрощения, мы будем на рисунках показывать *плоский* элемент, то есть проекцию параллелепипеда на плоскость yz . При этом *штриховкой* мы будем указывать внутреннюю область этого элемента.

Объемное *НС* в курсе сопротивления материалов практически не изучается.

6.5. Какие правила знаков для нормальных и касательных напряжений принимаются в сопротивлении материалов при изучении плоского *НС*?

Установим следующие правила знаков.

Для нормальных напряжений оно формулируется очень просто: *нормальное напряжение, соответствующее растяжению, считается положительным, а сжатию отрицательным*.

Несколько сложнее выглядит правило для касательных напряжений.

Касательное напряжение будем считать положительным, если одновременно выполняются (или одновременно не выполняются) следующие два условия:

- во-первых, направление напряжения совпадает с положительным направлением соответствующей координатной оси;
- во-вторых, внешняя нормаль к площадке, на которой оно возникает, направлена в ту же сторону, что и другая соответствующая координатная ось.

Например, все напряжения на рис. 6.3, возникающие по граням элементарного параллелепипеда, показаны *положительными*. Поскольку, как уже отмечалось, во всех точках элементарного параллелепипеда *НС* считается однородным, *одноименные напряжения, возникающие на параллельных гранях элемента, численно равны друг другу*.

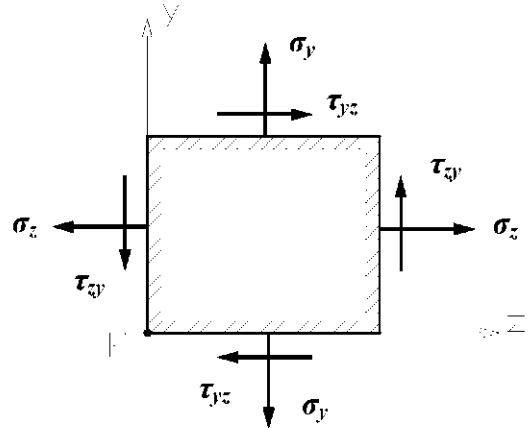


Рис. 6.3. Положительные направления нормальных и касательных напряжений

Отметим, что при анализе *НС* в некоторой точке тела нормальные σ_x, σ_y и касательные τ_{xy}, τ_{yx} напряжения, возникающие по граням элементарного параллелепипеда, считаются *заданными*.

6.6. Как формулируется закон парности касательных напряжений?

Элементарный параллелепипед должен находиться в равновесии. В частности, он не должен вращаться вокруг оси x , проходящей через точку K (см. рис. 6.3), поэтому суммарный момент всех *сил*, возникающих по его граням, относительно этой оси должен быть равен нулю:

$$\begin{aligned} & (\sigma_z dx dy) \frac{dy}{2} - (\sigma_z dx dy) \frac{dy}{2} + (\sigma_y dx dz) \frac{dz}{2} - \\ & - (\sigma_y dx dz) \frac{dz}{2} + (\tau_{zy} dx dy) dz - (\tau_{yz} dx dz) dy = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

В формуле (6.1) в скобки заключены соответствующие силы, а их плечи указаны за скобками.

После элементарных упрощений выражения (6.1) найдем:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}. \quad (6.2)$$

Соотношение (6.2) и называется **законом парности касательных напряжений**: на любых двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения, направленные по перпендикуляру к линии пересечения этих площадок, равны по величине. При этом касательные напряжения либо сходятся к линии пересечения площадок, либо расходятся от нее.

6.7. По каким формулам вычисляются нормальные и касательные напряжения, возникающие на наклонных площадках, проходящих через рассматриваемую точку?

При изучении *плоского НС* мы будем рассматривать только такие наклонные площадки, которые перпендикулярны граням параллелепипеда, на которых отсутствуют нормальные и касательные напряжения (рис. 6.4).

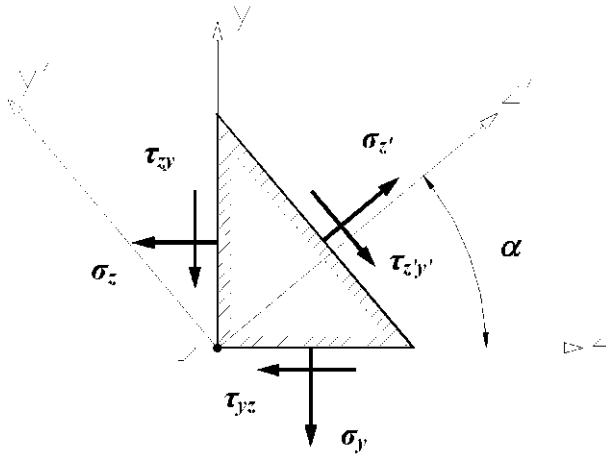


Рис. 6.4. Напряжения на наклонной площадке, проходящей через точку K

Наклон площадки будем определять углом α , который образует внешняя нормаль z' к этой площадке с осью z . Угол α считается положительным, если он отсчитывается от оси z против хода часовой стрелки.

Тогда нормальные и касательные напряжения, возникающие на наклонной площадке, проходящей через точку K , определяются соответственно по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_{z'} &= (\sigma_z + \sigma_y)/2 + (\sigma_z - \sigma_y)\cos 2\alpha/2 + \tau_{zy} \sin 2\alpha; \\ \tau_{z'y'} &= -(\sigma_z - \sigma_y)\sin 2\alpha/2 + \tau_{zy} \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Формулы (6.3) позволяют нам фактически определять напряжения, возникающие на *любой* площадке, проходящей через заданную точку. Таким образом, *плоское НС* в точке тела определено, если нам известны (заданы) напряжения, возникающие на двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку тела.

Из формул (6.3) видно, что нормальные и касательные напряжения являются непрерывными функциями угла α и, следовательно, могут иметь экстремальные значения: максимумы и минимумы.

Найдем угол наклона площадки α_0 , при котором нормальное напряжение $\sigma_{z'}$ принимает экстремальное значение. Для этого возьмем производную $d\sigma_{z'}/d\alpha$ и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned}d\sigma_{z'}/d\alpha &= 2\sigma_z \cos\alpha(-\sin\alpha) + 2\sigma_y \sin\alpha \cos\alpha - 2\tau_{zy} \cos 2\alpha = \\ &= 2[-(\sigma_z - \sigma_y)\sin 2\alpha/2 + \tau_{zy} \cos 2\alpha] = 2\tau_{z'y'} = 0.\end{aligned}\quad (6.4)$$

Тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{zy}/(\sigma_z - \sigma_y).\quad (6.5)$$

Из формулы (6.5) мы найдем два угла α_0 и $\alpha_0 + 90^\circ$, которые и определяют положение двух взаимно перпендикулярных площадок, на которых возникают экстремальные в рассматриваемой точке K нормальные напряжения σ_{\max} и σ_{\min} (рис. 6.5).

Необходимо отметить, что σ_{\max} всегда направлено в ту сторону, где сходятся касательные напряжения $\tau_{zy} = \tau_{yz}$.

Объяснение этого правила следует из рассмотрения рис. 6.6.

Видно, что касательные напряжения «создают» дополнительное удлинение одной из диагоналей (см. также далее вопрос 6.15).

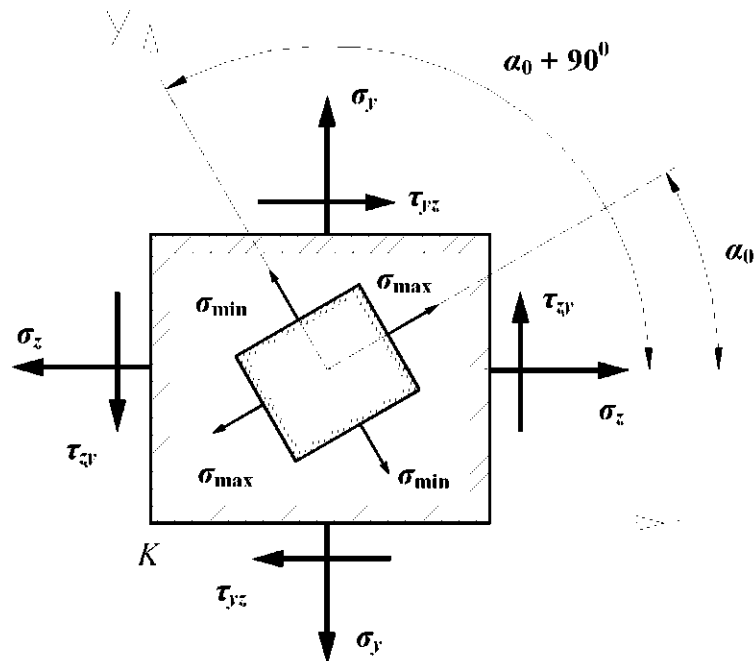


Рис. 6.5. Главные площадки и главные напряжения

Заметим, что формула (6.5) внешне напоминает формулу (4.8), по которой определяется положение *главных центральных осей инерции*.

6.8. Чему равны касательные напряжения на площадках, на которых возникают экстремальные нормальные напряжения?

Из формулы (6.4) можно сделать следующий, очень важный вывод: *касательные напряжения на этих площадках равны нулю*.

6.9. Какие площадки и какие напряжения называются главными?

Площадки, проходящие через исследуемую точку, на которых касательные напряжения отсутствуют, называются главными площадками, а возникающие на этих площадках нормальные напряжения – главными напряжениями.

6.10. По каким формулам вычисляются экстремальные нормальные напряжения в исследуемой точке тела?

Исключив из формул (6.3) угол 2α , мы получим следующее уравнение

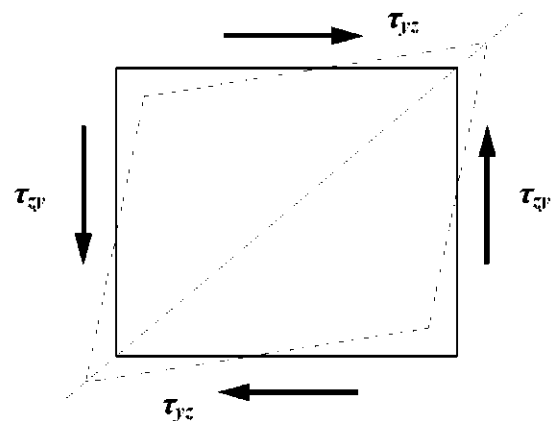


Рис. 6.6. Деформация элемента под «действием» касательных напряжений

$$[\sigma_{z'} - (\sigma_z + \sigma_y)/2]^2 + \tau_{zy'}^2 = [(\sigma_z - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{zy}^2. \quad (6.6)$$

Значения экстремальных нормальных напряжений можно найти из полученного уравнения (6.6), если положить в нем $\tau_{zy'} = 0$, поскольку на главных площадках касательные напряжения отсутствуют. Тогда:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= (\sigma_z + \sigma_y)/2 + \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2/4 + \tau_{zy}^2}; \\ \sigma_{\min} &= (\sigma_z + \sigma_y)/2 - \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2/4 + \tau_{zy}^2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Заметим, что формулы (6.7) внешне похожи на формулы (4.9), по которым вычисляются значения *главных центральных моментов инерции* поперечного сечения стержня.

Отметим также важную закономерность, которая вытекает из выражений (6.7):

$$\sigma_{\max} + \sigma_{\min} = \sigma_z + \sigma_y = \text{const},$$

Следовательно, *при плоском НДС сумма нормальных напряжений, возникающих на любых двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через некоторую точку тела, остается постоянной.*

6.11. Как обозначаются *главные* напряжения?

В *общем* случае нагружения (при *объемном НДС*) среди бесчисленного множества площадок, проходящих через некоторую точку тела, всегда можно найти *три* взаимно перпендикулярные *главные* площадки. Следовательно, в окрестности любой точки деформированного твердого тела *всегда* можно выделить элементарный параллелепипед, ориентированный в пространстве таким образом, что *по его* *граням* будут возникать только нормальные (*главные*) напряжения (см. рис. 6.2).

Главные напряжения обозначаются через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Индексы *расс*тавляются лишь после того, как эти напряжения вычислены, при этом должно выполняться следующее неравенство:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Таким образом, σ_1 – *наибольшее* по алгебраической величине, а σ_3 – *наименьшее* по алгебраической величине нормальное напряжение, возникающее в исследуемой точке тела.

В частном случае нагружения может получиться так, что все три главных напряжения в исследуемой точке тела равны между собой. Тогда *любая* площадка, проведенная через эту точку, является *главной*.

В заключение отметим, что именно *по значениям главных напряжений* дается оценка прочности материала в исследуемой точке деформированного твердого тела (см. далее беседу 8).

6.12. При плоском *НС* на грани элементарного параллелепипеда с нормалью *x* полностью отсутствует не только касательное, но и нормальное напряжение. Тогда получается, что эта площадка тоже является *главной*?

Да. И *главное напряжение* на этой площадке равно нулю. Иногда такую площадку называют *нулевой* главной площадкой.

6.13. Пусть, например, для случая плоского *НС* мы по формулам (6.7) нашли, что экстремальные нормальные напряжения в исследуемой точке равны $\sigma_{\max} = 200$ МПа, а $\sigma_{\min} = 50$ МПа. Как в этом случае расставить индексы у главных напряжений?

В этом случае $\sigma_1 = 200$ МПа, $\sigma_2 = 50$ МПа, $\sigma_3 = 0$ МПа.

Если же, например, получилось, что $\sigma_{\max} = -100$ МПа, а $\sigma_{\min} = -250$ МПа, то тогда $\sigma_1 = 0$ МПа, $\sigma_2 = -100$ МПа, $\sigma_3 = -250$ МПа.

6.14. По какой формуле вычисляются наибольшие касательные напряжения в исследуемой точке тела и на каких площадках они возникают?

Найдем угол наклона площадки α_1 , при котором *касательное* напряжение $\tau_{z'y'}$, определяемое по формуле (6.3), принимает *экстремальное* значение. Для этого возьмем производную $d\tau_{z'y'}/d\alpha$ и приравняем ее к нулю:

$$d\tau_{z'y'}/d\alpha = 2[-(\sigma_z - \sigma_y)\cos 2\alpha/2 - \tau_{zy}\sin 2\alpha] = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\beta_1 = -(\sigma_z - \sigma_y)/2\tau_{zy}. \quad (6.8)$$

Сопоставляя равенства (6.8) и (6.5), мы видим, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 \cdot \operatorname{tg} 2\alpha_1 = -1,$$

следовательно, $2\alpha_1 = 2\alpha_0 \pm \pi/2$ или $\alpha_1 = \alpha_0 \pm \pi/4$.

Таким образом, для данной точки существуют две взаимно перпендикулярные площадки, на которых возникают равные по закону парности экстремальные касательные напряжения τ_{\max} . Эти площадки расположены под углом 45° к главным площадкам (рис. 6.7), на которых «действуют» главные напряжения σ_1 и σ_3 .

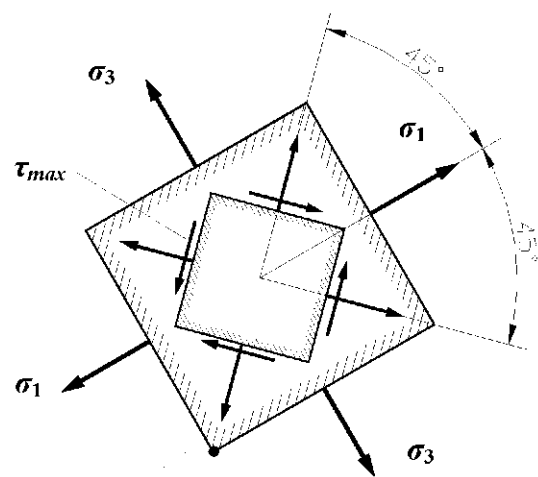


Рис. 6.7. Площадки, на которых возникают наибольшие касательные напряжения

Абсолютное значение экстремальных касательных напряжений определяется по формуле

$$\tau_{\max} = |\sigma_1 - \sigma_3|/2.$$

В общем случае нагружения на площадках, на которых возникают наибольшие касательные напряжения, возникают и *нормальные* напряжения. Последние *равны половине суммы главных напряжений* σ_1 и σ_3 .

Если же, например, на площадках, где возникают наибольшие касательные напряжения, нормальные напряжения отсутствуют, то эти площадки называются площадками *чистого* сдвига.

6.15. Вернемся к чистому сдвигу. Чему в этом случае равны главные напряжения и в каких направлениях они возникают?

Напомним, что при чистом сдвиге в поперечных сечениях стержня возникают только касательные напряжения τ_{zy} .

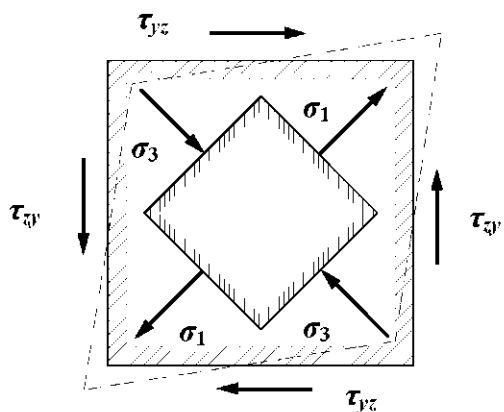


Рис. 6.8. Чистый сдвиг

По закону парности касательных напряжений $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Напряженное состояние в рассматриваемой точке является плоским. Пусть $dy = dz$ (рис. 6.8).

По формуле (6.4) найдем, что $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \pm\infty$.

Тогда

$$2\alpha_0 = \pm 90^\circ \text{ и } \alpha_0 = \pm 45^\circ.$$

По формуле (6.6) получим:

$$\sigma_{\max} = \tau_{zy}, \quad \sigma_{\min} = -\tau_{zy}.$$

Следовательно, главные напряжения при чистом сдвиге равны:

$$\sigma_1 = \tau_{zy}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau_{zy}.$$

Их направления показаны на рис. 6.8.

Наибольшие касательные напряжения равны:

$$\tau_{\max} = |\sigma_1 - \sigma_3|/2 = |\tau_{zy} - (-\tau_{zy})|/2 = \tau_{zy}.$$

Таким образом, **чистый сдвиг** можно рассматривать как простую комбинацию **растяжения** и **сжатия** под углом 45° .

7. ПРЯМОЙ ИЗГИБ

Стержень с *прямолинейной* осью, работающий на изгиб, называют *балкой*. Балки являются одним из важнейших элементов всех строительных конструкций, а также многих конструкций, применяемых в машиностроении, кораблестроении и в других отраслях техники.

Первым вопрос о прочности балок поставил в 1638 г. *Галилей* в своей книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки». В 1826 г., то есть спустя почти два столетия, французский ученый *Клод Луи Мари Анри Навье* (*Navier*, 1785 – 1836 гг.) практически завершил создание теории изгиба балок. Этой теорией мы, по существу, пользуемся и по настоящее время.

7.1. Какая деформация называется *изгибом*?

*Изгибом называется такой вид деформации, при котором первоначально **прямолинейная** ось стержня **искривляется**.*

7.2. Какие *перемещения* возникают при *изгибе* балки?

В результате изгиба произвольная точка, лежащая на оси балки, перемещается в направлении вертикальной оси y и продольной оси z . *Вертикальное перемещение* обычно обозначают буквой v и называют его *прогибом* балки. *Продольное перемещение* точки обозначают буквой u .

Касательная, проведенная к точке, расположенной на изогнутой оси балки, будет повернута по отношению к прямолинейной оси на некоторый угол. Этот угол, как показывают многочисленные опытные данные, оказывается равным *углу поворота* θ поперечного сечения балки, проходящего через рассматриваемую точку.

Таким образом, *три величины* v , u и θ являются *компонентами перемещения* произвольного поперечного сечения балки при изгибе.

В дальнейшем мы покажем, что $u \ll v$, поэтому при расчете балки на изгиб продольным перемещением u пренебрегают.

7.3. Какой изгиб называется *прямым*?

Если балка изгибается в плоскости действия внешней нагрузки, то такой изгиб называется *прямым*.

Прямой изгиб стержня будет иметь место в том случае, если *силовая плоскость* совпадает с одной из *главных* плоскостей. *Силовой плоскостью* называется плоскость, в которой действуют внешние нагрузки, а *главной плоскостью* – плоскость, которая проходит через продольную ось стержня z и одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения (например, через ось x или ось y).

7.4. А возможен, например, такой случай: нагрузка действует вниз, а балка почему-то прогибается не только вниз, но и вбок?

Да, такой случай возможен. Изгиб тогда называется *косым*. С этим случаем изгиба балки мы познакомимся подробнее в беседе 9. Косой изгиб возникнет в том случае, если *силовая* плоскость не совпадает ни с одной из *главных* плоскостей.

7.5. А какой изгиб называется *плоским*?

Нередко в учебной литературе *прямой* изгиб называют *плоским изгибом*. Последний термин, на наш взгляд, является не совсем удачным. И вот почему. Термины «прямой изгиб» и «косой изгиб» также легко сопоставляются, как и отдельные слова «прямо» и «косо». Сопоставлять же термины «плоский изгиб» и «косой изгиб» неправомерно, как, собственно, и слова «плоский» и «косой». Слову «плоский», скорее всего, можно было бы противопоставить слово «пространственный».

7.6. Какие *внутренние усилия* возникают в поперечном сечении балки при *прямом изгибе*?

Рассмотрим, например, балку (рис. 7.1), нагруженную вертикальной сосредоточенной силой P . Для определения *внутренних силовых факторов*, возникающих в некотором поперечном сечении, расположенном на расстоянии z от места приложения нагрузки, воспользуемся *методом сечений*. Продемонстрируем два варианта использования этого метода, с которыми можно встретиться в учебной литературе.

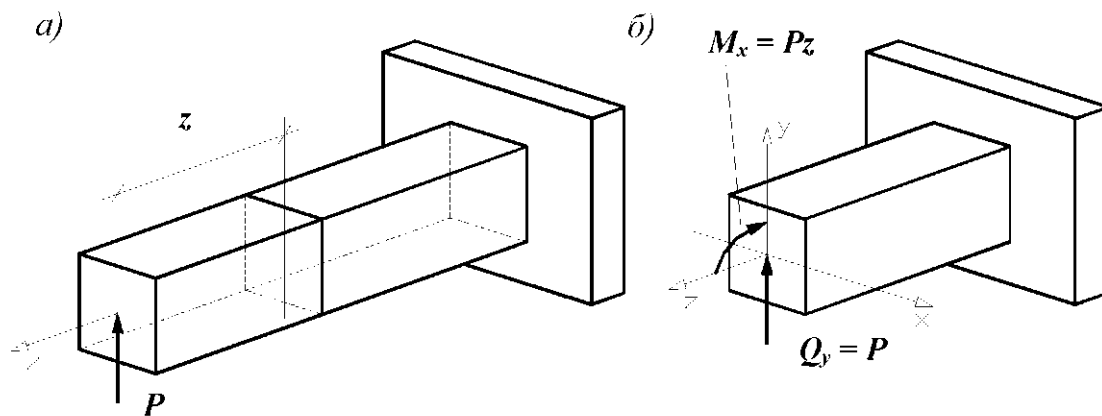


Рис. 7.1. Внутренние силовые факторы, возникающие при *прямом изгибе* балки

Первый вариант.

Разрежем балку в намеченном нами поперечном сечении на расстоянии z от левого конца (рис. 7.1, *а*).

Отбросим мысленно *правую* часть балки вместе с жесткой заделкой (или просто, для удобства, закроем их листком бумаги).

Далее мы должны **заменить** действие отброшенной части на оставленную нами *левую* часть балки внутренними усилиями (силам упругости). Мы видим, что внешняя нагрузка пытается сместить видимую нами часть балки вверх (иными словами, осуществить *сдвиг*) с силой, равной P , а также *изогнуть* ее выпуклостью вниз, создавая момент, равный Pz . Вследствие этого, в поперечном сечении балки возникают внутренние силы, которые оказывают сопротивление внешней нагрузке, то есть противодействуют и *сдвигу*, и *изгибу*. Эти силы, очевидно, возникают во *всех* точках попе-

речного сечения балки, и распределены они по сечению по *неизвестному* пока нам закону. К сожалению, сразу же определить *эту бесконечную систему сил* невозможно. Поэтому мы сведем все эти силы к *центру тяжести* рассматриваемого поперечного сечения и заменим их действие статически эквивалентными внутренними усилиями: *перерезывающей силой* Q_y и *изгибающим моментом* M_x .

Как мы уже неоднократно отмечали выше, разрушение стержня в рассматриваемом сечении не произойдет только в том случае, если эти внутренние усилия Q_y и M_x сумеют *уравновесить* внешнюю нагрузку. Поэтому мы легко находим, что $Q_y = P$, а $M_x = Pz$. Заметим, что именно благодаря этим двум внутренним усилиям Q_y и M_x при разгрузке рассматриваемая нами часть балки опустится вниз и выпрямится.

Второй вариант.

По-прежнему **разрежем** балку в интересующем нас месте на две части. Но **отбросим** теперь не правую, а *левую* часть балки, нагруженную силой P . **Заменим** действие отброшенной нами части на оставленную правую часть стержня *внутренними усилиями*. Эти усилия мы найдем непосредственно как *действие отброшенной левой части на правую часть*. Для этого осуществим *параллельный перенос силы P в центр тяжести* рассматриваемого поперечного сечения балки (рис. 7.1, б). Согласно известной лемме из курса теоретической механики, *сила, приложенная в какой-либо точке тела, эквивалентна такой же силе, приложенной в любой другой точке этого тела, и паре сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки ее приложения*. Следовательно, в поперечном сечении стержня мы должны приложить силу P и момент Pz . Тогда перерезывающая сила $Q_y = P$, а изгибающий момент $M_x = Pz$. То есть мы получаем тот же самый результат, но не производя процедуры *уравновешивания*.

7.7. Какому из этих двух вариантов следует отдать предпочтение?

На наш взгляд, с методической точки зрения *первый вариант лучше*. И вот почему.

В первом варианте внутренние усилия Q_y и M_x представляют собой *статический эквивалент бесконечной системы внутренних сил*, возникающих при изгибе балки в каждой точке ее поперечного сечения. И определяем мы эти внутренние усилия из условия, что, противодействуя внешней нагрузке, приложенной к *рассматриваемой* части стержня, они должны любой ценой ее *уравновесить* (иначе в этом поперечном сечении произойдет разрушение балки).

Во втором варианте внутренние усилия Q_y и M_x нами трактуются, по существу, как *статический эквивалент* не внутренних, а *внешних сил*, которые действуют на *отбрасываемую* часть стержня.

7.8. По каким правилам вычисляются *изгибающий момент* и *перерезывающая сила*, возникающие в поперечном сечении балки при изгибе?

Если мы используем *первый* вариант, то эти правила следующие:

1) *перерезывающая сила* численно равна алгебраической сумме всех *внешних сил* (активных и реактивных), действующих на *рассматриваемую* нами часть балки;

2) *изгибающий момент* численно равен алгебраической сумме моментов этих же сил относительно *главной* центральной оси, проходящей через центр тяжести рассматриваемого поперечного сечения.

Отметим, что изгиб, при котором в поперечном сечении балки возникают и изгибающий момент, и перерезывающая сила, называется *поперечным*. Если же в поперечном сечении балки возникает только изгибающий момент, то изгиб называется *чистым*.

7.9. Что происходит с продольными волокнами балки при изгибе?

Над этим вопросом задумывались многие ученые. Так, например, *Галилей* считал, что при изгибе балки *все ее волокна одинаково растягиваются*. Знаменитый немецкий математик *Готфрид Вильгельм Лейбниц* (*Leibnitz*, 1646 – 1716 гг.) полагал, что крайние волокна, расположенные на вогнутой стороне балки, не изменяют своей длины, а удлинения всех остальных волокон возрастают пропорционально удалению от этих волокон.

Однако многочисленные опыты, например, опыты *Артура Жюль Морена* (*Morin*, 1795 – 1880 гг.), проведенные в 40-х гг. XIX в., показали, что балка при изгибе деформируется таким образом, что часть ее волокон испытывает растяжение, а часть – сжатие. Границей между областями растяжения и сжатия является слой волокон, которые лишь искривляются, не испытывая при этом *ни растяжения, ни сжатия*. Эти волокна образуют так называемый *нейтральный слой*.

7.10. Что называется *нейтральной осью* или *нулевой линией*?

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения балки называется *нейтральной осью* или *нулевой линией*. При изгибе балки ее поперечные сечения поворачиваются именно относительно нейтральной оси.

7.11. Какая нагрузка называется *погонной* и как она вычисляется?

При расчете балок часто приходится сталкиваться с *погонной* нагрузкой. Так называется нагрузка, *приходящаяся на единицу длины балки*. Ее

интенсивность, как правило, обозначается буквой q . Как уже отмечалось в первой беседе, единицы погонной нагрузки – ньютон на метр, килоньютон на метр (Н/м, кН/м) или килограмм силы на метр, килограмм силы на сантиметр (кгс/см, кгс/м) и т. д.

Определение значения погонной нагрузки, действующей на балку, рассмотрим на следующем примере.

Пусть, например, помещение комнаты представляет собой в плане прямоугольник со сторонами 9 и 5 м. Пять балок пола уложены параллельно *меньшей* из сторон прямоугольника через 1,5 м и оперты концами на стены. Пусть *давление* на пол $p = 4 \text{ кН/м}^2$.

Подсчитаем интенсивность погонной нагрузки q , приходящуюся на *одну* балку. Будем предполагать, что давление p и соответственно нагрузка на площадь, расположенную между двумя смежными балками, распределяется *поровну* между этими балками. Следовательно, ширина полосы, с которой давление «собирается» на одну балку с двух сторон, будет равна $b = 1,5 \text{ м}$. Тогда *погонная* нагрузка $q = pb = 4 \times 1,5 = 6 \text{ кН/м}$.

7.12. Какие основные виды опорных закреплений балок рассматриваются в сопротивлении материалов и как они изображаются на расчетной схеме?

Таких видов три (рис. 7.2):

- 1) шарнирно неподвижная опора;
- 2) шарнирно подвижная опора;
- 3) жесткая заделка.

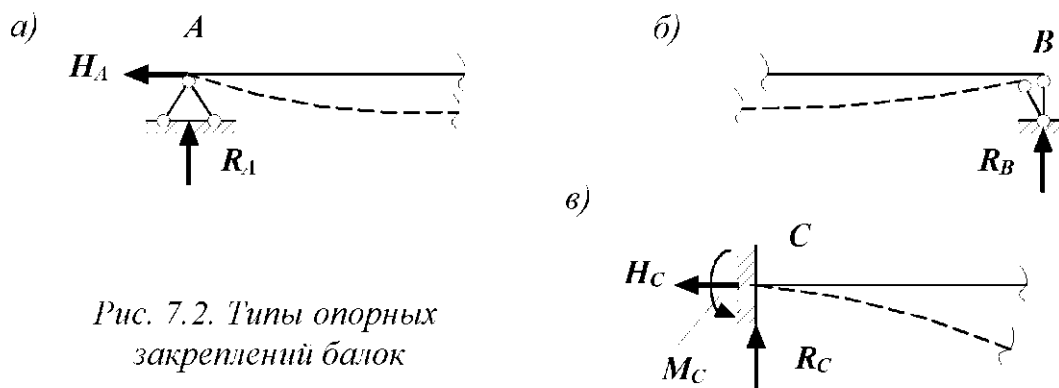


Рис. 7.2. Типы опорных закреплений балок

Шарнирно неподвижной опорой (рис. 7.2, а, опора А) называется такое закрепление конца балки, при котором балка может поворачиваться, но не может перемещаться ни в горизонтальном (влево или вправо), ни в вертикальном (вверх или вниз) направлениях, то есть не может перемещаться ни в каком направлении. Следовательно, в такой опоре может возникнуть реакция, которую удобно представить в виде двух составляющих: вертикальной R_A и горизонтальной H_A . Такая опора на расчетной схеме условно изображается посредством двух стерженьков. Нижние их концы шар-

нирно прикреплены к «земле», а верхние концы соединены между собой и с балкой шарниром.

Шарнирно подвижная опора (рис. 7.2, б, опора В) представляет собой устройство, при котором конец балки может свободно перемещаться в горизонтальном направлении, может поворачиваться при изгибе, но не может перемещаться в вертикальном направлении. Соответственно этому со стороны подвижной опоры может возникнуть только одна, вертикальная реакция R_B . Эта опора изображается посредством одного стерженька, шарнирно соединенного и с землей, и с балкой.

Жесткой заделкой называется закрепление (рис. 7.2, в, опора С), при котором конец балки не может ни поворачиваться, ни перемещаться. В заделке могут возникнуть реактивный момент M_C (момент жесткой заделки) и реакции R_C и H_C . Балка при таком закреплении показывается заделанной в часть стены, которая штрихуется.

7.13. Какие типы балок обычно рассматриваются в сопротивлении материалов?

Расчетные схемы этих балок и их названия указаны на рис. 7.3.

Консолью называют часть балки, расположенную по одну сторону от опоры.

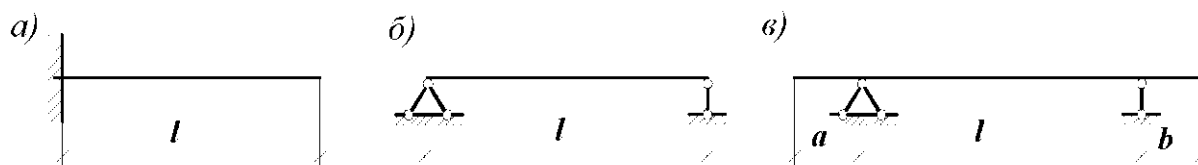


Рис. 7.3. Типы балок: а – жестко зацементированная балка (или консоль); б – простая балка (или шарнирно опертая балка); в – шарнирно опертая балка с консолями

Расстояние между шарнирными опорами называется пролетом балки и обозначается l .

7.14. Как определяются опорные реакции?

Способы определения опорных реакций изучаются в курсе теоретической механики. Поэтому мы остановимся только на некоторых практических вопросах, касающихся методики их вычисления, в частности для шарнирно опертой балки с консолью (рис. 7.4).

Для такой балки нам необходимо найти три упомянутые ранее реакции: R_A , H_A и R_B . Направления этих реакций мы выбираем произвольно. Направим, например, обе вертикальные реакции вверх, а горизонтальную реакцию – влево. Для вычисления их значений можно составить три уравнения статики:

1) Сумма проекций всех сил (активных и реактивных) на ось z равна нулю:

$$\sum Z = 0.$$

Поскольку в сопротивлении материалов принято считать, что на балку действуют только *вертикальные* нагрузки (перпендикулярные к ее оси), то из этого уравнения мы легко находим, что горизонтальная реакция неподвижной шарнирной опоры $H_A = 0$.

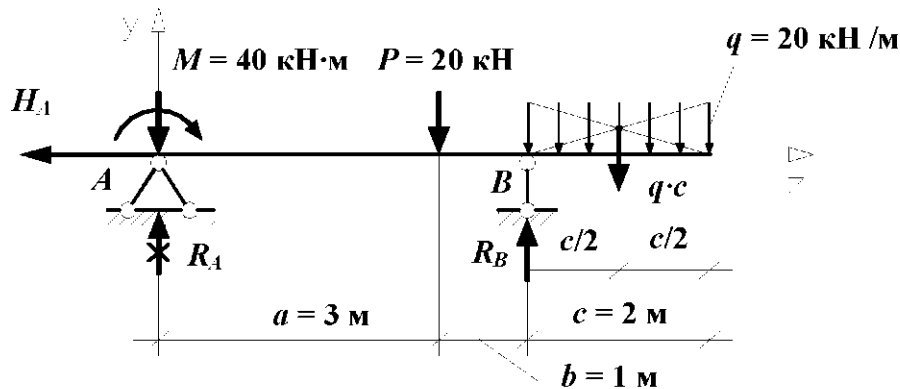


Рис. 7.4. Определение опорных реакций

2) Сумма моментов всех сил относительно опоры A равна нулю:

$$\sum M_A = 0.$$

Договоримся о правиле знаков для момента силы.

Будем считать момент силы положительным, если он **вращает** балку относительно некоторой точки против хода часовой стрелки.

Подчеркнем, что в этом правиле говорится о моменте, который **вращает** балку. Это очень *важное* замечание, и оно станет ясным из дальнейшего изложения (см. вопрос 7.16). Поэтому слово «вращает» и выделено в правиле жирным шрифтом.

Кстати, происхождение термина «*момент силы*» неизвестно. По-видимому, этот термин произошел от латинского слова *momentum*, что означает способность силы двигать (вращать) объект, используя какой-либо рычаг (плечо силы).

Вернемся к рассматриваемому примеру. Предварительно нам необходимо найти равнодействующую распределенной погонной нагрузки. Очевидно, что она *равна площади эпюры этой нагрузки $q \cdot c$ и приложена в центре тяжести этой эпюры*, то есть посередине участка длиной c .

Тогда

$$\sum M_A = +R_B \cdot (a+b) - q \cdot c \cdot (a+b+c/2) - P \cdot a - M = 0;$$

$$R_B = \frac{q \cdot c \cdot (a+b+c/2) + P \cdot a + M}{a+b} = \frac{20 \cdot 2 \cdot (3+1+2/2) + 20 \cdot 3 + 40}{3+1} = 75 \text{ кН.}$$

3) Сумма моментов всех сил относительно опоры B равна нулю:

$$\sum M_B = 0$$

или

$$\sum M_B = -R_A \cdot (a+b) - M + P \cdot b - q \cdot c \cdot c/2 = 0;$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot b - q \cdot c \cdot c/2}{a + b} = \frac{-40 + 20 \cdot 1 - 20 \cdot 2 \cdot 2/2}{3 + 1} = -15 \text{ кН.}$$

Знак «минус» в полученном результате говорит о том, что предварительное направление опорной реакции R_A нами было выбрано *неверно*. Заменяем направление реакции R_A на противоположное (см. рис. 7.4) и про знак «минус» навсегда забудем.

Теперь сделаем проверку.

Сумма проекций всех сил на ось y должна быть равна нулю:

$$\sum Y = 0.$$

Силы, направление которых совпадает с положительным направлением оси y , проектируются (или проецируются) на эту ось со знаком «плюс»:

$$\begin{aligned} \sum Y &= -R_A - P + R_B - q \cdot c = 0; \\ -15 - 20 + 75 - 20 \cdot 2 &= 0; \quad 0 = 0, \end{aligned}$$

то есть опорные реакции найдены нами верно.

Теперь перейдем к *жестко заземленной* балке. В этом случае для определения опорных реакций составляются следующие уравнения статики:

$$\sum Z = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_c = 0.$$

Из первого уравнения определяется реакция H_c (обычно она равна нулю), из второго – R_c , а из третьего – момент в заделке M_c . Проверка, как правило, не производится.

7.15. Какие балки называются *статически неопределимыми*?

Балки, для которых не удастся определить все опорные реакции из уравнений статики, называются *статически неопределимыми*.

Мы еще вернемся к этому вопросу и остановимся на нем подробнее.

7.16. С какой целью строятся эпюры перерезывающих сил Q_y и изгибающих моментов M_x ?

Они строятся для наглядного представления о характере изменения этих внутренних силовых факторов по длине балки, а также с целью определения тех *опасных* сечений, в которых возникают, соответственно, *наибольшие* касательные и нормальные напряжения.

Еще раз напомним, что:

1) **перерезывающая сила** численно равна алгебраической сумме всех внешних сил (активных и реактивных), действующих на **рассматриваемую** нами часть балки;

2) **изгибающий момент** численно равен алгебраической сумме моментов этих же сил относительно главной центральной оси, проходящей через центр тяжести рассматриваемого поперечного сечения (иногда говорят просто относительно самого сечения).

7.17. Какие правила знаков используются для вычисления перерезывающей силы Q_y и изгибающего момента M_x ?

Эти правила, к сожалению, непростые для запоминания, формулируются следующим образом.

Для перерезывающей силы: *внешняя сила, действующая на рассматриваемую часть балки и стремящаяся «повернуть» эту часть относительно сечения по ходу часовой стрелки, вызывает в сечении положительную перерезывающую силу. Такая внешняя сила входит в алгебраическую сумму для определения Q_y со знаком «плюс»* (рис. 7.5, а).

Заметим, что и положительная перерезывающая сила Q_y , в свою очередь, тоже «стремится вращать» любую из частей балки по ходу часовой стрелки.

Теперь приведем правило знаков для изгибающего момента: *внешняя нагрузка, изгибающая рассматриваемую часть балки выпуклостью вниз, вызывает в сечении положительный изгибающий момент. Поэтому момент, создаваемый такой нагрузкой, входит в алгебраическую сумму для определения M_x со знаком «плюс»* (рис. 7.5, б).

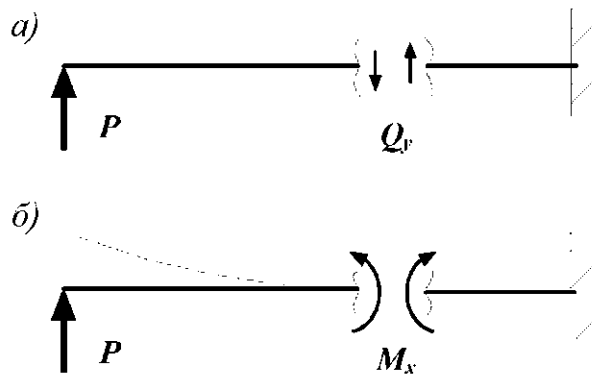


Рис. 7.5. Правила знаков для перерезывающей силы и изгибающего момента

Обращаем внимание уважаемого Читателя на то, что в этом правиле говорится об *изгибающем* моменте, то есть моменте, который *изгибает* балку, а не *вращает* ее.

Из рис. 7.5, б видно, что положительный изгибающий момент M_x как бы «стремится изогнуть» *любую* из частей балки также выпуклостью вниз.

Для удобства определения знака изгибающего момента рекомендуется поперечное сечение балки мысленно представлять в виде условной жесткой заделки.

7.18. Какие дифференциальные зависимости существуют между интенсивностью равномерно распределенной нагрузки q , перерезывающей силой Q_y и изгибающим моментом M_x ?

Эти зависимости, имеющие вид:

$$dQ_y/dz = -q; \quad dM_x/dz = Q_y; \quad d^2M_x/dz^2 = -q, \quad (7.1)$$

впервые были установлены в 1852 г. немецким ученым *Йоганом Вильгельмом Шведлером* (Schwedler, 1823 – 1894 гг.). Позднее они были получены

и русским ученым *Дмитрием Ивановичем Журавским* (1821 – 1891 гг.). Формулы (7.1) используются для контроля правильности построения эпюр Q_y и M_x . Очень часто их называют также формулами *Шведлера – Журавского*.

Необходимо подчеркнуть, что в приведенных формулах распределенная нагрузка q считается положительной, если она направлена *вниз*.

7.19. Какие правила используются при построении и проверке эпюр Q_y и M_x ?

Приведем *основные* правила, которые вытекают непосредственно из метода сечений, а также являются следствием формул (7.1) *Шведлера – Журавского*. Отметим, что *некоторые* из этих правил справедливы только при обходе эпюр Q_y и M_x *слева направо*:

1) Если на некотором участке балки отсутствует распределенная нагрузка ($q = 0$), то эпюра Q_y на этом участке представляет собой *прямую, параллельную оси балки* (рис. 7.6). Действительно, поскольку $q = 0$, то и $dQ_y/dz = 0$. Следовательно, $Q_y = const$.

Эпюра моментов на этом же участке (где $q = 0$) – также *прямая линия*. Причем, если $Q_y > 0$, то прямая линия идет *вверх*, а если $Q_y < 0$, прямая линия идет *вниз*. Если $Q_y = 0$, то изгибающий момент *постоянен*, поскольку $dM_x/dz = 0$.

2) Под сосредоточенной *силой* P на эпюре Q_y (рис. 7.6, а) имеется *скачок* на величину этой силы и по ее направлению, а на эпюре M_x – *излом*, угол которого всегда направлен навстречу нагрузке.

3) Если на некотором участке балки имеется равномерно распределенная нагрузка, то эпюра Q_y на этом участке представляет собой *наклонную прямую* (рис. 7.6, б), идущую вниз, если нагрузка q направлена вниз, и идущую вверх, если нагрузка q направлена вверх. Эпюра M_x на этом участке, согласно третьей формуле (7.1), изменяется по квадратичной *параболе*, причем выпуклость параболы всегда направлена *навстречу* нагрузке.

Если эпюра перерезывающей силы проходит через нулевое значение, то в этом сечении балки на эпюре M_x имеется *экстремум* (последнее вытекает из зависимости $dM_x/dz = Q_y = 0$). Отметим, что в *точках, соответствующих началу и концу участка, в пределах которого действует распределенная нагрузка, параболическая и прямолинейная части эпюры M_x переходят одна в другую плавно (без излома)*.

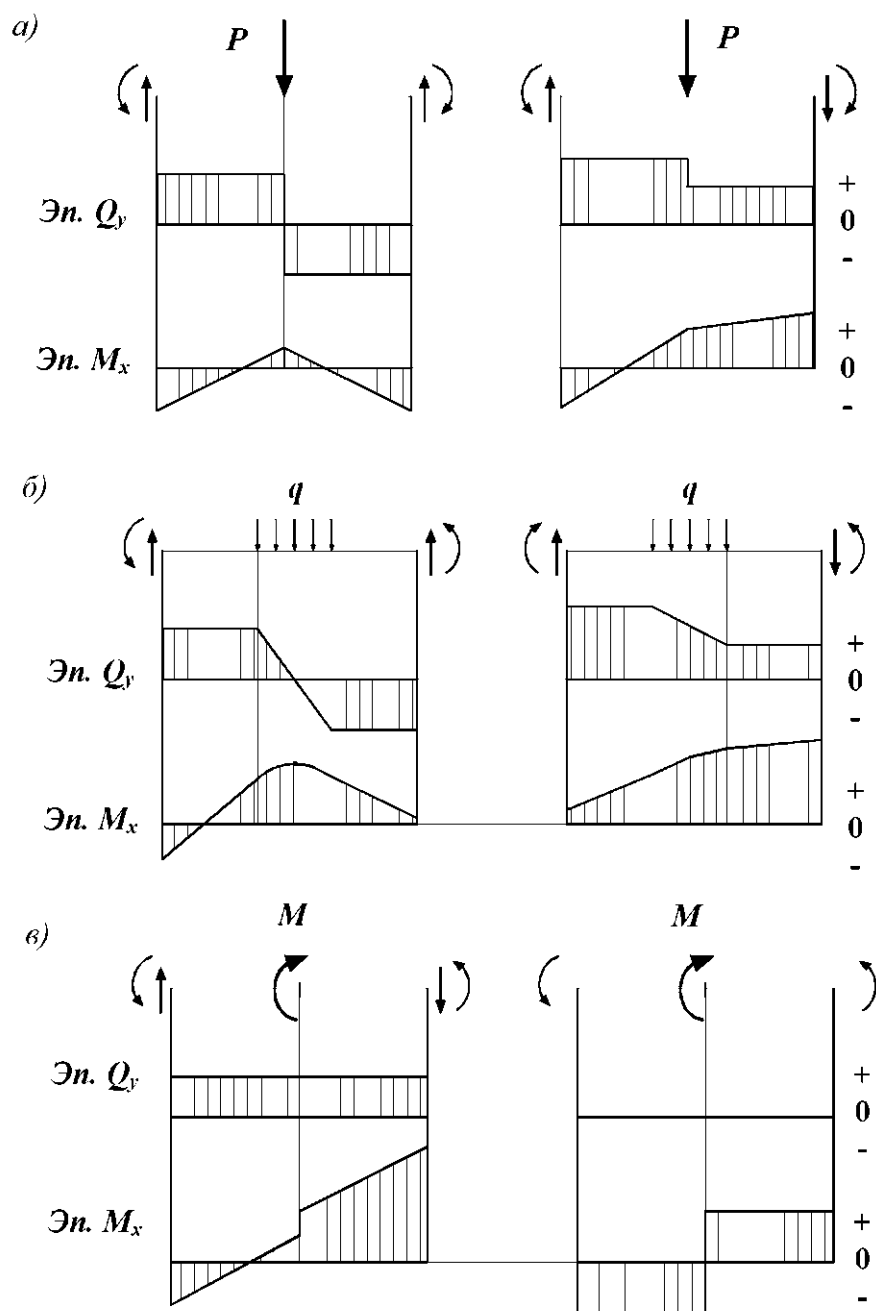


Рис. 7.6. Правила согласования эпюр перерезывающих сил и изгибающих моментов

4) Сосредоточенный внешний момент M (рис. 7.6, в) никак не отражается на эпюре Q_y . На эпюре M_x в месте приложения этого момента имеется скачок на его величину.

Заметим, что построение эпюр перерезывающих сил и изгибающих моментов ввел в практику расчета стержней на изгиб в 1859 г. французский ученый Жак Антуан Шарль Бресс (Bresse, 1822 – 1883 гг.).

7.20. Можно ли продемонстрировать порядок построения эпюр Q_y и M_x на конкретном числовом примере?

Да, конечно. Покажем порядок построения этих эпюр на рассмотренном выше примере балки (см. рис. 7.4).

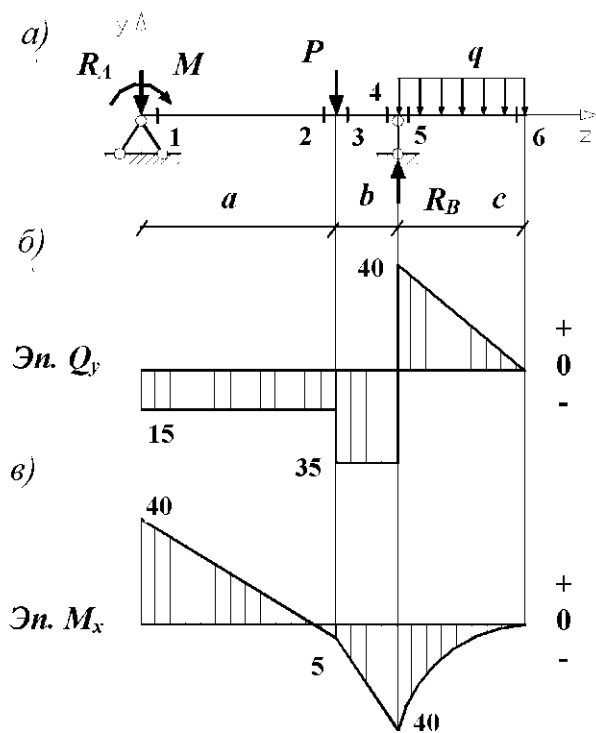


Рис. 7.7. Эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов

Сначала разобьем всю длину балки на отдельные участки (рис. 7.7, а). Границами этих участков являются точки приложения сосредоточенных усилий (активных или реактивных), а также точки, соответствующие началу и окончанию действия распределенной нагрузки. Таких участков получается три.

Затем по границам этих участков наметим шесть поперечных сечений, в которых мы и будем вычислять значения перерезывающих сил и изгибающих моментов.

Сечение 1. Отбросим мысленно правую часть балки (заключим ее листком бумаги, совмещая левый край листка с рассматриваемым сечением).

Перерезывающая сила, возникающая в этом сечении, должна уравновесить все внешние силы, которые мы видим. В данном случае мы видим только реакцию опоры, направленную вниз. Таким образом,

$$Q_{y1} = -R_A = -15 \text{ кН.}$$

Знак «минус» нами взят потому, что сила R_A вращает видимую нами часть балки относительно сечения (края листка бумаги) против хода часовой стрелки.

Изгибающий момент в сечении равен алгебраической сумме моментов всех усилий, которые мы видим, относительно рассматриваемого сечения (то есть относительно края листка бумаги).

Мы видим два усилия: реакцию опоры R_A и момент M . Однако у силы R_A плечо практически равно нулю. Поэтому

$$M_{x1} = +M = 40 \text{ кН·м.}$$

Здесь знак «плюс» нами взят потому, что внешний момент M изгибает видимую нами часть балки выпуклостью вниз.

Заметим, что при определении знака изгибающего момента мы мысленно освобождаем видимую нами часть балки от всех фактических опорных закреплений и представляем ее как бы заземленной в рассматриваемом сечении (то есть левый край листка бумаги нами мысленно представляется жесткой заделкой).

Сечение 2. По-прежнему будем закрывать листком бумаги всю правую часть балки. Теперь, в отличие от первого сечения, у силы R_A появилось плечо, равное a . Поэтому

$$Q_{y2} = -R_A = -15 \text{ кН};$$

$$M_{x2} = +M - R_A a = +40 - 15 \cdot 3 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сечение 3. Сначала закроем правую часть. Получим:

$$Q_{y3} = -R_A - P = -15 - 20 = -35 \text{ кН};$$

$$M_{x3} = +M - R_A a = +40 - 15 \cdot 3 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Теперь, для контроля правильности вычислений, закроем листком бумаги левую часть балки. Мы видим реакцию правой опоры R_B и распределенную нагрузку q . Равнодействующая погонной нагрузки равна $q \cdot c$. Она приложена посередине участка длиной c . Поэтому

$$Q_{y3} = -R_B + qc = -75 + 20 \cdot 2 = -35 \text{ кН};$$

$$M_{x3} = +R_B b - qc(b + c/2) = +75 \cdot 1 - 20 \cdot 2 \cdot (1 + 2/2) = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

То есть все верно.

Сечение 4. Закрываем листком бумаги левую часть балки. Тогда

$$Q_{y4} = -R_B + qc = -75 + 20 \cdot 2 = -35 \text{ кН};$$

$$M_{x4} = -qc(c/2) = -20 \cdot 2 \cdot (2/2) = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сечение 5. По-прежнему закроем левую часть балки. Будем иметь:

$$Q_{y5} = +qc = +20 \cdot 2 = +40 \text{ кН};$$

$$M_{x5} = -qc(c/2) = -20 \cdot 2 \cdot (2/2) = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сечение 6. Опять закроем левую часть балки. Получим:

$$Q_{y6} = M_{x6} = 0.$$

По найденным значениям строим эпюры перерезывающих сил Q_y (рис. 7.7, б) и изгибающих моментов M_x (рис. 7.7, в).

Убеждаемся в том, что под незагруженными участками балки эпюра перерезывающих сил идет параллельно ее оси. Под распределенной нагрузкой q – по прямой, имеющей наклон вниз. На эпюре Q_y имеется три скачка: под реакцией R_A – вниз на 15 кН, под силой P – вниз на 20 кН и под реакцией R_B – вверх на 75 кН.

На эпюре изгибающих моментов мы видим изломы под сосредоточенной силой P и под опорными реакциями. Углы изломов направлены навстречу этим силам. Под распределенной нагрузкой q эпюра изменяется по

квадратичной параболе, выпуклость которой направлена навстречу нагрузке. В сечении b на эпюре M_x – экстремум, поскольку эпюра перерезывающей силы в этом месте проходит здесь через нулевое значение.

В заключение отметим, что, как это ни странно, студенты зачастую неверно «штрихуют» эпюры. Смысл «штриховки» заключается в том, что каждая ее линия (*ордината* эпюры) в принятом масштабе дает значение внутреннего усилия, возникающего в соответствующем поперечном сечении стержня. Поэтому так любимая студентами «штриховка» эпюр под углом 45° лишена всякого смысла.

7.21. Как формулируется гипотеза плоских сечений при изгибе балки?

Мысленно нанесем на боковой поверхности недеформированной балки сетку, состоящую из продольных и поперечных (перпендикулярных к оси балки) прямых линий. В результате изгиба балки мы увидим, что продольные линии примут криволинейное очертание, а поперечные линии *практически* останутся *прямыми* и *перпендикулярными* к изогнутой оси балки. Таким образом, *поперечные сечения, плоские и перпендикулярные к оси балки до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к изогнутой оси после ее деформации.*

Это обстоятельство свидетельствует о том, что при изгибе (как при растяжении и кручении) выполняется *гипотеза плоских сечений*.

7.22. Какие еще допущения принимаются при выводе формулы для нормальных напряжений при *чистом* изгибе балки и чему они равны?

Помимо упомянутой *гипотезы плоских сечений* принимается ещё одно допущение: считается, что *продольные волокна балки при ее изгибе не надавливают друг на друга* (то есть напряжения $\sigma_y = 0$).

Эти два допущения вместе называют гипотезой *Бернулли*.

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения, испытывающую *чистый* изгиб ($Q_y = 0$). Двумя бесконечно близкими поперечными сечениями выделим элемент балки длиной dz (рис. 7.8. *a*). В результате изгиба поперечные сечения балки повернутся, образовав между собой угол $d\theta$. Пусть при этом верхние волокна испытывают сжатие, а нижние – растяжение. Радиус кривизны нейтрального волокна обозначим ρ .

Для удобства далее будем условно считать, что волокна изменяют свою длину, оставаясь при этом прямыми (рис. 7.8. *б*).

Тогда абсолютное и относительное удлинения волокна, отстоящего на расстоянии y от нейтрального волокна, будут соответственно равны:

$$\Delta dz = y d\theta; \quad \varepsilon_z = \Delta dz / dz = y d\theta / dz = y / \rho.$$

По закону *Гука*

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = Ey/\rho. \quad (7.2)$$

Покажем теперь, что *продольные волокна, не испытывающие при изгибе балки ни растяжения, ни сжатия, проходят через главную центральную ось x .*

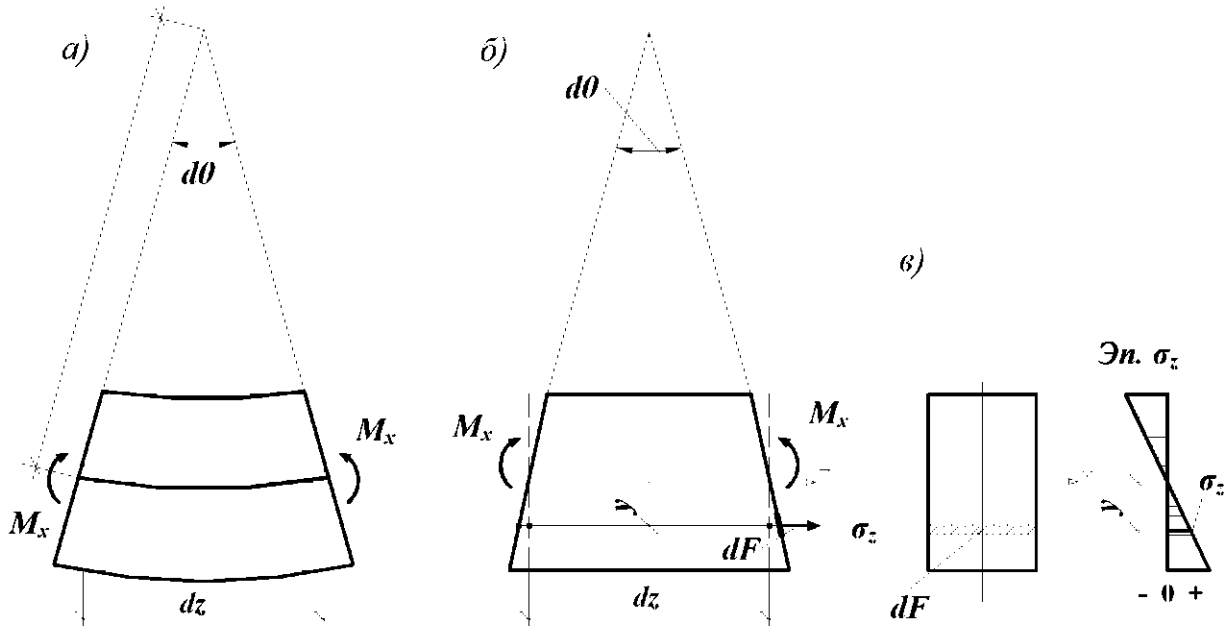


Рис. 7.8. Нормальные напряжения при чистом изгибе

Поскольку длина балки (а точнее, длина ее оси) при изгибе не изменяется, продольное усилие N , возникающее в поперечном сечении, должно равняться нулю. Элементарное продольное усилие $dN = \sigma_z dF$. Тогда

$$N = \int_F \sigma_z dF = 0,$$

или, с учетом выражения (7.2),

$$\int_F \frac{Ey}{\rho} dF = 0.$$

Множитель $E/\rho \neq 0$ можно вынести за знак интеграла, так как он не зависит от переменной интегрирования. В итоге получим

$$\int_F y dF = 0. \quad (7.3)$$

Выражение (7.3) представляет собой *статический момент* площади поперечного сечения балки относительно *нейтральной* оси x . Он равен нулю только в том случае, когда эта ось проходит через центр тяжести поперечного сечения.

Следовательно, *нейтральная ось (или нулевая линия) при изгибе балки проходит через центр тяжести поперечного сечения.*

Установленный факт, кстати, подчеркивает важность темы, рассмотренной нами выше в беседе 4.

Очевидно, что изгибающий момент связан с нормальными напряжениями, возникающими в точках поперечного сечения стержня. Поэтому перейдем к его вычислению. Элементарный изгибающий момент, создаваемый элементарной силой $\sigma_z dF$, равен $dM_x = (\sigma_z dF)y$, тогда

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = \int_F \frac{E}{\rho} y^2 dF = \frac{EI_x}{\rho} = EI_x k, \quad (7.4)$$

где $I_x = \int_F y^2 dF$ – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси x , а отношение $k = 1/\rho$ называется кривизной оси балки.

Произведение EI_x в формуле (7.4) называется **жесткостью** поперечного сечения балки при изгибе. Чем больше эта величина, тем меньше кривизна оси балки k при том же значении изгибающего момента.

Формула (7.4) представляет собой закон Гука для стержня при изгибе: *изгибающий момент, возникающий в поперечном сечении, пропорционален кривизне оси балки.*

Выражая из (7.4) радиус кривизны ρ и подставляя его значение в (7.2), получим окончательно следующую формулу для нормальных напряжений σ_z , возникающих в произвольной точке поперечного сечения балки, отстоящей на расстоянии y от нейтральной оси x :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y. \quad (7.5)$$

Отметим, что в формулу (7.5), которая, кстати, впервые была получена Навье, следует подставлять абсолютные значения изгибающего момента M_x и координаты y . Будет ли напряжение в данной точке растягивающим или же сжимающим легко установить по характеру изгиба балки или, что является тем же самым, по эпюре изгибающих моментов, *ординаты которой откладываются нами со стороны сжатых волокон балки.*

Из формулы (7.5) видно, что нормальные напряжения σ_z изменяются по высоте поперечного сечения балки по **линейному** закону.

Напомним, что по ширине сечения они считаются *постоянными*.

На рис. 7.8, в показана эпюра нормальных напряжений. Наибольшие напряжения при изгибе балки возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

Несложный анализ эпюры нормальных напряжений показывает, что при изгибе балки материал, расположенный вблизи нейтральной оси, практически *не работает*. Поэтому в целях снижения веса балки рекомендуется выбирать такие формы поперечного сечения, у которых большая часть материала удалена от нейтральной оси как, например, у *двутаврового профиля*.

7.23. Не совсем понятно, в каком месте при выводе формулы для нормальных напряжений мы воспользовались принятым ранее допущением о том, что при изгибе *продольные волокна балки не надавливают друг на друга?*

Мы привели вывод формулы для нормальных напряжений таким, каким он дается практически во всех учебниках по сопротивлению материалов. И действительно, если в этом выводе, не сделать дополнительных комментариев, то будет не совсем ясно, в каком месте мы воспользовались упомянутым допущением.

Приоткроем занавес. Выше мы установили, что при изгибе балки имеет место продольная деформация волокон ε_z . При наличии надавливания продольных волокон, то есть при наличии нормального напряжения σ_y , продольная деформация должна измениться на слагаемое

$$- \mu \frac{\sigma_y}{E},$$

обусловленное влиянием коэффициента Пуассона μ . Тогда

$$\varepsilon_z = (\sigma_z - \mu\sigma_y) / E.$$

По аналогии поперечная деформация, связанная с изменением высоты поперечного сечения стержня, будет равна

$$\varepsilon_y = (\sigma_y - \mu\sigma_z) / E.$$

Из двух последних формул легко получить выражения для нормальных напряжений, возникающих в продольном и в поперечном направлениях балки:

$$\sigma_z = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_z + \mu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z).$$

Эти формулы представляют собой *обобщенный закон Гука* для случая плоского напряженного состояния.

Принимая допущение о том, что *продольные волокна балки не надавливают друг на друга*, мы существенно упрощаем вывод формулы для нормальных напряжений σ_z . Полагая, что $\sigma_y = 0$, мы из второй формулы обобщенного закона Гука находим:

$$\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z = 0$$

или

$$\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_z.$$

Тогда

$$\sigma_z = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_z + \mu\varepsilon_y) = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_z - \mu^2\varepsilon_z) = E\varepsilon_z.$$

Полученное выражение и фигурирует у нас выше в формуле (7.2).

7.24. Что называется осевым моментом сопротивления при изгибе?

В том случае, когда поперечное сечение балки *симметрично* относительно нейтральной оси, нормальные напряжения в точках, наиболее удаленных от нее (при $|y| = h/2$), определяются по формуле

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_x}{I_x} \frac{h}{2}.$$

Геометрическую характеристику поперечного сечения балки, равную

$$W_x = 2I_x/h,$$

и называют *осевым моментом сопротивления при изгибе*. Он измеряется в единицах длины в кубе (как правило, в см³).

Тогда наибольшие нормальные напряжения равны

$$\sigma_{z \max} = M_x/W_x. \quad (7.6)$$

Заметим, что формула (7.6) по внешнему виду напоминает формулу (5.9) для наибольших касательных напряжений при кручении стержня. И здесь буквенное обозначение W , выбранное для обозначения осевого момента сопротивления при изгибе, очень похоже на перевернутую букву M , что также способствует лучшему запоминанию очень важной формулы (7.6).

7.25. Чему равны моменты сопротивления при изгибе для балок прямоугольного и круглого поперечных сечений?

Для *прямоугольного* поперечного сечения (см. рис. 4.4) момент сопротивления при изгибе относительно нейтральной оси x равен:

$$W_x = bh^2/6.$$

Из этой формулы видно, что при той же самой площади поперечного сечения балки ее момент сопротивления существенно возрастает с увеличением высоты балки h .

Если балка имеет *квадратное* поперечное сечение со стороной a , то

$$W_x = a^3/6.$$

В случае *круглого* поперечного сечения балки момент сопротивления при изгибе равен

$$W_x = \pi d^3/32.$$

Заметим, что для катанных профилей, таких, например, как швеллер, двутавр и уголок, значения моментов сопротивления балки при изгибе (а также другие геометрические характеристики) определяются по *ортаментам*, которые приводятся в приложениях практически к каждому учебнику по сопротивлению материалов.

7.26. Чему равны нормальные напряжения при поперечном изгибе балки?

В отличие от *чистого* изгиба, при *поперечном* изгибе в сечении балки помимо изгибающего момента M_x возникает и перерезывающая сила Q_y . Поэтому в поперечном сечении наряду с нормальными напряжениями σ_z возникают и касательные напряжения τ_{yz} .

На основании *закона парности* касательных напряжений в продольных сечениях балки возникают касательные напряжения $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Возникновение касательных напряжений τ_{yz} в плоскостях, параллельных нейтральной плоскости, покажем на следующем простом примере.

Мысленно представим себе балку прямоугольного поперечного сечения высотой h , шарнирно опертую по концам. Поместим поверх этой балки точно такую же балку. Приложим к этим двум балкам посередине пролета сосредоточенную силу P . Если пренебречь трением между этими балками, изгиб каждой из них будет происходить *независимо* от изгиба другой балки. При этом у обеих балок будут сжаты верхние и растянуты нижние волокна. В результате нижние продольные волокна верхней балки *сместятся* относительно верхних волокон нижней балки.

Иную картину мы будем наблюдать в *сплошной* балке высотой $2h$. Никакого смещения верхней части балки относительно нижней мы, естественно, не обнаружим. Отсутствие этого смещения и объясняется возникновением, в данном случае в нейтральном слое, касательных напряжений τ_{yz} .

Поскольку при *поперечном* изгибе в поперечных сечениях стержня возникают касательные напряжения τ_{yz} , поперечные сечения балки *искривляются* (рис. 7.9) и, следовательно, *гипотеза плоских сечений нарушается*.

Однако теоретические и экспериментальные исследования показали, что если балка является достаточно *длинной* ($l/h > 10$), то влияние искривления поперечного сечения на значения нормальных напряжений невелико.

Поэтому *влиянием сдвигов на закон распределения нормальных напряжений при изгибе пренебрегают* и нормальные напряжения вычисляют по той же самой формуле (7.6).

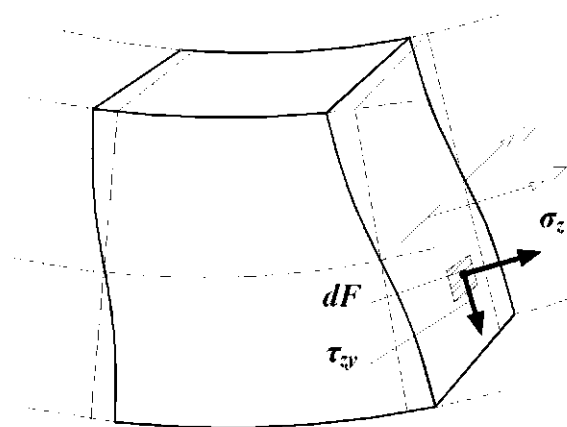


Рис. 7.9. Нарушение гипотезы плоских сечений

7.27. По какой формуле вычисляются касательные напряжения при поперечном изгибе?

Вырежем из балки *прямоугольного* поперечного сечения (рис. 7.10, а) элемент длиной dz и дополнительным продольным сечением рассечем его на две части (рис. 7.10, б).

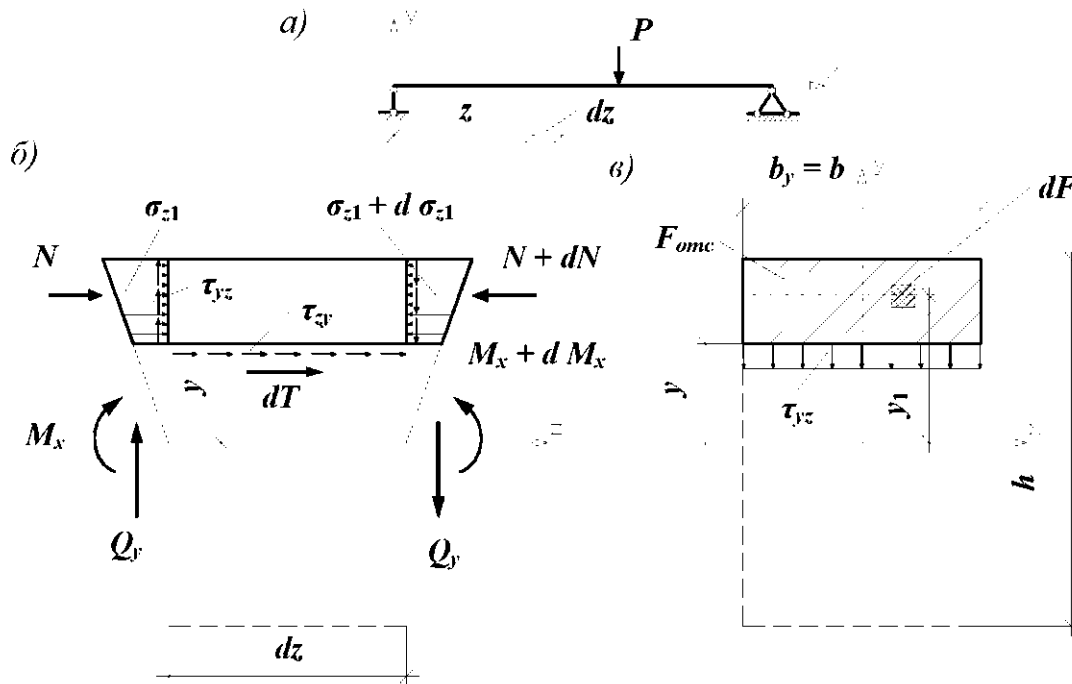


Рис. 7.10. Касательные напряжения при изгибе балки

Рассмотрим равновесие верхней части, в поперечных сечениях которой из-за отличия изгибающих моментов возникают *разные* сжимающие напряжения. Для того чтобы эта часть балки находилась в равновесии (то есть выполнялось условие равновесия $\sum Z = 0$), в ее продольном сечении должна возникнуть касательная сила dI' . Тогда

$$\sum Z = \int_{F_{omc}} \sigma_{z1} dF' - \int_{F_{omc}} (\sigma_{z1} + d\sigma_{z1}) dF' + dI' = 0.$$

Отсюда

$$dI' = \int_{F_{omc}} d\sigma_{z1} dF' = \int_{F_{omc}} \frac{dM_x}{I_x} y_1 dF' = \frac{dM_x}{I_x} S_x^{omc}, \quad (7.7)$$

где интегрирование ведется только по *отсеченной* части площади поперечного сечения балки F'_{omc} .

Эта часть площади (рис. 7.10, в) нами заштрихована.

В формуле (7.7) $S_x^{omc} = \int_{F_{omc}} y_1 dF'$ – статический момент *отсеченной* (заштрихованной) части площади поперечного сечения относительно нейтральной оси x .

Будем предполагать, что касательные напряжения τ_{yz} , возникающие в продольном сечении балки, *равномерно* распределены по ее ширине b_y в месте сечения. Это *допущение*, известное под названием гипотезы Журавского, справедливо только в том случае, когда ширина поперечного сечения много меньше его высоты, то есть сечение является **узким**.

Тогда $dT = \tau_{yz} b_y dz$ и соответственно $\tau_{yz} = dT/b_y dz$.

Учитывая формулу (7.7), найдем, что

$$\tau_{yz} = \frac{dM_x}{dz} \frac{S_x^{омс}}{I_x b_y}.$$

Но, согласно формуле Шведлера Журавского, $dM_x/dz = Q_y$, а $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Тогда окончательно касательные напряжения τ_{zy} , возникающие в точках **поперечного** сечения балки, находящихся на расстоянии y от нейтральной оси x , определяются по следующей формуле

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^{омс}}{I_x b_y}. \quad (7.8)$$

Приближенная формула (7.8) впервые была получена в 1855 г. Дмитрием Ивановичем Журавским, и поэтому она носит его имя.

7.28. Как изменяются касательные напряжения по поперечному сечению балки?

Проанализируем формулу Журавского. Для конкретного сечения балки перерезывающая сила Q_y и момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси I_x являются постоянными величинами. Поэтому из формулы (7.8) следует, что *по высоте поперечного сечения касательные напряжения изменяются по тому же закону, что и отношение статического момента отсеченной части поперечного сечения $S_x^{омс}$ к ширине поперечного сечения b_y , в котором они вычисляются.*

Во всех точках поперечного сечения, расположенных на расстоянии y от нейтральной оси, то есть *по всей ширине сечения b_y , касательные напряжения одинаковы.*

Во всех самых удаленных от нейтральной оси точках поперечного сечения касательные напряжения равны нулю, поскольку в этом случае $S_x^{омс} = 0$.

Наибольшие касательные напряжения возникают в точках поперечного сечения, расположенных на нейтральной оси. Напомним, что в этих точках нормальные напряжения равны нулю.

7.29. Как выглядят эпюры касательных напряжений для балок прямоугольного и двутаврового поперечных сечений?

Напомним, что при выводе формулы Журавского мы предполагали, что балка имеет *прямоугольное* поперечное сечение (рис. 7.11), поэтому

$$b_y = b = const; I_x = bh^3/12; F_{омс} = b[(h/2) - y]; S_x^{омс} = b[(h/2)^2 - y^2]/2, \quad (7.9)$$

где y – расстояние от точки, в которой определяется касательное напряжение, до нейтральной оси x .

Подставляя выражения (7.9) в формулу (7.8), получим:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{bh^3} \frac{\frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]}{b} = \frac{6Q_y}{bh^2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right].$$

Отсюда видно, что для балки прямоугольного профиля касательные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения по закону *квадратичной* параболы (см. рис. 7.11).

При $y = \pm h/2$, то есть для точек, наиболее удаленных от нейтральной оси, $\tau_{zy} = 0$. Для точек, расположенных на нейтральной оси (при $y = 0$), касательные напряжения достигают *максимального* значения:

$$\tau_{zy} = \tau_{zy \max} = 3Q_y/2F.$$

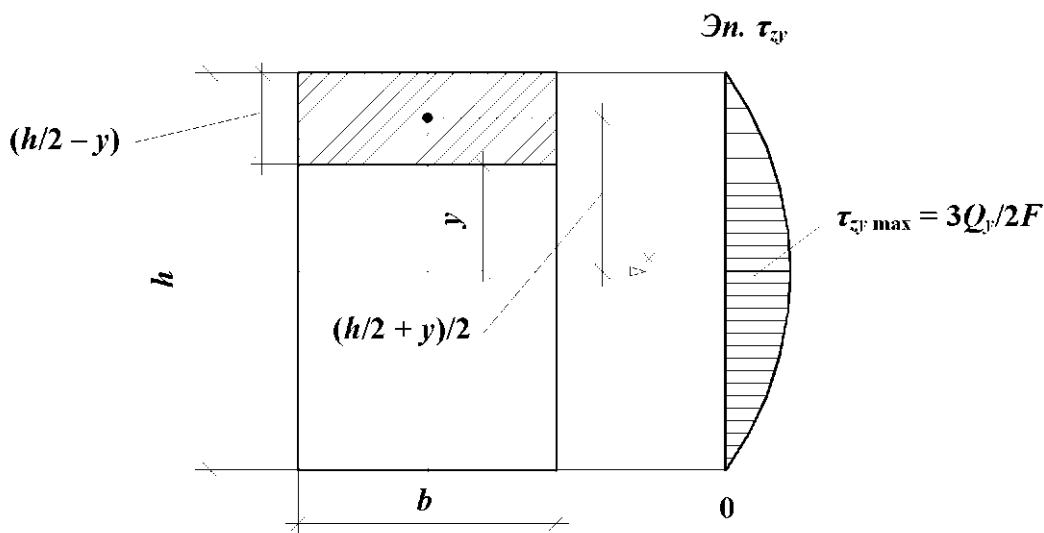


Рис. 7.11. Эпюра касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения балки

Характерной особенностью *двутаврового* сечения балки является то обстоятельство, что в том месте, где полка соединяется со стенкой, происходит резкое изменение ширины поперечного сечения b_y (рис. 7.12).

Определим касательное напряжение в некоторой точке K .

Для этого проведем через эту точку сечение. Ширина этого сечения равна толщине стенки, то есть $b_y = d$. Рассмотрим *верхнюю отсеченную* часть площади поперечного сечения, которая состоит из площади полки F_1 и площади части стенки F_2 (обе эти площади на рис. 7.12, а заштрихованы). Статический момент этой отсеченной части площади поперечного сечения относительно нейтральной оси x равен:

$$S_x^{omc} = F_1 y_1 + F_2 y_2 = bt(h/2 - t/2) + F_2 y_2.$$

Эпюра касательных напряжений, возникающих в точках стенки двутавра, имеет вид, показанный на рис. 7.12, б.

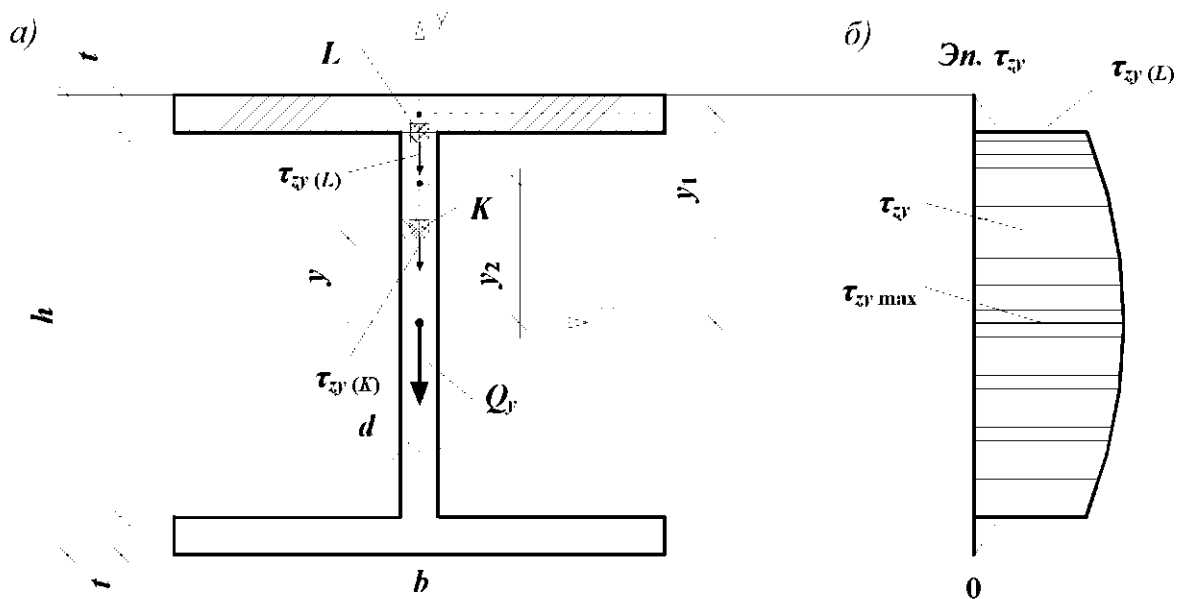


Рис. 7.12. Эпюра касательных напряжений для двутаврового поперечного сечения балки

Касательные напряжения τ_{xy} , возникающие в точках полки двутавра, по формуле Журавского вычислять *нельзя*, поскольку при ее выводе использовалось *допущение о равномерности распределения касательных напряжений по ширине поперечного сечения*, что справедливо только в том случае, если ширина сечения b_y невелика. Однако очевидно, что эти напряжения малы и не оказывают практического влияния на прочность балки. Их эпюра показана штриховой линией (см. рис. 7.12, б).

Касательное напряжение в точке L , то есть в том месте, где полка соединяется со стенкой, вычисляется по формуле

$$\tau_{xy(L)} = \frac{Q_y}{I_x} \frac{bt(h/2 - t/2)}{d}.$$

Как и для балки прямоугольного поперечного сечения, наибольшие касательные напряжения в балке двутаврового профиля возникают в точках, лежащих на нейтральной оси x .

7.30. И все-таки, по какой формуле можно вычислить значения касательных напряжений для балки *прямоугольного* поперечного сечения, если оно не является узким?

Точное решение задачи, полученное *Сен-Венаном*, показывает, что касательные напряжения при поперечном изгибе балки *не одинаковы* по ширине поперечного сечения. *Наибольшие* касательные напряжения возникают в точках, расположенных *по краям нейтральной оси*. Значения этих напряжений можно определить по следующей формуле

$$\tau_{zy \max} = k(3Q_y / 2F'),$$

где k – коэффициент, зависящий от отношения сторон b/h .

Так, например, при $b/h = 0,5$ коэффициент $k = 1,033$, то есть для узкого поперечного сечения формула *Журавского* дает практически точное значение. Если же сечение широкое, например, $b/h = 4$, то тогда коэффициент $k = 1,988$. Следовательно, формула *Журавского* занижает максимальные касательные напряжения почти в два раза.

7.31. Как выглядит эпюра касательных напряжений для балки круглого поперечного сечения?

Прежде чем ответить на этот вопрос, попробуем сначала выяснить, какое вообще направление имеет касательное напряжение, возникающее в некоторой точке контура поперечного сечения стержня.

Рассмотрим поперечное сечение стержня, имеющее совершенно *произвольную форму* (рис. 7.13, а). Предположим, что в некоторой точке K его контура возникает касательное напряжение τ , направленное *под каким-то углом* по отношению к контуру. Разложим это напряжение на две составляющие: τ_n – по *нормали* и τ_t – по *касательной* к контуру сечения. Если напряжение τ_n действительно существует, то *по закону парности касательных напряжений* на поверхности стержня должно существовать и равное ему по значению касательное напряжение τ'_n . Но *поверхность* стержня при изгибе не нагружена внешними силами, параллельными оси балки z . Поэтому касательное напряжение на поверхности стержня $\tau'_n = 0$ и, следовательно, $\tau_n = 0$.

Таким образом, при изгибе балки *касательное напряжение, возникающее в некоторой точке контура поперечного сечения, всегда направлено по касательной к контуру*.

Покажем, что *в вершине угла прямоугольного поперечного сечения балки касательное напряжение при изгибе равно нулю* (рис. 7.13, б).

Предположим, что в вершине угла, в точке M , возникает некоторое касательное напряжение τ . Разложим его на составляющие τ_{zx} и τ_{zy} . Но

касательные напряжения *на поверхности балки* отсутствуют ($\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$). Поэтому по закону парности касательных напряжений должны быть равны нулю и составляющие τ_{zx} и τ_{zy} . Следовательно, в точке M $\tau = 0$.

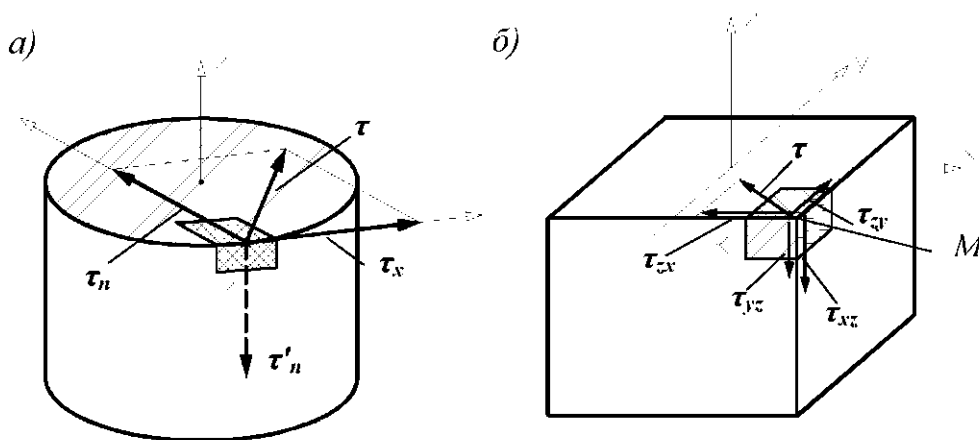


Рис. 7.13. Касательное напряжение в точке контура поперечного сечения стержня

С учетом изложенного выше, задача вычисления касательных напряжений в произвольной точке балки *круглого* поперечного сечения заметно усложняется. Однако, если сделать предположение о том, что в точках, расположенных на некоторой линии ab (рис. 7.14), касательные напряжения τ направлены так, что все они пересекаются в точке O , и дополнительно предположить, что вертикальные проекции этих напряжений равномерно распределены вдоль линии ab , то формулу *Журавского* можно использовать для вычисления вертикальных проекций τ_{zy} . Вычисление всех остальных величин, входящих в формулу (7.8), производится так же, как и, например, для прямоугольного поперечного сечения.

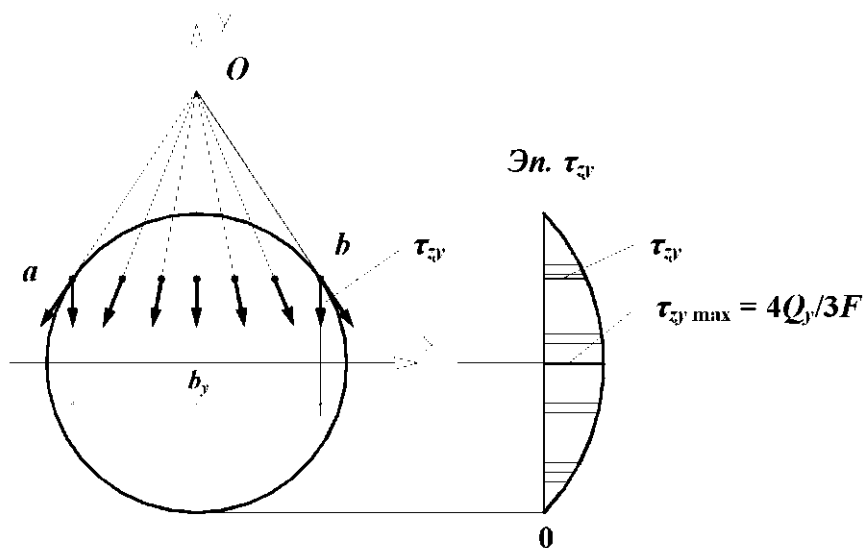


Рис. 7.14. Эпюра касательных напряжений для балки круглого поперечного сечения

В частности, наибольшие касательные напряжения, возникающие в точках, расположенных на нейтральной оси x , вычисляются по формуле

$$\tau_{zy \max} = \frac{Q_y \frac{d^3}{12}}{\frac{\pi d^4}{64} d} = \frac{4 Q_y}{3 F}.$$

7.32. Согласно гипотезе *Бернулли* считается, что при изгибе балки ее продольные волокна не оказывают давления друг на друга. Такое предположение для чистого изгиба вполне естественно. Но насколько это допущение справедливо при поперечном изгибе балки?

Рассмотрим, например, жестко защемленную балку прямоугольного поперечного сечения, нагруженную сверху равномерно распределенной поперечной нагрузкой q . Тогда в точках, принадлежащих верхним волокнам балки, возникнут нормальные напряжения:

$$\sigma_{y \max} = qdz/bdz = q/b.$$

В нижних же волокнах, ввиду отсутствия поверхностной нагрузки, $\sigma_y = 0$. При существующих на практике значениях внешней нагрузки напряжение $\sigma_{y \max} = q/b$ настолько мало по сравнению с наибольшим нормальным напряжением σ_z , возникающем в поперечном сечении балки, что им можно пренебречь. Покажем это.

Для рассматриваемой балки наибольший изгибающий момент возникает в заделке. Он равен $M_x = ql(l/2) = ql^2/2$. В этом случае

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{\frac{ql^2}{2}}{\frac{bh^2}{6}} = 3 \frac{ql^2}{bh^2}.$$

Тогда $\sigma_{z \max} / \sigma_{y \max} = 3(l/h)^2$. Для реальных балок отношение $l/h > 10$, поэтому окончательно получим:

$$\sigma_{z \max} / \sigma_{y \max} > 300.$$

7.33. Как проверяется *прочность* балки при изгибе и как подбираются размеры ее поперечного сечения?

Проверка прочности балки осуществляется, как правило, только по наибольшим *нормальным* напряжениям. Эти напряжения, как мы уже знаем, возникают в крайних волокнах того поперечного сечения балки, в котором «действует» наибольший по *абсолютному* значению изгибающий момент $|M_{x \max}|$. Его значение мы определяем по эпюре изгибающих моментов.

При поперечном изгибе в балке наряду с нормальными напряжениями возникают и касательные напряжения, но они в подавляющем числе случаев невелики и при расчете на прочность учитываются, в основном, только для балок двутаврового профиля, о чем мы будем говорить особо.

Условие прочности балки при изгибе по нормальным напряжениям имеет вид:

$$\sigma_{x \max} = |M_{x \max}| / W_x \leq [\sigma], \quad (7.10)$$

где допускаемое напряжение $[\sigma]$ принимается таким же, как и при растяжении (сжатии) стержня из такого же материала.

Помимо проверки прочности, по формуле (7.10) может быть произведен и подбор размеров поперечного сечения балки. При заданном допускаемом напряжении $[\sigma]$ и известном максимальном абсолютном значении изгибающего момента $|M_{x \max}|$ требуемый момент сопротивления балки при изгибе определяется из следующего неравенства:

$$W_x^{\text{треб}} \geq |M_{x \max}| / [\sigma].$$

Необходимо иметь в виду следующее очень важное обстоятельство. При изменении положения поперечного сечения балки по отношению к действующей нагрузке ее прочность может существенно измениться, хотя площадь поперечного сечения F и останется прежней.

Пусть, например, балка прямоугольного поперечного сечения с отношением сторон $h/b = 3$ расположена по отношению к силовой плоскости таким образом, что ее высота h перпендикулярна к нейтральной оси x . В этом случае отношение моментов сопротивления балки при изгибе равно:

$$W_x / W_y = (bh^2/6) / (hb^2/6) = h/b = 3.$$

То есть такая балка в три раза прочнее той же самой балки, но повернутой на 90° .

Напомним, что в выражении для момента сопротивления балки прямоугольного поперечного сечения при изгибе **в квадрате** стоит тот ее размер, который перпендикулярен нейтральной оси.

Следовательно, сечение балки необходимо располагать таким образом, чтобы силовая плоскость совпадала с той из главных центральных осей, относительно которой момент инерции *минимален*. Или, что то же самое, необходимо добиваться того, чтобы нейтральной осью являлась ось, относительно которой главный момент инерции поперечного сечения *максимален*. В этом случае говорят, что балка испытывает изгиб в плоскости *наибольшей жесткости*.

Сказанное выше еще раз подчеркивает важность темы «Определение положения главных центральных осей инерции поперечного сечения стержня», к которой студенты относятся, как правило, поверхностно.

Определив из условия прочности (7.10) требуемый момент сопротивления при изгибе $W_x^{треб}$, мы можем перейти к определению размеров и формы поперечного сечения балки. При этом нам необходимо стремиться к тому, чтобы вес балки оказался минимальным.

При заданной длине балки ее вес пропорционален площади поперечного сечения F .

Покажем, например, что квадратное поперечное сечение является более экономным, чем круглое.

В случае квадратного поперечного сечения, как мы знаем, момент сопротивления при изгибе определяется по формуле

$$W_x = a^3/6 = Fa/6.$$

Для круглого поперечного сечения он равен:

$$W_x = \pi d^3/32 = 0,125Fd.$$

Если предположить, что площади поперечных сечений квадрата и круга равны между собой, то сторона квадрата a может быть выражена через диаметр круга d :

$$a = d\sqrt{\pi}/2.$$

Тогда момент сопротивления балки квадратного поперечного сечения будет равен:

$$W_x = Fa/6 \approx 0,147Fd.$$

Сравнивая полученное значение момента сопротивления с моментом сопротивления балки круглого поперечного сечения $W_x = 0,125Fd$, приходим к выводу, что квадратное поперечное сечение при той же площади имеет больший момент сопротивления, чем круглое (почти на 18 %). Следовательно, квадратное поперечное сечение является более экономичным по сравнению с круглым.

Анализируя распределение нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки (см. формулу (7.5)), легко прийти к заключению, что та часть материала, которая расположена вблизи нейтральной оси, почти не «работает» (это, в частности, и указывает на нерациональность круглого поперечного сечения по сравнению с квадратом). Для получения наибольшей экономии материала его нужно поместить как можно дальше от нейтральной оси. Наиболее благоприятный случай при заданной площади поперечного сечения F и высоте h получится при расположении каждой половины площади на расстоянии $h/2$ от нейтральной оси. Тогда момент инерции и момент сопротивления будут соответственно равны:

$$I_x = 2(F/2)(h/2)^2 = Fh^2/4; \quad W_x = Fh/2.$$

Это тот предел, к которому можно приблизиться, применяя двутавровое поперечное сечение с наибольшим количеством материала в полках.

Однако, вследствие необходимости выделить часть материала для стенки балки, полученное предельное значение для момента сопротивления недостижимо. Так, для прокатных балок двутаврового профиля:

$$W_x \approx Fh/3.$$

Для таких балок проверка прочности производится следующим образом:

- в точках наиболее удаленных от нейтральной оси прочность двутавровой балки проверяется по формуле (7.10);

- в точках, где полка соединяется со стенкой, то есть в тех точках, где велики и нормальные, и касательные напряжения, – по *главным* напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \sigma_z/2 + \sqrt{\sigma_z^2/4 + \tau_{zy}^2} \leq [\sigma],$$

или же применяется одна из формул *гипотез прочности* (см. далее беседу 8);

- в точках, расположенных на нейтральной оси, – по наибольшим касательным напряжениям:

$$\tau_{zy \max} = Q_{y \max} S_x^{omc} / I_x b_y \leq [\tau].$$

7.34. Чему равна потенциальная энергия деформации при изгибе?

Потенциальная энергия деформации балки при поперечном изгибе определяется по следующей формуле (подробнее см. беседу 15)

$$V = \frac{k}{2} \int_0^l \frac{Q_y^2}{GF} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{EI_x} dz, \quad (7.11)$$

где первый интеграл представляет собой потенциальную энергию *сдвига*, а второй – энергию *чистого изгиба*.

Значение безразмерного коэффициента k , входящего в первое слагаемое выражения (7.11), зависит от *формы* поперечного сечения балки и вычисляется по формуле

$$k = \frac{F^2}{I_x^2} \int_V \left(\frac{S_x^{omc}}{b} \right)^2 dV.$$

Например, для прямоугольного поперечного сечения $k = 1,2$.

Для большинства типов балок первое слагаемое в формуле (7.11) значительно меньше второго слагаемого. Поэтому при определении потенциальной энергии деформации при изгибе влиянием сдвига (первым слагаемым) часто *пренебрегают*.

7.35. С какой целью определяются *перемещения* балки при изгибе?

Для того чтобы судить о работе балок, недостаточно иметь информацию только о напряжениях, которые возникают в ней при деформирова-

нии. Весьма *прочные* балки могут оказаться непригодными к эксплуатации из-за недостаточной их *жесткости*. Если балка сильно прогибается под нагрузкой, то в ней могут возникнуть изгибные колебания с большими амплитудами, приводящие к дополнительным напряжениям.

Для проверки *жесткости* балки необходимо уметь определять перемещения отдельных точек ее оси.

В результате изгиба ось балки становится *криволинейной*. Изогнутую ось балки принято называть *упругой линией балки*. Кривизна упругой линии балки может быть определена из формулы (7.4):

$$k = 1/\rho = M_x/EI_x.$$

Напомним, что *вертикальное перемещение* произвольной точки, лежащей на оси балки, при изгибе (*прогиб* балки) обозначается буквой v , *продольное перемещение* – буквой u , а угол поворота поперечного сечения балки – буквой θ .

Проверка жесткости балки сводится к требованию, согласно которому ее наибольший прогиб v_{\max} , называемый *стрелой прогиба*, не должен превышать определенной доли от пролета балки l :

$$v_{\max} \leq l/m.$$

Здесь число m устанавливается нормами проектирования и колеблется обычно в пределах от 300 до 1000. Для ответственных сооружений, например, для мостов, $m = 1000$. Отсюда видно, что прогибы балки при изгибе *малы* по сравнению с ее пролетом. Это позволяет нам в дальнейшем изложении ввести следующие упрощения:

- во-первых, при *малых* прогибах v угол наклона касательной к изогнутой оси балки θ , следовательно, угол поворота поперечного сечения балки можно определять с помощью выражения

$$\theta = \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = dv/dz = v';$$

- во-вторых, горизонтальным перемещением u можно пренебречь, так как оно по сравнению с прогибом v и углом поворота поперечного сечения θ является величиной более высокого порядка малости.

В результате мы можем считать, что *угол поворота поперечного сечения равен первой производной от прогиба балки и что каждая точка оси балки перемещается только по вертикали*.

Следовательно, для определения полной картины деформации *нам необходимо получить уравнение упругой линии балки* $v = v(z)$. Если эта функция известна, то, определив прогибы балки в ряде точек, можно построить кривую прогибов и найти наибольший прогиб, который и позволит нам судить о жесткости балки.

В заключение отметим, что в ряде задач, главным образом статически неопределимых, возникает необходимость и в определении *угла поворота* поперечного сечения балки.

7.36. Как записывается дифференциальное уравнение изгиба балки?

Для определения уравнения изогнутой оси балки можно воспользоваться законом Гука (7.4):

$$k = 1/\rho = M_x / EI_x.$$

Из курса высшей математики нам известно следующее выражение для кривизны некоторой кривой:

$$k = 1/\rho = v'' / [1 + (v')^2]^{3/2}.$$

В пределах упругих деформаций квадрат угла поворота поперечного сечения балки ничтожно мал по сравнению с единицей. Поэтому $k \approx v''$, то есть вторая производная от прогиба представляет собой кривизну изогнутой оси балки в рассматриваемом месте. Тогда

$$v'' = M_x / EI_x.$$

Это дифференциальное уравнение описывает изгиб балки в рамках гипотезы Бернулли. Продифференцировав его дважды по z , с учетом третьей формулы (7.1), получим:

$$(EI_x v'')'' = -q.$$

Для балки постоянной жесткости ($EI_x = const$) будем иметь

$$EI_x v^{IV} = -q. \quad (7.12)$$

Дифференциальное уравнение четвертого порядка (7.12) называется дифференциальным уравнением изгиба балки.

Интегрируя уравнение (7.12) первый раз, получим выражение, дающее закон изменения перерезывающей силы по длине балки. Второе интегрирование определяет характер изменения изгибающего момента, третье интегрирование – углов поворота поперечных сечений, наконец, четвертое – прогибов балки по ее длине. При этом четыре постоянные интегрирования определяются из условий опирания балки.

7.37. Как на практике осуществляется вычисление прогибов и углов поворота поперечных сечений балки?

Они могут быть определены, например, с помощью так называемого универсального уравнения упругой линии балки. Мы приведем это уравнение без вывода. Прогиб балки в сечении с координатой z и угол поворота этого же сечения (рис. 7.15) определяются по следующим формулам:

$$v(z) = v(0) + \theta(0)z + \frac{M(z-a)^2}{2EI_x} + \frac{P(z-b)^3}{6EI_x} + \frac{q(z-c)^4}{24EI_x} - \frac{q(z-d)^4}{24EI_x}; \quad (7.13)$$
$$\theta(z) = \frac{dv(z)}{dz} = \theta(0) + \frac{M(z-a)}{EI_x} + \frac{P(z-b)^2}{2EI_x} + \frac{q(z-c)^3}{6EI_x} - \frac{q(z-d)^3}{6EI_x}.$$

Здесь a и b – абсциссы точек приложения сосредоточенного момента M и сосредоточенной силы P соответственно; c и d – координаты начала и конца участка, нагруженного распределенной нагрузкой.

Заметим, что в формулы (7.13) входят только те внешние усилия (активные и реактивные), которые расположены *левее* сечения, в котором определяются перемещения балки.

Если какая-нибудь нагрузка (нагрузки) имеют направление, противоположное тому, что указано на рис. 7.15, то у соответствующего слагаемого (слагаемых) в формулах (7.13) следует поменять знак на противоположный. В случае многократного повторения однотипных нагрузок необходимо использовать суммирование соответствующих слагаемых.

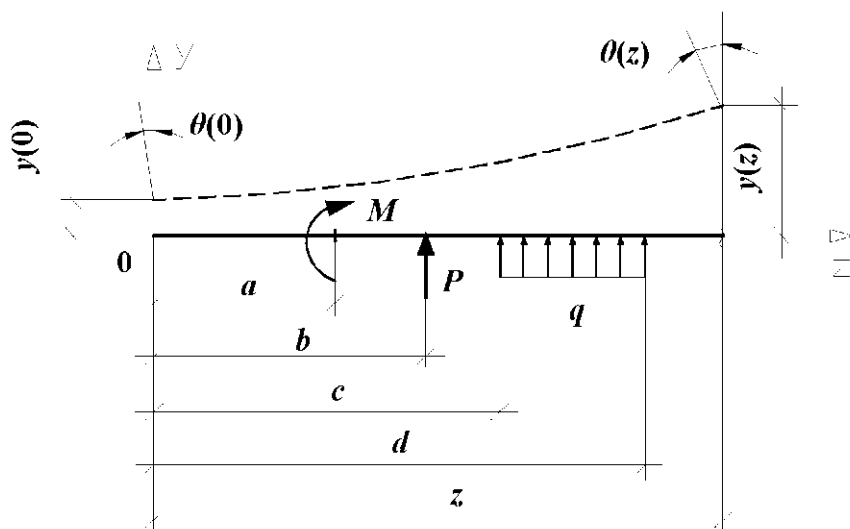


Рис. 7.15. Прогиб и угол поворота поперечного сечения балки

Прогиб $v(0)$ и угол поворота $\theta(0)$ балки в начале координат (*начальные параметры*) определяются из условий закрепления балки.

Продemonстрируем использование формул (7.13) на примере балки (см. рис. 7.4). Определим, например, прогиб балки на консоли при $z = 6$ м, то есть $v(6)$. Запишем универсальное уравнение упругой линии балки:

$$v(6) = v(0) + \theta(0) \cdot 6 + \frac{M(6-0)^2}{2EI_x} - \frac{R_A(6-0)^3}{6EI_x} - \frac{P(6-3)^3}{6EI_x} + \frac{R_B(6-4)^3}{6EI_x} - \frac{q(6-4)^4}{24EI_x} + \frac{q(6-6)^4}{24EI_x}.$$

Очевидно, что прогиб балки в начале координат (на левой шарнирной опоре) равен нулю. То есть $v(0) = 0$.

Для определения угла поворота в начале координат $\theta(0)$ необходимо составить дополнительное условие: *прогиб на правой опоре равен нулю*.

Таким образом, будем иметь:

$$v(4) = \theta(0) \cdot 4 + \frac{M(4-0)^2}{2EI_x} - \frac{R_A(4-0)^3}{6EI_x} - \frac{P(4-3)^3}{6EI_x} = 0,$$

отсюда

$$\theta(0) = -\frac{2M}{EI_x} + \frac{8R_A}{3EI_x} + \frac{P}{24EI_x} = -\frac{2 \cdot 40}{EI_x} + \frac{8 \cdot 15}{3EI_x} + \frac{20}{24EI_x} = -\frac{235}{6EI_x}.$$

Тогда окончательно прогиб консоли равен:

$$\begin{aligned} v(6) &= \theta(0) \cdot 6 + \frac{18M}{EI_x} - \frac{36R_A}{EI_x} - \frac{9P}{2EI_x} + \frac{4R_B}{3EI_x} - \frac{2q}{3EI_x} = \\ &= -\frac{235}{6EI_x} \cdot 6 + \frac{18 \cdot 40}{EI_x} - \frac{36 \cdot 15}{EI_x} - \frac{9 \cdot 20}{2EI_x} + \frac{4 \cdot 75}{3EI_x} - \frac{2 \cdot 20}{3EI_x} \approx -\frac{58,3}{EI_x}. \end{aligned}$$

Знак «минус» говорит нам о том, что прогиб балки на консоли происходит *вниз*. Отметим также, что число, стоящее в числителе, измеряется в нашем примере в килоньютонах на метр в кубе ($\text{kH} \cdot \text{м}^3$).

Примерный вид *упругой линии балки* показан на рис. 7.16.

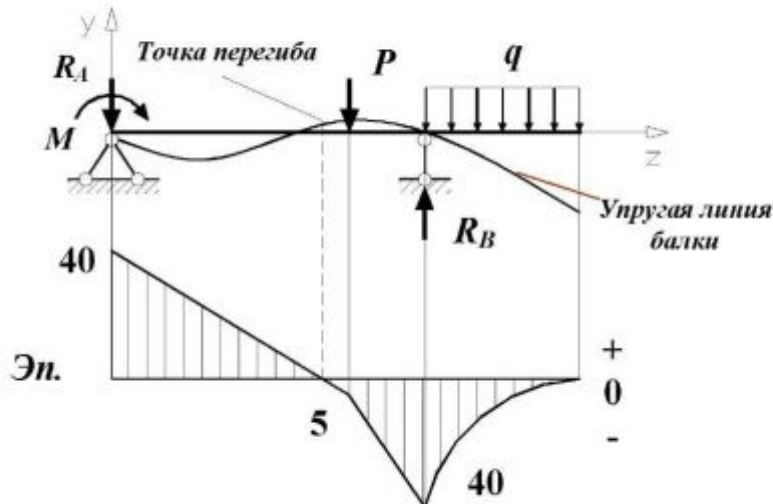


Рис. 7.16. Согласование упругой линии балки с эпюрой изгибающих моментов

Упругая линия балки должна быть *согласована* с эпюрой изгибающих моментов. Напомним, что положительный изгибающий момент «изгибает» балку выпуклостью вниз (сжатые волокна сверху), а отрицательный – выпуклостью вверх (сжатые волокна снизу). Точка перегиба, то есть та точка, в которой кривизна балки равна нулю, находится под тем сечением балки, в котором изгибающий момент равен нулю, что следует из закона Гука.

7.38. Как производится расчет простейших статически неопределимых балок?

Он может быть произведен, например, с использованием универсального уравнения упругой линии балки (другой из возможных способов

приводится в беседе 15). Рассмотрим, например, один раз статически неопределимую балку (рис. 7.17).

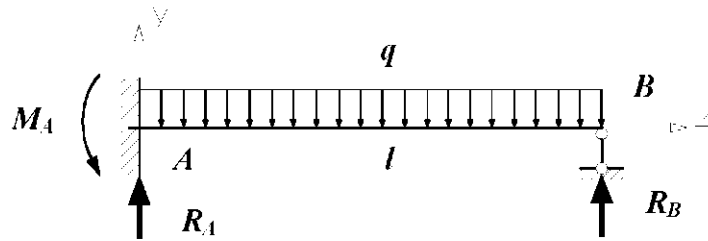


Рис. 7.17. Статически неопределимая балка

Для определения *трех* реактивных усилий R_A , R_B , M_A мы имеем пока только *два* уравнения статики:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad +M_A - ql^2/2 + R_B l = 0; \\ \sum Y = 0; \quad R_A - ql + R_B = 0. \end{aligned}$$

Третье дополнительное уравнение, необходимое для раскрытия статической неопределимости, можно получить, записав условия равенства нулю прогиба на шарнирной опоре: $v(l) = 0$.

При $z = 0$, то есть в заделке, прогиб $v(0) = 0$ и угол поворота сечения $\theta(0) = 0$. Поэтому условие отсутствия прогиба в точке B может быть представлено в виде:

$$v(l) = -\frac{M_A(l-0)^2}{2EI_x} + \frac{R_A(l-0)^3}{6EI_x} - \frac{q(l-0)^4}{24EI_x} + \frac{q(l-l)^4}{24EI_x} = 0$$

или

$$-12M_A + 4R_A l - ql^2 = 0.$$

Теперь мы имеем систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} M_A - ql^2/2 + R_B l = 0; \\ R_A - ql + R_B = 0; \\ -12M_A + 4R_A l - ql^2 = 0. \end{aligned}$$

Решая ее, находим:

$$R_A = 5ql/8; \quad R_B = 3ql/8; \quad M_A = ql^2/8,$$

Таким образом, статическая неопределимость балки нами раскрыта.

8. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

Прежде всего, отметим, что в настоящей беседе речь будет идти об оценке прочности не всего тела, а о *прочности материала в отдельно взятой его точке*. Напомним, что в случае линейного *НС* оценка прочности в исследуемой точке тела довольно легко производится путем непосредственного сопоставления возникающего в ней *расчетного* напряжения либо с *предельным* $\sigma_{пред}$, либо с *допускаемым напряжением* $[\sigma]$.

Коэффициент запаса прочности равен отношению предельного напряжения к расчетному: $n = \sigma_{пред} / \sigma$.

Состояние материала, при котором *хотя бы в одной точке тела* отмечено возникновение **текучести** или признаков **хрупкого разрушения**, рассматривается как **предельное**, то есть соответствующее началу нарушения прочности всего тела. Соответствующее этому состоянию напряжение называется **предельным**.

Для пластичных материалов за предельное напряжение принимается предел текучести σ_m , а для хрупких – предел прочности σ_{nc} .

Расчет на прочность, основанный на таком представлении о предельном состоянии тела, называется *расчетом по опасной точке* или *расчетом по допускаемым напряжениям*.

В современной практике, однако, применяют и другие методы расчета, например, по предельным нагрузкам или несущей способности, по расчетным предельным состояниям и т. д. Эти методы основаны на иных представлениях о предельных состояниях тела. В настоящем пособии эти методы не рассматриваются.

Напомним также, что мы будем отдавать предпочтение терминам «*предельное состояние*» и «*предельное напряжение*», вместо терминов «*опасное состояние*» и «*опасное напряжение*», которые используются в некоторых учебниках по сопротивлению материалов.

8.1. Как подойти к оценке прочности материала в общем случае нагружения, то есть при объемном НС?

Разнообразие НС безгранично и создать каждое из них в лабораторных условиях для определения *предельного состояния* для всех материалов невозможно как по техническим, так и по экономическим причинам.

Поэтому желательно иметь *практическую* возможность оценки прочности определенного материала, находящегося в условиях *любого* сложного НС, располагая при этом только *ограниченными* опытными данными о его свойствах, например, *только значениями предельных напряжений при одноосном растяжении и сжатии*.

Это становится возможным при применении так называемых *гипотез прочности* (или *теорий предельных НС*).

Будем называть два НС *эквивалентными*, если они одновременно переходят в *предельные* при увеличении соответствующих им главных напряжений в одно и то же число раз. Это означает, что *коэффициенты запаса прочности* для эквивалентных НС одинаковы.

Остается решить вопрос, что же является **критерием эквивалентности различных по характеру НС**. Если решение этого вопроса каким-то образом найдено (его как раз и дают *гипотезы прочности*), тогда для расчета стержня на прочность в случае сложного НС его следует заме-

нить на *эквивалентное одноосное растяжение (сжатие)* и сравнить соответствующее ему *эквивалентное напряжение* $\sigma_{\text{экв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ с предельным (или допускаемым) напряжением для данного материала.

Этот подход к оценке прочности при объемном *НС* иллюстрируется условной схемой, показанной на рис. 8.1.

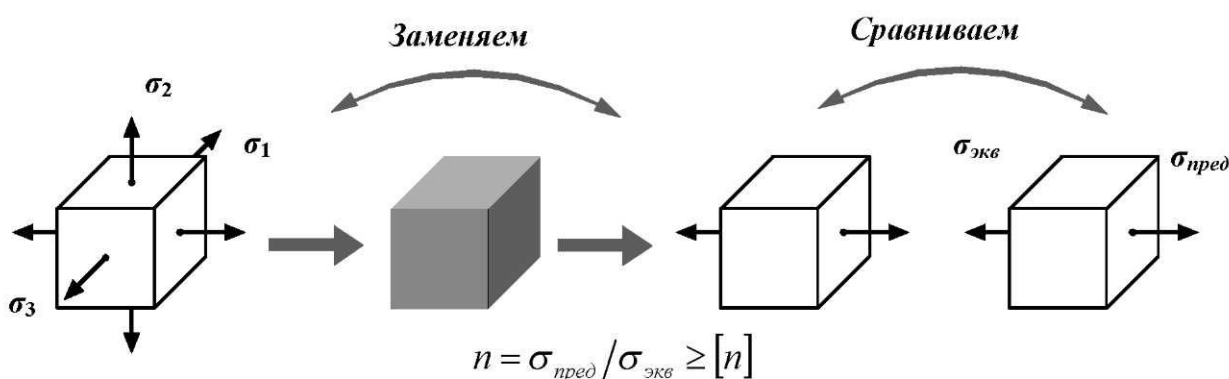


Рис. 8.1. Оценка прочности при объемном напряженном состоянии

8.2. Какой смысл вкладывается в понятие «эквивалентное напряжение»?

Из приведенных рассуждений следует, что *эквивалентное напряжение* – это лишь некоторая воображаемая *условная* расчетная величина, а не какое-то реально возникающее напряжение. Значение эквивалентного напряжения зависит не только от заданного типа *НС* (то есть от значений, соответствующих ему главных напряжений), но и от принятого для расчета прочности *критерия эквивалентности НС*. Поэтому, в частности, нельзя говорить, что эквивалентное напряжение *возникает* в некоторой точке. Следует говорить об определении (или вычислении) эквивалентного напряжения для исследуемой точки.

8.3. Что называется гипотезами прочности?

Гипотезы, указывающие критерии эквивалентности различных НС, называют гипотезами прочности.

Приведем и другие, используемые в учебниках по сопротивлению материалов, названия: теории предельных напряженных состояний, теории прочности и т. д.

Как следует из изложенного, применение гипотез прочности избавляет нас от необходимости проведения огромного количества экспериментов. Тот или иной критерий эквивалентности может быть основой для практических расчетов на прочность лишь при условии, что для ряда частных случаев он проверен опытным путем и результаты эксперимента оказались достаточно близкими к результатам теоретического расчета.

Определение истинной причины разрушения материала является труднейшей задачей. Это обстоятельство не позволило до настоящего вре-

мени создать *единую* общую гипотезу прочности и повлекло за собой появление *многих* теорий, каждая из которых основывается на своей гипотезе о причине разрушения материала.

Независимо от принятой гипотезы прочности условие прочности после определения эквивалентного напряжения представляется в виде одного из следующих неравенств:

$$n = \sigma_{пред} / \sigma_{экв} \geq [n]$$

или, при заданном коэффициенте запаса,

$$\sigma_{экв} \leq [\sigma].$$

8.4. Как формулируется *первая* гипотеза прочности? И какие опытные данные подтверждают ее справедливость?

Первая гипотеза прочности основывается на предположении о том, что причиной разрушения материала являются наибольшие по абсолютному значению нормальные напряжения.

Эту, самую простую и старую, гипотезу, предложенную еще Галилеем, называют *гипотезой наибольших нормальных напряжений*.

Условие прочности по первой гипотезе прочности имеет вид:

$$\sigma_{экв}^{(1)} = \sigma_1 \leq [\sigma]_p. \quad (8.1)$$

В случае, когда наибольшим по абсолютному значению будет *сжимающее* главное напряжение $|\sigma_3|$, условие (8.1) записывается в виде:

$$\sigma_{экв}^{(1)} = |\sigma_3| \leq [\sigma]_{сжс}.$$

Существенный недостаток *первой* гипотезы виден из приведенных выше двух формул. Заключается он в том, что при определении эквивалентного напряжения совершенно не учитываются *два других* главных напряжения, оказывающих, естественно, большое влияние на прочность материала.

Эта гипотеза подтверждается экспериментальными данными только для хрупкого материала и только при растяжении, когда главные напряжения σ_2, σ_3 значительно меньше, чем σ_1 .

При всестороннем сжатии, например, цементного кубика она приводит к ошибочным результатам, поскольку кубик выдерживает напряжения, во много раз превышающие предел прочности при одноосном сжатии.

В настоящее время эта гипотеза прочности не применяется и имеет лишь *историческое* значение.

8.5. Что является причиной разрушения по *второй* гипотезе прочности?

Отмеченные недостатки первой гипотезы прочности привели к появлению *второй* гипотезы прочности, предложенной Мариоттом и затем развитой Сен-Венаном.

Согласно этой гипотезе, называемой **гипотезой наибольших линейных деформаций**, причиной разрушения являются наибольшие линейные деформации. Условие прочности по этой гипотезе записывается в виде:

$$\sigma_{\text{эке}}^{(2)} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma],$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Отметим следующее. Вторая гипотеза прочности предполагает, что для пластичных материалов закон Гука выполняется вплоть до предела текучести, а для хрупких – до предела прочности, что, конечно, является чересчур грубым допущением.

Достоинством же этой гипотезы является то, что при вычислении эквивалентного напряжения она учитывает *все три* главных напряжения.

С помощью этой гипотезы можно объяснить разрушение *хрупких* материалов *при простом сжатии*. Однако, как и первая гипотеза, вторая гипотеза прочности недостаточно подтверждается опытами и поэтому в настоящее время *не применяется*.

8.6. Как формулируется *третья* гипотеза прочности?

Согласно этой гипотезе, которую называют также **гипотезой наибольших касательных напряжений**, причиной разрушения материала являются наибольшие касательные напряжения.

Линии Людерса, разрушение по наклонной плоскости образца из хрупкого материала, образование воронки при разрыве – все это указывает на большую роль, которую играют касательные напряжения.

Согласно *третьей* гипотезе, максимальное касательное напряжение для заданного объемного *НС* и эквивалентного ему линейного *НС* одинаковы, то есть

$$\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{эке}}.$$

Напомним, что в случае объемного *НС* наибольшее касательное напряжение определяется по формуле

$$\tau_{\text{max}} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2. \quad (8.2)$$

Эквивалентное напряжение при одноосном растяжении равно:

$$\tau_{\text{эке}} = \sigma_{\text{эке}}/2. \quad (8.3)$$

С учетом формул (8.2) и (8.3), условие прочности по *третьей* гипотезе прочности принимает вид:

$$\sigma_{\text{эке}}^{(3)} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Недостатком этой гипотезы является то, что она не учитывает второго главного напряжения σ_2 .

Опыты показывают, что для *пластичных* материалов гипотеза *наибольших касательных напряжений* дает удовлетворительные результаты. Ошибка от пренебрежения влиянием σ_2 не превышает обычно 10 – 15 %.

Третья гипотеза прочности впервые была высказана Кулоном. Критерий наибольших касательных напряжений был предложен им в 1773 г. Условие наступления пластического состояния впервые выдвинул в 1868 г. французский инженер Анри Эдуард Треска (Treska, 1814 – 1885 гг.). Затем это условие было математически сформулировано Сен-Венаном.

8.7. В чем заключается смысл энергетической (четвертой) гипотезы прочности?

Энергетическая гипотеза прочности строится на предположении о том, что количество удельной потенциальной энергии изменения формы, накопленной к моменту наступления предельного состояния материала, одинаково как при сложном НС, так и при простом одноосном растяжении.

Необходимо обратить внимание Читателя на то, что в этой гипотезе речь идет не обо всей удельной потенциальной энергии деформации, а лишь о той ее части, которая накапливается за счет изменения формы кубика с ребром, равным единице. В общем случае полная удельная потенциальная энергия деформации может быть представлена как сумма энергий, связанных с изменением объема кубика и изменением его формы.

Условие прочности по четвертой гипотезе прочности приведем без вывода:

$$\sigma_{\text{экв}}^{(4)} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Очевидным достоинством этой теории является то, что эквивалентное напряжение определяется значениями всех трех главных напряжений.

Энергетическая гипотеза прочности хорошо согласуется с опытными данными для пластичных материалов. Для них она приводит к несколько лучшим результатам, чем гипотеза наибольших касательных напряжений.

Идею энергетического критерия прочности материала впервые предложил в 1856 г. английский ученый Джеймс Клерк Максвелл (Maxwell, 1831 – 1879 гг.). В 1885 г. ее развил итальянский ученый Эудженио Бельтрами (Beltrami, 1835 – 1900 гг.). В 1904 г. польский ученый Максимилиан Тытус Губер (Huber, 1872 – 1950 гг.) и в 1911 г. немецкий ученый Рихард Мизес (Mises, 1883 – 1953 гг.) завершили разработку этой теории прочности.

8.8. Как формулируется гипотеза прочности Мора?

Согласно этой гипотезе, которую в 1900 г. предложил немецкий ученый Отто Христиан Мор (Mohr, 1835 – 1918 гг.), два напряженных состояния равноопасны, если для соответствующих главных напряжений σ'_1, σ'_3 и σ''_1, σ''_3 соблюдается соотношение:

$$\sigma'_1 - \nu\sigma'_3 = \sigma''_1 - \nu\sigma''_3. \quad (8.4)$$

Тогда условие прочности по гипотезе прочности *Мора* имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}}^{(M)} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (8.5)$$

Из формулы (8.5) видно, что данная гипотеза прочности не учитывает влияния второго главного напряжения σ_2 .

В (8.4) и (8.5) коэффициент ν представляет собой отношение предельных напряжений, соответствующих одноосным растяжению и сжатию, то есть этот коэффициент равен:

- для хрупких материалов

$$\nu = \sigma_{\text{тн}(p)} / \sigma_{\text{тн}(c)} = [\sigma]_p / [\sigma]_c;$$

- для пластичных

$$\nu = 1.$$

Гипотеза прочности *Мора* может быть рекомендована для *хрупких* материалов. Для *пластичных* материалов она тождественна *третьей* гипотезе прочности.

9. КОСОЙ ИЗГИБ

9.1. Какой изгиб называется *косым*?

Если мы прикладываем к балке *вертикальную* нагрузку, а она при этом прогибается почему-то не только в вертикальной плоскости, но и вбок, то такой изгиб называется *косым*. Или, иными словами, *косым* называется *изгиб*, при котором *изогнутая ось стержня не лежит в силовой плоскости (плоскости, в которой расположены все внешние нагрузки)*.

9.2. При каком нагружении балки происходит *косой изгиб*?

Косой изгиб возникнет в том случае, если *силовая плоскость* не будет совпадать ни с одной из *главных* плоскостей балки. Напомним, что главными являются плоскости, проходящие через ось балки z и главные центральные оси инерции ее поперечного сечения x и y .

Впервые задача о *косом изгибе* балки была решена в 1843 г. *Сен-Венаном*.

9.3. Как вычисляются наибольшие нормальные напряжения при *косом изгибе*?

Покажем это на конкретном примере. Рассмотрим консольную балку прямоугольного поперечного сечения длиной l , нагруженную вертикальной силой P (рис. 9.1). Пусть балка расположена по отношению к нагрузке таким образом, что ее главная центральная ось y (ось симметрии) составляет некоторый малый угол α с направлением действия нагрузки. Пусть такой *перекос* обусловлен, например, технологическим браком при сборке конструкции.

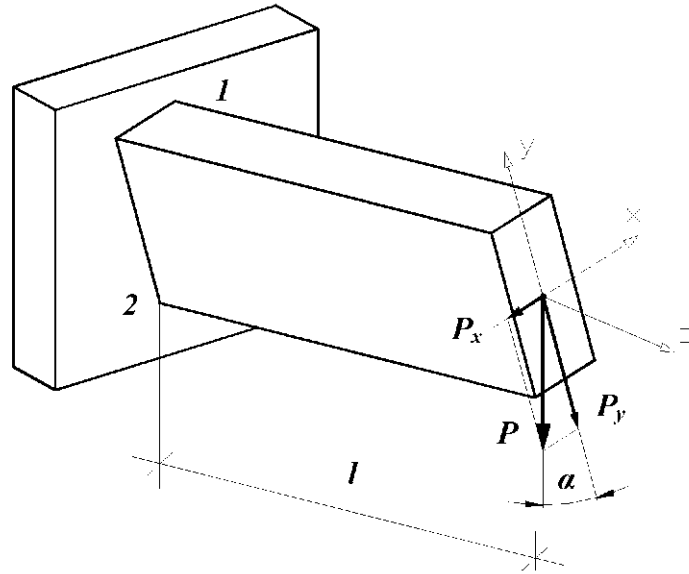


Рис. 9.1. Косой изгиб

Разложим силу P на две составляющие:

$$P_y = P \cos \alpha, \quad P_x = P \sin \alpha.$$

Воспользуемся принципом независимости действия сил и рассмотрим действие каждой из этих составляющих в отдельности.

Нагрузки P_y и P_x вызывают в поперечном сечении, расположенном на некотором расстоянии z от правого конца балки, изгибающие моменты, абсолютные значения которых определяются по формулам:

$$M_x(z) = P_y z = Pz \cos \alpha; \quad M_y(z) = P_x z = Pz \sin \alpha.$$

Оба изгибающих момента будут наибольшими в заделке:

$$M_{x_{\max}} = P_y L; \quad M_{y_{\max}} = P_x L.$$

Суммарные нормальные напряжения при косом изгибе в произвольном поперечном сечении балки для некоторой точки с координатами x и y вычисляются по следующей формуле

$$\sigma_z = M_x y / I_x + M_y x / I_y, \quad (9.1)$$

где $I_x = bh^3/12$, $I_y = b^3h/12$ – главные моменты инерции; h – высота, а b – ширина поперечного сечения балки.

Значения изгибающих моментов и координат исследуемой точки подставляются в формулу (9.1) по их абсолютному значению, а знак каждого из слагаемых определяется в целом, согласно физическому смыслу.

Наибольшие нормальные напряжения возникнут в поперечном сечении, расположенном в заделке, в точках 1 и 2, которые наиболее удалены от соответствующих нейтральных осей и имеют следующие абсолютные значения координат: $y = h/2$, $x = b/2$.

При этом, очевидно, что в точке 1 напряжения будут растягивающими:

$$\sigma_z^{(1)} = +M_{x_{\max}} / W_x + M_{y_{\max}} / W_y, \quad (9.2)$$

а в точке 2 – точно такими же по величине, но сжимающими:

$$\sigma_z^{(2)} = -M_{x\max}/W_x - M_{y\max}/W_y. \quad (9.3)$$

В формулах (9.2) и (9.3) $W_x = bh^2/6$, $W_y = b^2h/6$ – моменты сопротивления балки при изгибе относительно главных центральных осей инерции.

9.4. Как определяется положение нулевой (или нейтральной) линии при косом изгибе?

Напомним, что нулевой линией (НЛ) называется геометрическое место точек поперечного сечения стержня, в которых нормальные напряжения равны нулю. Из этого определения легко и определяется положение НЛ. Приравняв правую часть выражения (9.1) к нулю, получим:

$$M_x y/I_x + M_y x/I_y = 0,$$

отсюда

$$y/x = -M_y I_x / M_x I_y = -I_x \sin \alpha / I_y \cos \alpha. \quad (9.4)$$

Обозначим через β угол наклона НЛ к оси x . Тогда $\operatorname{tg} \beta = y/x$, и уравнение НЛ (9.4) принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha \frac{I_x}{I_y}. \quad (9.5)$$

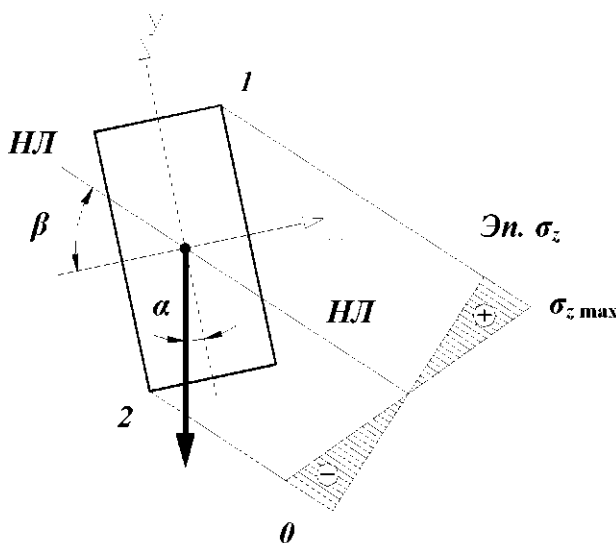


Рис. 9.2. Нулевая линия и эпюра напряжений при косом изгибе

Из уравнения (9.5) видно, что в общем случае (когда $I_x \neq I_y$) НЛ при косом изгибе не проходит перпендикулярно к силовой линии (рис. 9.2), поскольку $|\beta| \neq |\alpha|$. Лишь в частном случае, когда значения главных центральных моментов инерции равны между собой ($I_x = I_y$), угол между НЛ и силовой линией будет прямым ($|\beta| = |\alpha|$), и это означает, что изгиб будет прямым.

Заметим, что для балок с поперечным сечением типа квадрат, круг и т. п., у которых все центральные оси являются главными, косой изгиб невозможен.

9.5. Как строится эпюра нормальных напряжений при косом изгибе?

Зная положение НЛ, легко построить эпюру σ_z . Для этого, например, справа от сечения (см. рис. 9.2) проведем перпендикуляр к НЛ. По нормали к нему и будем откладывать значения напряжений. Как уже отме-

чалось выше, они будут изменяться по линейному закону, при этом наибольшие растягивающие напряжения возникают в точке 1, а наибольшие сжимающие – в точке 2.

9.6. Чем опасен кривой изгиб?

Выполним некоторые вычисления для рассмотренного нами случая. Пусть, например, $\alpha = 10^\circ$ (см. рис. 9.2), то есть перекося является относительно малым.

При отсутствии перекося, то есть при *прямом* изгибе, наибольшие нормальные напряжения в балке, например в точке 1, были бы равны:

$$\sigma_{z_{np}}^{(1)} = M_{x_{max}} / W_x = 6Pl / bh^2.$$

При кривом изгибе в этой же точке они определяются по формуле

$$\sigma_{z_{koc}}^{(1)} = M_{x_{max}} / W_x + M_{y_{max}} / W_y = 6Pl \cos 10^\circ / bh^2 + 6Pl \sin 10^\circ / hb^2.$$

Определим, во сколько раз наибольшие напряжения при наличии технологического брака больше, чем при его отсутствии. Составим отношение найденных выражений для напряжений:

$$k = \sigma_{z_{koc}}^{(1)} / \sigma_{z_{np}}^{(1)} = \cos 10^\circ + h \sin 10^\circ / b.$$

Например, при отношении $h/b = 4$ получим

$$k = \sigma_{z_{koc}}^{(1)} / \sigma_{z_{np}}^{(1)} = \cos 10^\circ + h \sin 10^\circ / b = 0,985 + 4 \times 0,174 = 1,68,$$

то есть напряжения в балке возрастают почти на 70 %.

Таким образом, даже небольшой технологический перекося может привести к существенному *увеличению* нормальных напряжений в балке.

9.7. В какой точке поперечного сечения балки возникает наибольшее касательное напряжение?

В рассматриваемом нами примере нагрузки P_y и P_x вызывают во всех поперечных сечениях одинаковые перерезывающие силы, абсолютные значения которых соответственно равны:

$$Q_y = P_y = P \cos \alpha; \quad Q_x = P_x = P \sin \alpha.$$

Наибольшие касательные напряжения от Q_y возникают в точках, лежащих на оси x , а от Q_x – в точках, лежащих на оси y . Эти напряжения определяются по формулам

$$\tau_{zy} = 3Q_y / 2F; \quad \tau_{zx} = 3Q_x / 2F,$$

где $F = bh$ – площадь поперечного сечения балки.

Наибольшее касательное напряжение при кривом изгибе возникает в центре тяжести поперечного сечения. Его можно найти как следующую геометрическую сумму:

$$\tau = \sqrt{\tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2} = \frac{3}{2F} \sqrt{(P \cos \alpha)^2 + (P \sin \alpha)^2} = \frac{3P}{2F}.$$

9.8. Как определяются прогибы при косом изгибе?

Сначала найдем прогиб консоли от каждой из составляющих силы P в отдельности. Обозначим прогиб балки по направлению осей x и y соответственно через u и v (рис. 9.3). Тогда: $u = P_x l^3 / 3EI_y$; $v = P_y l^3 / 3EI_x$.

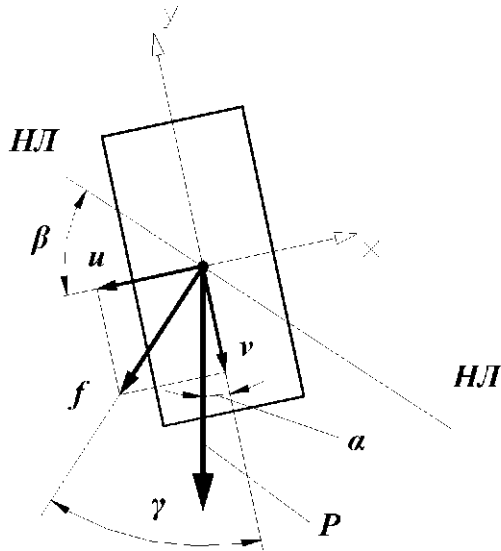


Рис. 9.3. Прогиб балки при косом изгибе

Суммарный прогиб консоли равен:

$$f = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Найдем направление результирующего перемещения f . Для этого определим значение угла наклона γ этого перемещения к вертикальной оси y :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{u}{v} = \frac{P_x I_x}{P_y I_y} = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_x}{I_y}. \quad (9.6)$$

Сопоставляя формулы (9.5) и (9.6), видим, что абсолютные значения углов β и γ равны между собой.

Следовательно, направление суммарного прогиба балки при косом изгибе **перпендикулярно** нулевой линии (см. рис. 9.3).

Отсюда можно сделать важный вывод о том, что *направление суммарного прогиба балки f при косом изгибе (когда $I_x \neq I_y$) не совпадает с направлением действующей силы P , то есть $\gamma \neq \alpha$.*

10. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

Многие элементы машин и сооружений одновременно испытывают деформации изгиба (прямого или косоуго) и растяжения (сжатия).

В этом случае в поперечных сечениях стержня могут возникнуть *пять* внутренних силовых факторов из шести (исключая крутящий момент M_z).

В настоящем беседе мы рассмотрим частный случай такого вида деформации, называемый *внецентренным сжатием* (рис. 10.1), когда в поперечных сечениях стержня возникают только *три* силовых фактора: продольная сила N и два изгибающих момента M_x и M_y .

Будем считать, что стержень обладает большой жесткостью на изгиб. Это допущение мы будем использовать при вычислении изгибающих моментов от продольной силы P , пренебрегая прогибом стержня.

Задача о *внецентренном сжатии* стержня (массивной колонны) впервые была рассмотрена *Юнгом* в 1802 г.

10.1. Чему равны внутренние усилия и напряжения при внецентренном сжатии?

Пусть сжимающая сила P приложена в некоторой точке A с координатами x_P и y_P в главных центральных осях инерции x и y (см. рис. 10.1, а).

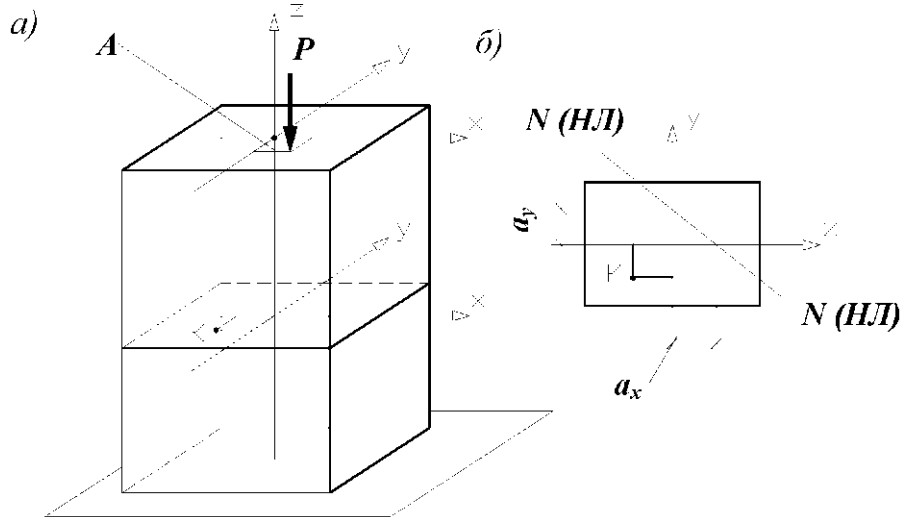


Рис. 10.1. Внецентренное сжатие

Тогда, с учетом принятого нами допущения,

$$N = -P; M_x \approx Py_P; M_y \approx Px_P.$$

Точные значения изгибающих моментов определяются по формулам

$$M_x = P(y_P + v), M_y = P(x_P + u),$$

где v и u – прогибы рассматриваемого поперечного сечения стержня в направлении осей x и y соответственно. Принятое нами выше допущение о большой жесткости стержня на изгиб заключается в предположении, что $v \ll y_P$; $u \ll x_P$.

Напряжения в произвольной точке K с координатами x и y равны:

$$\sigma_z = -P/F \pm M_x y / I_x \pm M_y x / I_y, \quad (10.1)$$

где, согласно принципу независимости действия сил, первое слагаемое представляет собой напряжение от сжатия, а второе и третье – от изгиба.

Значения изгибающих моментов и координат исследуемой точки K подставляются в формулу (10.1) по абсолютному значению, а знак второго и третьего слагаемых определяется по физическому смыслу.

10.2. Как определяется положение НЛ?

Преобразуем формулу (10.1), подставляя в нее значения изгибающих моментов:

$$\sigma_z = -P/F + Py_P y / I_x + Px_P x / I_y = -P/F \left(1 - y_P y / i_x^2 - x_P x / i_y^2 \right). \quad (10.2)$$

Обозначим координаты некоторой точки нулевой линии x_N и y_N . Подставим эти координаты в (10.2) вместо x и y соответственно, а также

учтем, что напряжения в точках *НЛ* равны нулю. После сокращения на P/F получим уравнение *НЛ*:

$$y_P y_N / i_x^2 + x_P x_N / i_y^2 = 1. \quad (10.3)$$

Таким образом, положение нулевой линии зависит от значений главных радиусов инерции поперечного сечения i_x, i_y и координат точки приложения нагрузки x_P, y_P и совершенно не зависит от величины силы P .

Важно также отметить, что *НЛ* и точка приложения нагрузки всегда расположены по разные стороны от центра тяжести поперечного сечения (см. рис. 10.1, б).

10.3. Чему равны отрезки, отсекаемые *НЛ* от осей координат?

Эти отрезки, которые мы обозначим через a_x и a_y (см. рис. 10.1, б), легко найти из выражения (10.3). Если сначала в нем принять $x_N = 0, y_N = a_y$, а затем $-y_N = 0, x_N = a_x$, то мы легко найдем, что отрезки, отсекаемые *НЛ* от осей координат, определяются по формулам

$$a_y = -i_x^2 / y_P; \quad a_x = -i_y^2 / x_P.$$

10.4. Что называется ядром сечения?

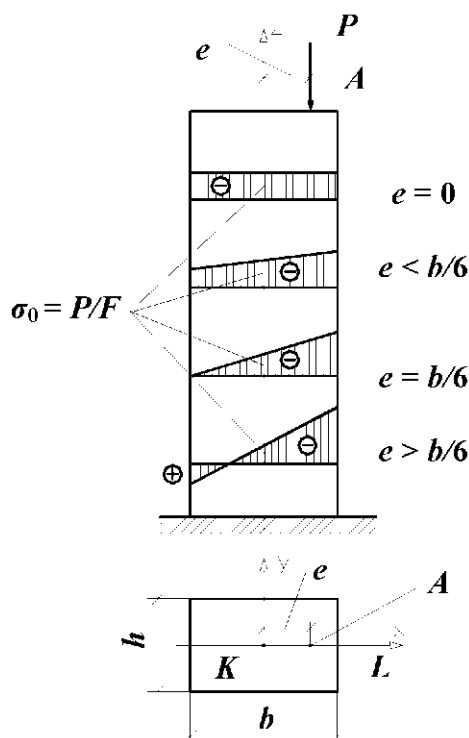


Рис. 10.2. Ядро сечения

Ядром сечения называется малая область вокруг центра тяжести поперечного сечения стержня. Она характеризуется тем, что всякая сжимающая сила, приложенная внутри этой области, вызывает во **всех** точках поперечного сечения (и соответственно **во всем стержне**) только напряжения **сжатия**.

Понятие о ядре сечения впервые ввел Бресс в 1854 г.

Рассмотрим следующий пример. Пусть стержень имеет прямоугольное поперечное сечение с размерами b и h и одна из координат точки приложения нагрузки (точка A) равна нулю, например $x_P = e, y_P = 0$ (рис. 10.2). Тогда напряжения в крайних точках K и L поперечного сечения стержня будут определяться по формулам

$$\sigma_z^{(K)} = -P/F + M_y / W_y = -P/F + 6Pe / hb^2 = -P/F(1 - 6e/b);$$

$$\sigma_z^{(L)} = -P/F - M_y / W_y = -P/F - 6Pe / hb^2 = -P/F(1 + 6e/b).$$

Из этих формул видно, что при $e = 0$ во всех точках поперечного сечения, в том числе и в крайних точках K и L , будут возникать *одинаковые* сжимающие напряжения. При $e < b/6$ напряжения по-прежнему будут *сжимающими*, но будут изменяться по ширине сечения. При $e = b/6$ в точках K и L они будут равны: $\sigma_{\bar{z}}^K = 0$, $\sigma_{\bar{z}}^L = -2P/F$.

Если $e > b/6$, то *НЛ* разделит поперечное сечение на две части. В одной из них напряжения будут сжимающими, а в другой – растягивающими. Для всех этих случаев (см. рис. 10.2) показаны эпюры напряжений.

Таким образом, *если мы не хотим*, чтобы в поперечном сечении *внецентренно сжатого стержня* возникали **растягивающие** напряжения (а многие строительные материалы, как известно, очень плохо работают на растяжение), то эксцентриситет нагрузки не должен выходить за некоторую область вокруг центра тяжести этого сечения. Эту область и называют *ядром сечения*.

10.5. Какую форму имеет ядро сечения для прямоугольного и для круглого поперечных сечений стержня?

Для прямоугольника ядро сечения имеет форму ромба (рис. 10.3, а), а для круглого сплошного стержня – круга (рис. 10.3, б).

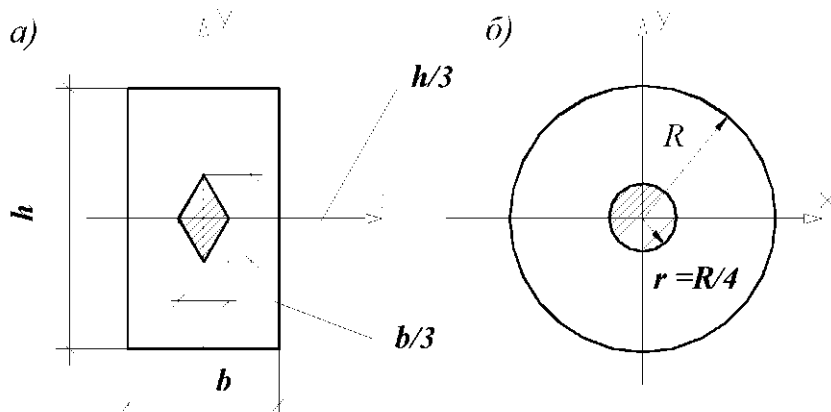


Рис. 10.3. Форма ядра для прямоугольного и круглого поперечных сечений

Заметим, что для любого поперечного сечения форма ядра всегда представляет собой *выпуклую* фигуру.

11. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Сочетание деформаций изгиба и кручения очень часто встречается в машиностроении. Например, коленчатый вал воспринимает значительные скручивающие моменты и, кроме того, работает на изгиб. Оси моторных вагонов электропоезда, а также трамвайного вагона работают на изгиб с кручением.

Разберем тему этой беседы на конкретном примере. Рассмотрим вал диаметра d (рис. 11.1), на который насажены зубчатое колесо диаметром d_1 и шкив ременной передачи диаметром d_2 . Пусть на зубчатое колесо действуют окружная сила P_t и радиальная сила P_r , а на шкив – силы натяжения ветвей ремня P_1 и P_2 .

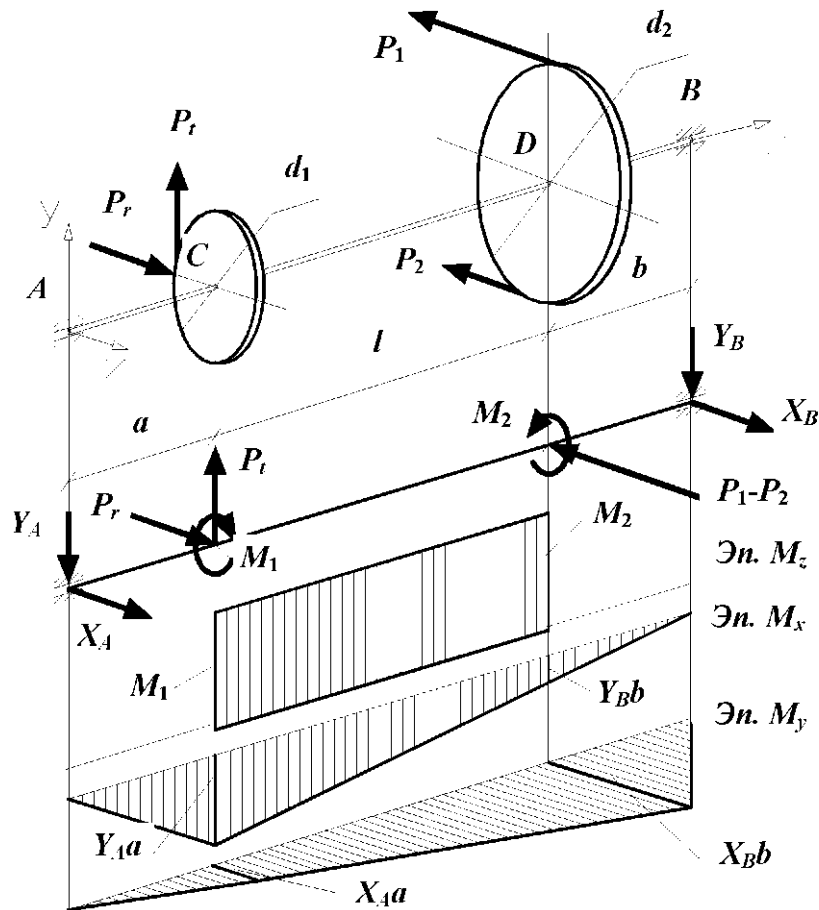


Рис. 11.1. Изгиб с кручением

Приведем все эти силы к оси вала. При параллельном переносе силы P_t добавляется скручивающий момент $M_1 = P_t d_1 / 2$, а при переносе сил P_1 и P_2 – скручивающий момент $M_2 = P_1 d_2 / 2 - P_2 d_2 / 2$.

При *равномерном* вращении вала (то есть при $\omega = const$) должно выполняться условие $M_1 = M_2$, из которого следует, что

$$P_t d_1 = (P_1 - P_2) d_2.$$

Подшипники, на которые опирается вал, рассматриваются нами как пространственные шарнирные опоры.

11.1. Какие эпюры нам понадобятся для расчета вала?

При расчете на изгиб с кручением считается, что касательные напряжения от кручения намного больше, чем касательные напряжения от изгиба. Поэтому последними напряжениями пренебрегают и соответствен-

но отпадает необходимость в построении эпюр поперечных сил Q_x и Q_y . Таким образом, нам необходимо построить эпюру крутящих моментов M_z и две эпюры изгибающих моментов M_x и M_y .

*Ординаты эпюр изгибающих моментов откладываются в соответствующей плоскости изгиба вала со стороны **сжатых** волокон.*

11.2. Какое сечение вала является *опасным*?

Для вала *постоянного* сечения опасным является то сечение, где *одновременно* возникают наибольшие крутящий момент M_z и результирующий изгибающий момент $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ (см. также далее вопрос 11.4). В рассматриваемом нами примере опасным является либо поперечное сечение, расположенное чуть правее точки C , либо сечение, расположенное чуть левее точки D (в зависимости от того, какой из изгибающих моментов будет больше: $M_u^{(C)}$ или $M_u^{(D)}$).

11.3. Какие точки поперечного сечения будут *опасными*?

*Опасными являются те две точки **опасного** поперечного сечения, в которых одновременно и нормальные напряжения от изгиба, и касательные напряжения от кручения имеют наибольшие значения.* Эти точки расположены вблизи контура поперечного сечения вала. Поскольку вала, как правило, изготавливают из *пластичного* материала обе эти точки *равноопасны*.

11.4. Как записывается *условие прочности*?

Расчет прочности при изгибе с кручением производится по *третьей* или по *четвертой* (*энергетической*) гипотезам прочности. В упомянутых опасных точках имеет место плоское напряженное состояние.

Эквивалентное напряжение по *третьей* гипотезе прочности определяется по формуле

$$\sigma_{\text{экв}}^{(3)} = \sigma_1 - \sigma_3 = \left(\sigma_z / 2 + \sqrt{\sigma_z^2 / 4 + \tau_{zy}^2} \right) - \left(\sigma_z / 2 - \sqrt{\sigma_z^2 / 4 + \tau_{zy}^2} \right) = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2}.$$

Тогда условие прочности по этой гипотезе принимает вид:

$$\sigma_{\text{экв}}^{(3)} = \sqrt{(M_x / W_x)^2 + (M_y / W_y)^2 + (M_z / W_\rho)^2} = M_{\text{экв}}^{(3)} / W \leq [\sigma],$$

где $M_{\text{экв}}^{(3)} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$ – эквивалентный момент по гипотезе *наибольших касательных напряжений*, а $W_x = W_y = W_\rho / 2 = W = \pi d^3 / 32$.

Если же расчет вала вести по *четвертой* (*энергетической*) гипотезе прочности, то приходим к следующему условию:

$$\sigma_{\text{экв}}^{(4)} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{zy}^2} = \sqrt{(M_x / W_x)^2 + (M_y / W_y)^2 + 0,75(M_z / W_\rho)^2} = M_{\text{экв}}^{(4)} / W \leq [\sigma],$$

в котором $M_{\text{экв}}^{(4)} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}$ – эквивалентный момент по четвертой (энергетической) гипотезе прочности.

Вернемся теперь вновь к вопросу об определении *опасного* поперечного сечения вала. После введения понятия эквивалентного момента, мы можем сказать, что *опасным* является то сечение, в котором эквивалентный момент будет наибольшим.

12. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

Устойчивость конструкции – это ее способность сохранять определенную форму равновесия под действием заданной нагрузки. Если конструкция такой способностью не обладает, то ее форма равновесия считается неустойчивой. Для устойчивого положения равновесия характерны *малые следствия при небольших начальных возмущениях*, а для неустойчивого положения равновесия – *большие следствия*.

12.1. Что понимается под устойчивостью сжатого стержня?

Прежде всего, заметим, что, говоря об устойчивости *сжатого* стержня, мы будем подразумевать устойчивость его *прямолинейной* формы равновесия. Отметим и следующее. *Все, что говорилось ранее о центральном сжатии стержней применительно лишь к коротким стержням.* Такие стержни, выполненные из хрупкого материала, разрушаются под углом 45° , вследствие сдвига, а из пластичного материала вовсе не разрушаются, и их можно сжать практически в лепешку.

Иначе ведут себя при сжатии *длинные* стержни. Опыт, который можно провести, например, с ученической линейкой, показывает, что при некотором значении сжимающей силы *прямолинейная* линейка внезапно *изгибается*, теряя при этом способность нести внешнюю нагрузку.

Под устойчивостью сжатого стержня понимается его способность сохранять прямолинейную форму равновесия.

12.2. Какое положение равновесия называется устойчивым, безразличным и неустойчивым?

Рассмотрим *длинный* стержень (рис. 12.1), нагруженный *осевой* сжимающей силой P . Пока нагрузка на стержень невелика $P = P_1$, его *прямолинейное* положение равновесия является *устойчивым*, поскольку, получив *малое боковое отклонение* от вертикали, он под действием упругих сил *быстро возвратится* в первоначальное *прямолинейное* положение равновесия (см. рис. 12.1, а), *после исчезновения причин, вызвавших это отклонение.*

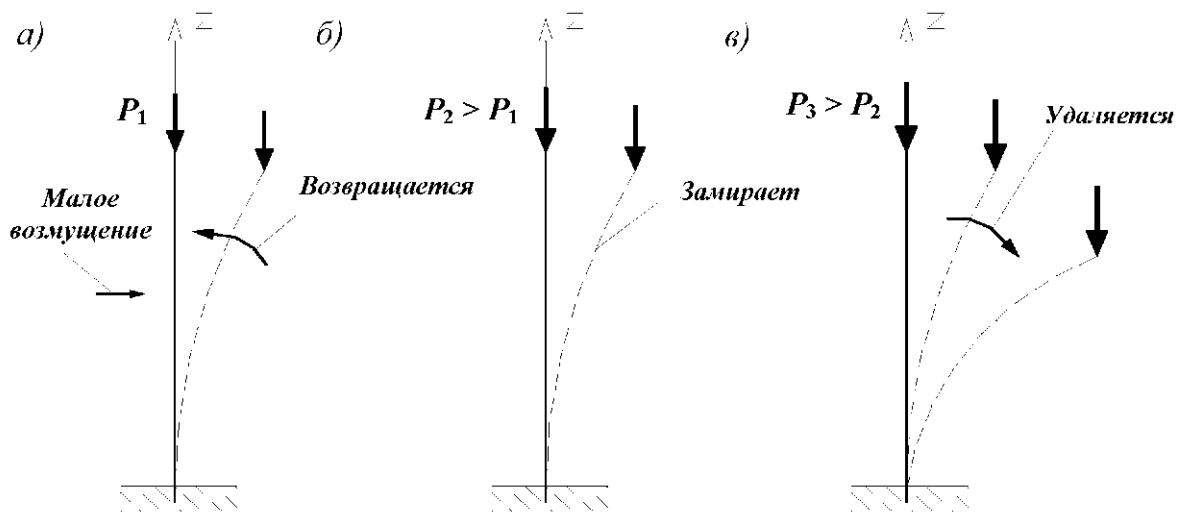


Рис. 12.1. Виды равновесия

По мере увеличения нагрузки стержень это делает все медленнее и медленнее. И наконец, при некоторой нагрузке $P_2 > P_1$ (см. рис. 12.1, б) он замрет в близком, *изогнутом* положении равновесия даже *после исчезновения причин, вызвавших это отклонение*.

В этом случае говорят, что первоначальное *прямолинейное* положение равновесия является **безразличным**, поскольку *наряду с прямолинейной формой равновесия стержня возможна и близкая к ней, изогнутая форма равновесия*.

При дальнейшем, даже весьма малом, увеличении нагрузки $P_3 > P_2$ *прямолинейное* положение равновесия становится **неустойчивым**. Слегка отклоненный от вертикали стержень *будет изгибаться и после исчезновения причин, вызвавших это отклонение, пока не займет положение равновесия, которому соответствуют уже значительные прогибы* (см. рис. 12.1, в).

12.3. Что называется **потерей устойчивости** стержня?

*Переход стержня из устойчивого в неустойчивое положение равновесия называется **потерей устойчивости***. На практике потеря устойчивости стержня сопровождается *качественным изменением вида деформации: деформация сжатия **внезапно** переходит в деформацию изгиба*. Очень часто такой *внезапный переход от прямолинейной формы равновесия к криволинейной* называется *выпучиванием* стержня.

12.4. Какая нагрузка называется **критической**?

*Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня, называется **критической***. Она обозначается $P_{кр}$. Из изложенного выше примера следует, что $P_{кр} = P_2$.

Можно утверждать, что *потеря устойчивости равносильна разрушению* стержня. При $P > P_{кр}$ *прямолинейная форма равновесия становится*

неустойчивой, стержень изогнется и это, в свою очередь, приведет к практически неограниченному росту напряжений.

12.5. Что называется *формой* потери устойчивости стержня?

При потере устойчивости прямолинейная ось стержня искривляется. *Конфигурация изогнутой оси стержня называется формой потери устойчивости. Форма потери устойчивости зависит от условий закрепления стержня и места приложения сжимающей нагрузки по его длине.*

12.6. Какая нагрузка называется *эйлеровой*?

В 1744 г. Эйлер впервые получил формулу для определения *теоретической* нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости стержня. Эту нагрузку, как правило, называют *эйлеровой*. Она равна:

$$P_{\text{э}} = \pi^2 EI_{\text{min}} / (\mu l)^2, \quad (12.1)$$

где E – модуль Юнга; I_{min} – минимальный главный центральный момент инерции поперечного сечения (очевидно, что при потере устойчивости изгиб стержня произойдет именно в плоскости *наименьшей жесткости*, то есть поперечные сечения стержня будут поворачиваться вокруг той из главных осей, относительно которой момент инерции *минимален*); μ – коэффициент *приведения* длины стержня, зависящий от формы потери устойчивости; l – длина стержня. Произведение $\mu l = l_0$ называется *приведенной*, или *свободной*, длиной стержня.

12.7. Почему μ называется *коэффициентом приведения длины*, а произведение $l_0 = \mu l$ – *приведенной длиной стержня*?

Для шарнирно опертого стержня, сжатого по концам, Эйлером была получена следующая формула

$$P_{\text{э}} = \pi^2 EI_{\text{min}} / l^2.$$

В этом случае $\mu = 1$. Форма потери устойчивости такого стержня представляет собой *одну полуволну синусоиды* (рис. 12.2, а). И этот случай принято считать *основным случаем потери устойчивости*.

Некоторые другие способы закрепления концов стержня (нагрузка по-прежнему приложена по его торцам) легко могут быть *приведены* к *основному* случаю путем сопоставления формы изогнутой оси с формой потери устойчивости шарнирно опертого стержня.

Рассмотрим еще два наиболее часто встречающихся случая закрепления концов стержня.

1) *Стержень с жестко заземленным одним и совершенно свободным другим концом*. При потере устойчивости он изогнется, как показано на рис. 12.2, б. Форма потери устойчивости этого стержня представ-

ляет собой четверть синусоиды. Следовательно, в этом случае приведенная длина равна $2l$ (полуволна синусоиды имеет длину $2l$), а эйлерова сила в четыре раза меньше, чем для основного случая:

$$P_0 = \pi^2 EI_{\min} / 4l^2 .$$

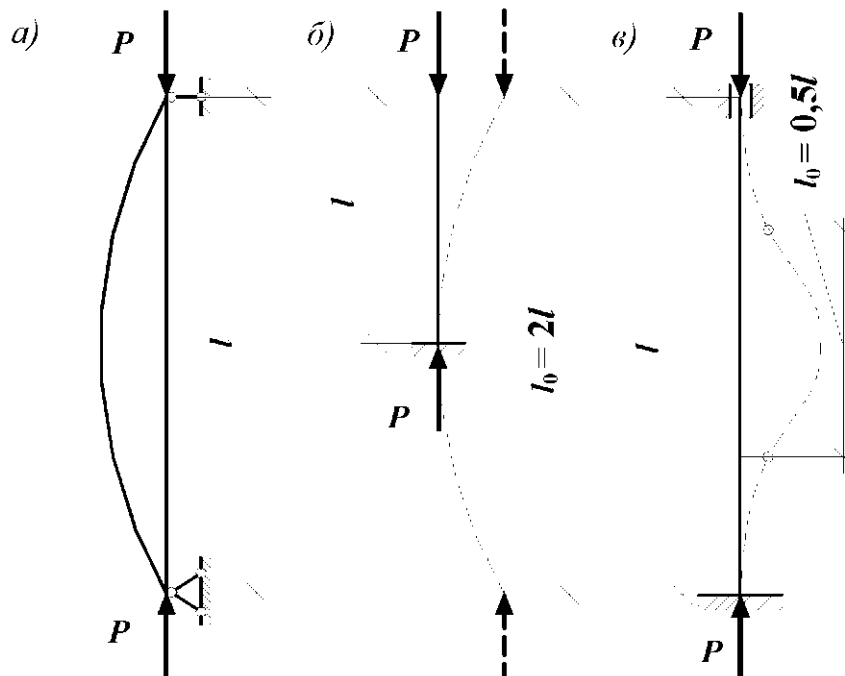


Рис. 12.2. Влияние закрепления концов стержня на значение критической нагрузки

2) **Оба конца стержня жестко заземлены.** В этом случае форма потери устойчивости такова, что одна полуволна синусоиды занимает половину длины стержня (рис. 12.2, в). Поэтому приведенная длина стержня равна $l/2$ ($\mu = 1/2$), а эйлерова нагрузка

$$P_0 = 4\pi^2 EI_{\min} / l^2 ,$$

то есть в четыре раза больше, чем для основного случая.

12.8. Всегда ли справедлива формула Эйлера? Иными словами, всегда ли значение эйлеровой нагрузки совпадает со значением критической нагрузки?

Отметим, что критической $P_{кр}$ принято называть **истинную**, а эйлеровой P_0 **теоретическую** нагрузку, при которой происходит потеря устойчивости стержня.

Формула Эйлера получена при предположении, что в момент потери устойчивости напряжения сжатия в стержне не превышают предела пропорциональности $\sigma_{мп}$, то есть

$$\sigma_0 = P_0 / F \leq \sigma_{мп} . \quad (12.2)$$

Об этом, в частности, говорит присутствие в формуле (12.1) модуля Юнга E , который свидетельствует о том, что вплоть до момента потери устойчивости выполнялся закон Гука.

Поэтому, если потеря устойчивости происходит при напряжении меньшем, чем $\sigma_{нц}$, то $P_{\sigma} = P_{кр}$.

Для стержней, теряющих устойчивость при напряжении, превышающем предел пропорциональности $\sigma_{нц}$, использование формулы Эйлера не только принципиально неправильно, но и крайне опасно по своим последствиям, поскольку критическая нагрузка (*истинная* нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости) меньше эйлеровой: $P_{кр} < P_{\sigma}$.

12.9. Каковы пределы применимости формулы Эйлера?

Пределы ее применимости можно легко установить, предварительно введя понятие *гибкости* стержня, предложенное Феликсом Станиславовичем Ясинским (1856 – 1899 гг.).

Определим *эйлеровы* напряжения, исходя из формулы Эйлера (12.1):

$$\sigma_{\sigma} = \frac{P_{\sigma}}{F} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 F} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Здесь $i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/F}$ – геометрическая характеристика поперечного сечения, называемая минимальным *радиусом инерции*, которая измеряется (см. беседу 4) в сантиметрах; $\lambda = \mu l / i_{\min}$ – безразмерная геометрическая характеристика, называемая *гибкостью* сжатого стержня.

С учетом формулы (12.2), находим, что

$$\lambda \geq \pi \sqrt{E/\sigma_{нц}}.$$

Величину, стоящую в правой части этого неравенства, обозначим $\lambda_{пр}$ и назовем *предельной гибкостью*. Тогда

$$\lambda_{пр} = \pi \sqrt{E/\sigma_{нц}}.$$

В отличие от гибкости стержня, представляющей собой его геометрическую характеристику, *предельная гибкость зависит только от физико-механических свойств материала и не зависит от его размеров.*

Предельная гибкость постоянная для данного материала величина. Например, для стали марки Ст. 3 $\lambda_{пр} \approx 100$.

Используя понятие предельной гибкости, пределы применимости формулы Эйлера можно представить в виде:

$$\lambda \geq \lambda_{пр}.$$

Таким образом, *формула Эйлера дает истинное значение нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости стержня, только в том*

случае, когда гибкость рассчитываемого стержня **больше или равна предельной гибкости** для материала, из которого он изготовлен.

12.10. По какой формуле определяется критическая нагрузка для стержней малой и средней гибкости (при $\lambda < \lambda_{пр}$)?

В случае, когда формула Эйлера неприменима, критическая нагрузка определяется по эмпирической формуле, предложенной Ясинским, на основе опытов, проведенных рядом исследователей. Она имеет вид:

$$P_{кр} = (a - b\lambda)F,$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от свойств материала и измеряющиеся в единицах напряжения. Например, для стали марки Ст. 3 $a = 31$ кН/см², $b = 0,114$ кН/см²; для дерева $a = 2,93$ кН/см², $b = 0,0194$ кН/см².

Для очень коротких стержней (при некоторой гибкости, обозначаемой λ_0) критическое напряжение, то есть напряжение, при котором происходит потеря устойчивости стержня, может оказаться равным предельному напряжению (при сжатии: пределу текучести для пластичных материалов или пределу прочности для хрупких). Тогда, при $\lambda < \lambda_0$:

- для пластичных материалов

$$P_{кр} = \sigma_m F,$$

- для хрупких

$$P_{кр} = \sigma_{пр} F.$$

12.11. Можно ли увеличить критическую нагрузку стержня, заменив, например, одну марку стали на другую, имеющую больший предел текучести?

Для стержней с одинаковыми геометрическими размерами и с одинаковыми условиями закрепления концов замена одной марки стали на другую может изменить, а может и не изменить критическую нагрузку.

Критическая нагрузка не изменится, если она определяется по формуле Эйлера (при $\lambda \geq \lambda_{пр}$), поскольку входящий в эту формулу модуль Юнга практически не зависит ни от химического состава стали, ни от ее термической обработки (для всех марок стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа).

Однако для стержней средней гибкости (при $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{пр}$), а также для коротких стержней (при $\lambda < \lambda_0$) такая замена марки стали приведет к увеличению критической нагрузки. В первом случае это объясняется тем, что эмпирические коэффициенты a и b в формуле Ясинского существенно зависят от марки стали, а во втором стержень, по существу, рассчитывается не на устойчивость, а на прочность.

12.12. Как осуществляется расчет центрально сжатого стержня на устойчивость и что такое коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения (коэффициент продольного изгиба)?

При назначении размеров длинного сжатого стержня, в первую очередь, приходится заботиться о том, чтобы он в процессе эксплуатации не потерял *устойчивость прямолинейной формы равновесия*. Поэтому напряжения в сжатом стержне не должны превышать критических напряжений:

$$\sigma = P/F \leq P_{кр}/F = \sigma_{кр}. \quad (12.3)$$

Исследования показали, что незначительные *местные ослабления* стержня (например, заклепочные отверстия) не оказывают существенного влияния на значение критической нагрузки, поэтому в формуле (12.3) берется вся площадь поперечного сечения (площадь брутто).

Условие прочности при сжатии, как известно, имеет вид:

$$\sigma = P/F \leq [\sigma].$$

Расчет сжатого стержня на устойчивость можно *по форме* привести к расчету на простое сжатие. Однако при этом необходимо учесть, что длинный стержень (стержень большой гибкости) может потерять устойчивость, то есть исчерпает несущую способность, при меньшем напряжении, чем допускаемое напряжение $[\sigma]$. Поэтому условие устойчивости сжатого стержня можно представить в виде:

$$\sigma = P/F \leq \varphi[\sigma], \quad (12.4)$$

где φ – коэффициент, называемый *коэффициентом уменьшения основного допускаемого напряжения* или *коэффициентом продольного изгиба*. Очевидно, что этот коэффициент зависит от материала стержня и от его гибкости λ и изменяется в пределах от 0 (при $\lambda \rightarrow \infty$) до 1 (при $\lambda = 0$).

Этот метод расчета очень удобен в том смысле, что он не связан с пределами применимости формулы Эйлера и может быть использован практически при всех значениях гибкости.

Заметим, что проектировочный расчет по формуле (12.4), связанный с подбором размеров поперечного сечения стержня

$$F_{треб} \geq P/(\varphi[\sigma]), \quad (12.5)$$

приходится осуществлять *методом последовательных приближений*. Это обусловлено тем, что площадь поперечного сечения стержня в *неявном* виде входит и в правую часть выражения (12.5), поскольку коэффициент продольного изгиба φ зависит от гибкости стержня λ , а последняя, в свою очередь, от радиуса инерции $i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/F}$.

12.13. Какой стержень называется *равноустойчивым*?

Мы уже отмечали, что если стержень одинаково закреплен в обеих главных плоскостях инерции, то при вычислении критической нагрузки в расчет необходимо вводить *наименьший* из главных моментов инерции.

Поэтому *рациональным* будет такое поперечное сечение стержня, для которого главные моменты инерции равны между собой: $I_{\max} = I_{\min}$. Такой стержень и называется *равноустойчивым*.

Так, например, если поперечное сечение стержня состоит из двух рядом расположенных двутавров, то $I_x \gg I_y$. Раздвигая двутавры, мы будем увеличивать момент инерции поперечного сечения I_y . Для того чтобы такой стержень стал равноустойчивым, расстояние между центрами тяжести двутавров, так называемая *раздвижка*, обозначаемая далее буквой a , должно быть определено из условия, что $I_x = I_y$.

Если для *одного* двутавра моменты инерции обозначить I_{x1} и I_{y1} (причем $I_{x1} \gg I_{y1}$), а площадь поперечного сечения – F_1 , то для определения *раздвижки* можно записать следующее равенство:

$$2I_{x1} = 2\left[I_{y1} + F_1(a/2)^2\right].$$

Осюда *раздвижка* двутавров равна

$$a = \sqrt{4(I_{x1} - I_{y1})/F_1}.$$

13. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Вся теория, изложенная в предыдущих наших беседах, основывалась на *статическом* действии внешних нагрузок. Мы полагали, что нагрузки, прикладываемые к стержням, возрастают от нуля до своего конечного значения настолько *медленно*, что *ускорениями* частиц тела, возникающими при его деформировании, можно пренебрегать. Поэтому мы считали, что в каждый момент времени *внешние* и *внутренние* силы взаимно уравновешены.

Однако в процессе эксплуатации конструкции приходится иметь дело и с нагрузками, которые могут достаточно *быстро* менять как свое значение, так и положение (последний случай, например, имеет место в случае движущегося по мосту поезда). Такая нагрузка называется *динамической*. Она вызывает весьма *большие* ускорения частиц тела при его деформировании, и поэтому в расчете, помимо *внешних* и *внутренних* сил, необходимо учитывать и так называемые *силы инерции*.

13.1. Что понимается под *силой инерции* в сопротивлении материалов?

Рассмотрим следующий пример. К грузу массой m привяжем веревку. Другой конец веревки будем удерживать в руке. Начнем вращать массу в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью. Будем пренебрегать *весом* груза. Тогда на массу будет действовать только одна сила – сила натяжения веревки, направленная от груза к руке (так называемая *центростремительная сила*). Эта сила выводит массу из присущего ей, по

свойству инерции, состояния покоя или равномерного и прямолинейного движения и сообщает массе *центростремительное ускорение*. Согласно третьему закону *Ньютона*, масса *противодействует* этой силе. Это противодействие со стороны движущейся с ускорением массы приложено к веревке. Оно ее растягивает с силой, которую и называют *силой инерции*.

Эту силу инерции, *реально* действующую со стороны движущейся массы на упругую связь (в нашем примере – на веревку), необходимо отличать от *фиктивной* силы, которую в теоретической механике, согласно принципу французского ученого *Жан де Рона Д’Аламбера (d’Alembert, 1717 – 1783 гг.)*, *условно* прикладывают к самой движущейся массе и также называют силой инерции.

Таким образом, в сопротивлении материалов, говоря о *силе инерции*, мы будем иметь в виду *реальную* силу, которая *представляет собой действие (или, точнее, противодействие)*, оказываемое движущейся с ускорением массы на упругую связь. Сила инерции, как и внешняя нагрузка, деформирует связь, вызывает в ней внутренние усилия и может привести к разрушению связи.

Проиллюстрируем сказанное и на следующем примере. Пусть груз массой m , находящийся на консоли *невесомой* балки, совершает свободные колебания (рис. 13.1, а).

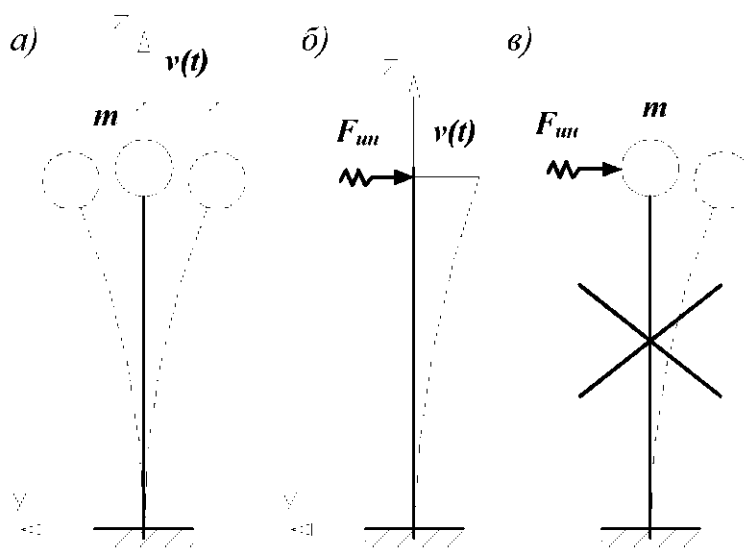


Рис. 13.1. Сила инерции

Отбросим массу (рис. 13.1, б) и действие движущейся массы на *невесомую* балку (иногда называемую *безмассовым упругим скелетом*) заметим *силой инерции* $F_{ин} = -m\ddot{v}(t)$, где $v(t)$ – прогиб балки в точке расположения массы, а точками обозначена вторая производная от прогиба по времени t .

Напомним, что обозначение производной по времени точкой было предложено английским ученым *Исааком Ньютоном (Newton, 1642 – 1727 гг.)*

Заметим, что *ошибочно* прикладывать *реальную* силу инерции к самой движущейся массе (рис. 13.1 в), как это делается в некоторых учебниках по сопротивлению материалов.

Понятие «сила инерции» в 1803 г. ввел французский ученый *Лазар Никола Маргерит Карно* (Carnot, 1753 – 1823 гг.).

13.2. Как вычисляются напряжения в тросе при ускоренном поднятии (опускании) груза?

Пусть груз массой m поднимают на тросе с ускорением a (рис. 13.2, а). И пусть *погонная* масса троса (масса троса, приходящаяся на единицу его длины) равна \bar{m} .

Определим продольное динамическое усилие N_o , возникающее в некотором сечении троса, находящемся на расстоянии z от груза.

Отбросим движущиеся *массы* груза и участка троса длиной z и заменим их действие на *безмассовый* упругий скелет троса силой их веса

$$G = (m + \bar{m}z)g$$

и суммарной силой инерции

$$F_{ин} = (m + \bar{m}z)a,$$

направленной в сторону, *противоположную* ускорению a (рис. 13.2, б).

Из уравнения равновесия находим:

$$N_o = G + F_{ин} = (m + \bar{m}z)g + (m + \bar{m}z)a = (m + \bar{m}z)g(1 + a/g).$$

Если бы груз был неподвижен, то

$$N_{cm} = (m + \bar{m}z)g.$$

Тогда, окончательно получим:

$$N_o = N_{cm}(1 + a/g).$$

Эффект действия динамической нагрузки на практике, как правило, оценивается *коэффициентом динамичности*, представляющим собой отношение *динамического* усилия (перемещения) к *статическому* усилию (перемещению):

$$k_o = N_o / N_{cm}.$$

В рассматриваемом нами случае он оказывается равным:

$$k_o = 1 + a/g. \quad (13.1)$$

Таким образом, при поднятии груза с ускорением a внутреннее динамическое продольное усилие в тросе N_o может в несколько раз превы-

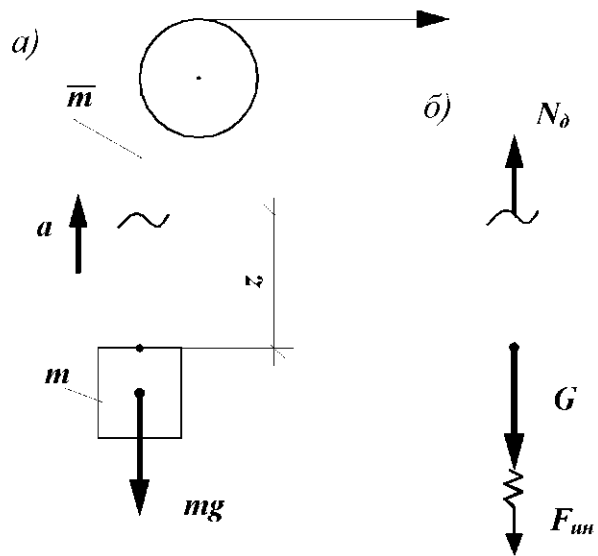


Рис. 13.2. Ускоренное поднятие (опускание) груза

силь статическое усилие $N_{ст}$. Так, например, в скоростных лифтах, в которых большая скорость подъема может быть достигнута только благодаря большим ускорениям, динамическое усилие и соответственно динамическое напряжение в тросе бывает очень большим.

Если груз опускается с ускорением a , то в формуле (13.1) перед вторым слагаемым нужно поставить знак «минус». Заметим, что при свободном падении груза, когда $a = -g$, динамическое усилие в тросе будет равно нулю.

13.3. Какое воздействие на стержень называется ударом?

Под ударом понимается взаимодействие движущихся тел, которое происходит в результате их соприкосновения. Удар сопровождается резким изменением скоростей частиц этих тел за весьма малый промежуток времени, при этом сила удара достигает, как правило, очень большого значения.

В качестве примера можно привести действие кузнечного молота на кусок металла, удар падающего груза при забивке свай, воздействие колеса вагона на рельс при перекатывании через стык и т. п.

13.4. Какие основные допущения принимаются при расчете на удар?

За исключительно короткий промежуток времени, в течение которого совершается удар, очень трудно произвести какие-либо измерения, связанные с определением силы удара. Поэтому обычно производится *условный* расчет на удар, по которому определяются внутренние силы и перемещения, возникающие в стержне после удара. При этом сначала определяется наибольшее динамическое перемещение точки стержня, по которой наносится удар, а затем и напряженное состояние самого стержня.

Методика расчета на удар в сопротивлении материалов основывается на следующих основных допущениях:

1) деформация стержня, вызванная ударной нагрузкой, описывается законом Гука, а сам стержень является линейно деформируемой системой, при этом модуль Юнга имеет такое же значение, как и при статическом нагружении стержня;

2) работа, совершаемая падающим грузом, полностью переходит в потенциальную энергию деформации стержня;

3) масса стержня, воспринимающего удар, пренебрежимо мала по сравнению с массой падающего груза;

4) удар считается неупругим, то есть после соприкосновения падающего груза со стержнем он не отскакивает и продолжает движение вместе со стержнем при его деформации.

13.5. Чему равен коэффициент динамичности при поперечном ударе?

Рассмотрим удар груза весом G , падающего с высоты h на некоторую упругую систему, например балку (рис. 13.3).

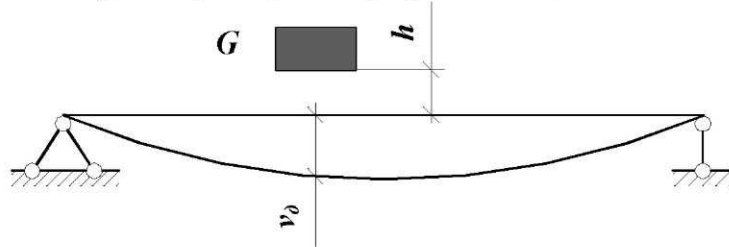


Рис. 13.3. Падение груза на балку

Обозначим v_δ – динамический прогиб балки в месте падения груза.

Работа, совершаемая падающим грузом, равна:

$$A = G(h + v_\delta). \quad (13.2)$$

Согласно принятому второму допущению, работа полностью переходит в потенциальную энергию деформации балки V . По теореме Клапейрона (см. далее беседу 15) потенциальная энергия деформации равна половине произведения некоторой динамической силы $F_\delta = v_\delta / \delta$ на соответствующее ей динамическое перемещение v_δ :

$$V = F_\delta v_\delta / 2 = v_\delta^2 / 2\delta. \quad (13.3)$$

Приравнявая выражения (13.2) и (13.3), а также учитывая, что статический прогиб балки в месте падения груза G , вызванный его статическим приложением, равен $v_{cm} = \delta G$, после несложных преобразований получим следующее квадратное уравнение относительно динамического прогиба балки:

$$v_\delta^2 - 2v_{cm} v_\delta - 2hv_{cm} = 0. \quad (13.4)$$

Отсюда

$$v_\delta = v_{cm} + \sqrt{v_{cm}^2 + 2hv_{cm}} = v_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + 2h/v_{cm}} \right).$$

Легко убедиться, что второй корень квадратного уравнения (13.4) имеет отрицательное значение v_δ , и поэтому он нас не интересует.

Динамический прогиб балки в месте падения груза можно представить в виде:

$$v_\delta = k_\delta v_{cm},$$

где k_δ – коэффициент динамичности.

Тогда

$$k_\delta = 1 + \sqrt{1 + 2h/v_{cm}}. \quad (13.5)$$

Принятое нами допущение о линейной зависимости между внешней силой и перемещением позволяет сделать вывод о том, что динамические

напряжения в балке от действия ударной нагрузки во столько же раз больше напряжений, которые возникли бы в ней при *статическом* приложении такой же нагрузки, во сколько раз *динамический* прогиб больше *статического*, поэтому:

$$\sigma_{\sigma} = k_{\sigma} \sigma_{ст.}$$

В частном случае, когда высота падения $h = 0$, то есть в случае *внезапного* приложения нагрузки, $k_{\sigma} = 2$.

Из формулы (13.5) следует, что для уменьшения коэффициента динамичности необходимо увеличить $v_{ст.}$. Поэтому для смягчения удара применяют пружинные и резиновые прокладки, допускающие большие деформации.

14. СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ

Большинство деталей машин и механизмов, а также элементы некоторых строительных конструкций испытывают действие *переменных во времени нагрузок*, причем эти нагрузки могут изменяться во времени *по величине или и по величине, и по знаку*.

В этой *краткой* беседе Читатель узнает, что поведение стержня, находящегося под действием таких нагрузок, существенно отличается от его поведения при статическом нагружении, которое мы рассматривали ранее. Необходимо отметить, что разрушение материала при действии переменных нагрузок происходит при значительно меньших напряжениях, чем при действии статических нагрузок. При этом *материал разрушается без заметных остаточных деформаций даже в том случае, когда он является пластичным* (словно материал теряет свои пластические свойства, иными словами, «устает»).

14.1. Что называется усталостью?

Как легче всего разломать медную проволоку? Несколькими повторными перегибами в одном каком-то ее сечении. В этом случае говорят, что проволока ломается, потому что ее материал «устал». При этом «усталость» материала *не связана* с изменением его физико-механических свойств.

Усталостью называют явление разрушения материала в результате постепенного накопления в нем **повреждений** (микротрещин), приводящих к возникновению **усталостной трещины** при многократном повторном нагружении.

Излом детали от усталости имеет характерный вид. В поперечном сечении почти всегда можно наблюдать *две* зоны. Одна из них – гладкая, притертая, образованная вследствие постепенного развития трещины, а другая – крупнозернистая, образовавшаяся при окончательном изломе се-

чения детали, ослабленного развивающейся трещиной. Усталостному разрушению подвержены многие детали машин и элементы конструкций. Это оси вагонов, шатуны моторов, гребные винты и т. п.

Термин «усталость» впервые ввел в рассмотрение в 1828 г. французский ученый Жан Виктор Понселе (Poncelet, 1788 – 1867 гг.).

14.2. А что такое выносливость?

Это способность материала сопротивляться усталостному разрушению при действии повторно-переменных напряжений.

14.3. Что называется пределом выносливости?

Пределом выносливости называется максимальное по абсолютному значению напряжение, при котором материал еще способен сопротивляться усталостному разрушению при любом произвольно большом числе повторений переменных напряжений.

Предел выносливости определяется экспериментально. Он зависит от целого ряда факторов и, в частности, от закона изменения нагрузки во времени.

14.4. При каком нагружении в стержне возникают переменные во времени напряжения?

Рассмотрим, например, ось вагона, имеющую круглое поперечное сечение диаметром d , нагруженную силами P и вращающуюся с постоянной угловой скоростью $\omega = const$ (рис. 14.1, а). Подшипники, на которые опирается вал, будем рассматривать как шарнирные опоры.

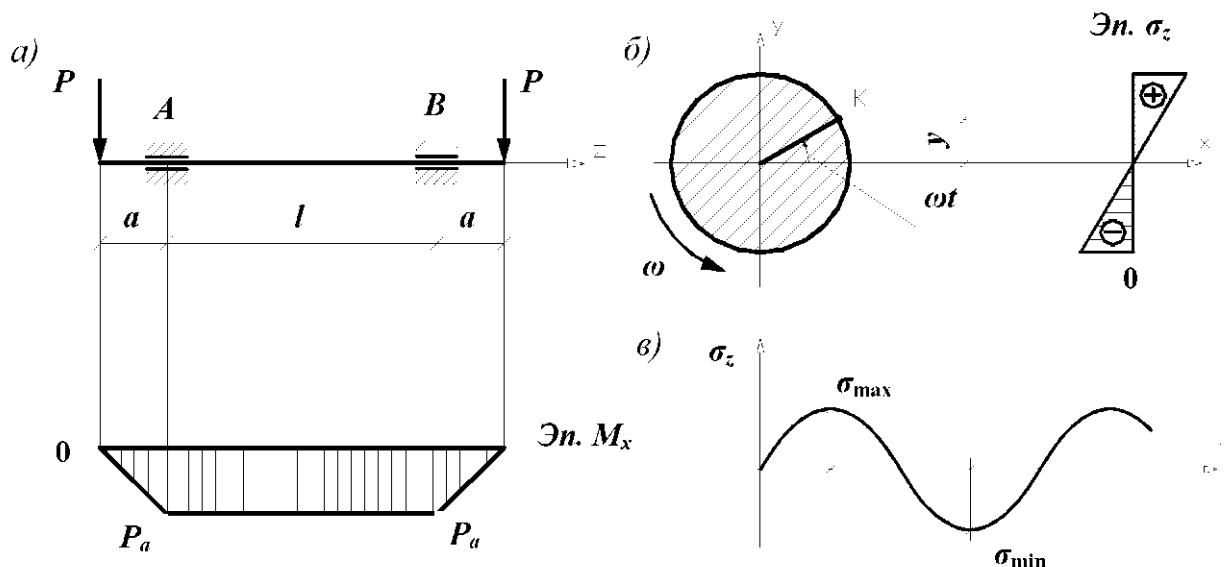


Рис. 14.1. Напряжения, переменные во времени

На участке AB между опорами вал испытывает чистый изгиб (эпюра изгибающих моментов M_x построена на сжатых волокнах).

Проследим за изменением нормального напряжения в точке K , расположенной вблизи контура поперечного сечения (рис. 14.1, б). Напомним, что напряжения при изгибе в *произвольной* точке поперечного сечения равно:

$$\sigma_z = M_x y / I_x.$$

При *повороте* вала расстояние y от точки K до нейтральной оси x будет изменяться от 0, когда точка находится на оси x , до $y_{\max} = d/2$, когда точка K занимает крайнее верхнее или крайнее нижнее положение.

В некоторый момент времени t это расстояние может быть определено по формуле

$$y(t) = (d/2) \sin \omega t.$$

Тогда

$$\sigma_z = M_x (d/2) \sin \omega t / I_x = (M_x / W_x) \sin \omega t = \sigma_z^{\max} \sin \omega t.$$

Из последней формулы видно, что напряжение в точке K изменяется по *синусоидальному* закону (рис. 14.1, в). За один полный оборот оси рассматриваемая точка попадает из зоны растяжения в зону сжатия (или наоборот).

Мысленно представим теперь, что к этой же оси вагона помимо двух сил P (рис. 14.1, а), вызывающих ее изгиб, по концам приложены и две растягивающие *постоянные* силы P_1 . Тогда напряжение в точке K будет равно *алгебраической* сумме напряжений, возникающих как от *растяжения*, так и от *изгиба*:

$$\sigma_z = P_1 / F + \sigma_z^{\max} \sin \omega t.$$

В этом случае график изменения напряжений в рассматриваемой точке K во времени будет представлять собой синусоиду, но смещенную вверх относительно оси t на величину P_1 / F .

14.5. Что называется циклом напряжений? Какие бывают виды циклов напряжений и каковы их характеристики?

Циклом напряжений называется совокупность всех последовательных значений напряжений, возникающих в материале за один период времени T их изменения при регулярном нагружении.

Цикл характеризуется следующими параметрами (рис. 14.2):

- максимальным напряжением σ_{\max} ;
- минимальным напряжением σ_{\min} ;
- средним напряжением $\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2$;
- амплитудным напряжением $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2$;
- коэффициентом асимметрии $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$.

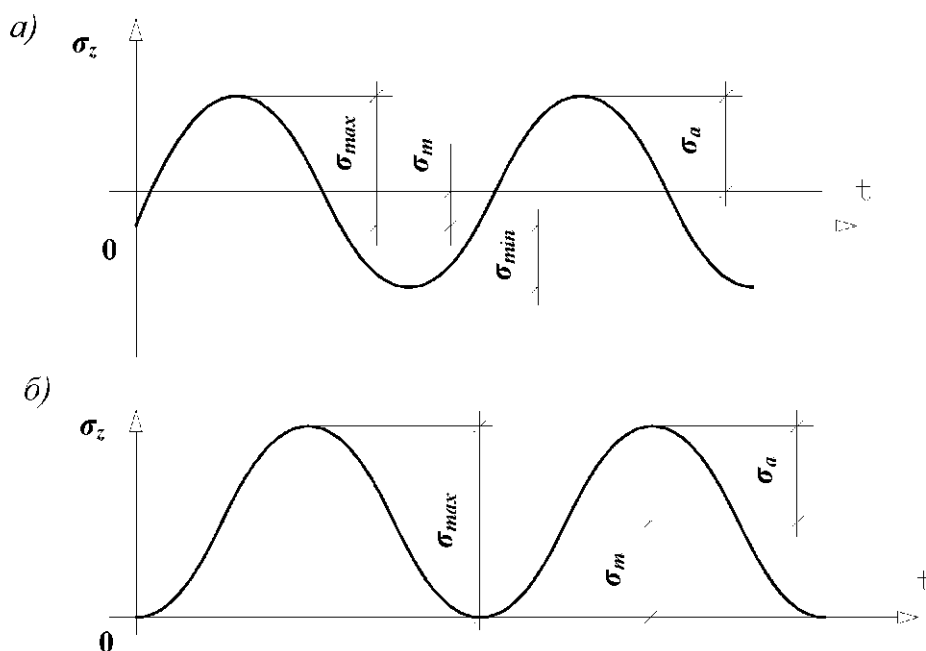


Рис. 14.2. Характеристики циклов

Циклы могут быть *знакопостоянными*, если алгебраические знаки напряжений σ_{max} и σ_{min} одинаковы, и *знакопеременными* (см. рис. 14.2, а).

Цикл, у которого максимальное и минимальное напряжения равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку, называется *симметричным* (см. рис. 14.1, в). Для такого цикла:

$$\sigma_m = 0, \sigma_a = \sigma_{max} = -\sigma_{min}, R = -1.$$

Знакопостоянный цикл, при котором напряжения изменяются от нуля до своего максимального значения, называется *отнулевым* (см. рис. 14.2, б). Его характеристики следующие: $\sigma_m = \sigma_a, R = 0$.

Постоянным циклом называется цикл, у которого напряжения не изменяются во времени, то есть:

$$\sigma_a = 0, \sigma_m = \sigma_{max} = \sigma_{min}, R = +1.$$

Как показывают эксперименты, характер (закон) изменения напряжений во времени практически не оказывает влияния на прочность стержня, существенными являются характеристики цикла.

В заключение отметим, что все сказанное о циклах, разумеется, относится не только к нормальным, но и к касательным напряжениям.

14.6. Как проводятся испытания материала на усталость и как выглядит кривая усталости?

Наиболее распространенными являются испытания образцов на *чистый изгиб* при *симметричном* цикле, поскольку именно этот цикл напряжений является самым опасным для материала (вспомним пример с медной проволокой), а проведение этого эксперимента значительно проще, чем для других видов циклов.

Для проведения такого эксперимента изготавливают партию из 6 – 10 совершенно одинаковых образцов, имеющих в пределах рабочей части строго круговую цилиндрическую форму. Диаметр образцов обычно составляет от 5 до 10 мм.

Первый образец нагружают таким образом, чтобы возникающие в нем максимальные нормальные напряжения были заведомо *ниже предела прочности материала* ($\sigma_{\max} \approx 0,7\sigma_{\text{пч}}$), но *выше предела выносливости*. Для последующих образцов максимальное напряжение уменьшают.

С помощью счетчика оборотов, имеющегося на испытательной машине, фиксируют число циклов нагружения, которое выдержит каждый образец до разрушения. По результатам испытаний строят график зависимости числа циклов N , которое выдерживает образец без разрушения, от максимального напряжения σ_{\max} , создаваемого в образце (рис. 14.3).

Кривая $\sigma_{\max} = f(N)$ называется *кривой усталости* или *кривой Велера* (по имени служащего немецких железных дорог *Августа Велера* (Wohler, 1819 – 1914 гг.), опубликовавшего в 1870 г. результаты своих экспериментов с образцами на усталость).

Из рис. 14.3 видно, что по мере уменьшения напряжения σ_{\max} число циклов N начинает очень быстро расти, поэтому кривая усталости имеет значительную протяженность вдоль оси абсцисс. Для многих материалов эта кривая *асимптотически* приближается к некоторому значению максимального напряжения, начиная с которого образцы не проявляют никаких признаков разрушения. Поэтому при соответствующем числе циклов испытания можно прекратить.

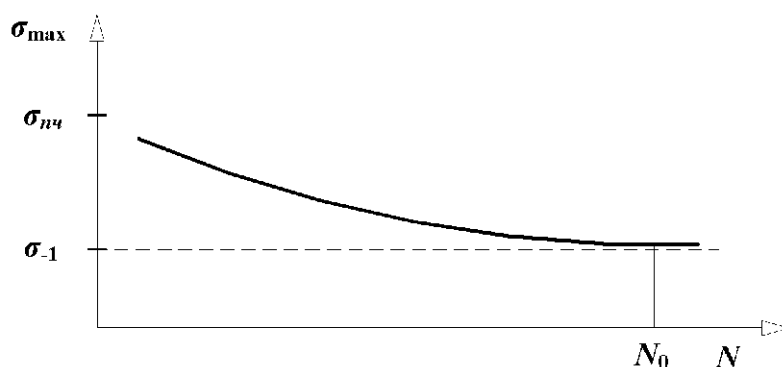


Рис. 14.3. Кривая Велера

Практика проведения испытаний показывает, что образцы, выдержавшие без разрушения 10^7 циклов, могут при данном нагружении проработать неограниченное время. Поэтому продолжительность испытаний заранее оговаривается. Для того чтобы иметь наглядное представление о порядке указанного значения числа циклов, заметим, что ось железнодорожного вагона на пути от Москвы до Владивостока испытывает около 3×10^6 циклов.

Предварительно задаваемая наибольшая продолжительность эксперимента на усталость называется *базой испытаний* N_0 .

Еще раз напомним, что *максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, при котором до базы испытания не происходит усталостного разрушения, называется пределом выносливости*.

Кривые усталости для *цветных* материалов не имеют асимптоты, и их ординаты с ростом N падают до нуля. Для цветных материалов вводится понятие *условного предела выносливости*. За его значение принимается наибольшее напряжение, при котором образец выдерживает не менее 10^8 циклов.

14.7. Как обозначается предел выносливости?

Предел выносливости обозначается σ_R (или τ_R), где индекс R соответствует коэффициенту асимметрии цикла. Так, например, для симметричного цикла он обозначается σ_{-1} , для отнулевого $-\sigma_0$, для постоянного $-\sigma_{+1}$.

Установлено, что предел выносливости при симметричном цикле является наименьшим по сравнению с другими видами циклов, то есть $\sigma_{-1} < \sigma_R$. Так, например, $\sigma_0 \approx (1,6 \div 1,8)\sigma_{-1}$; $\sigma_{+1} = \sigma_{nc} \approx 2,33\sigma_{-1}$.

14.8. Что называется *пределом ограниченной выносливости*?

Для расчета деталей, не предназначенных к длительной эксплуатации, возникает необходимость в определении наибольшего значения напряжения, которое может выдержать материал *при заданном числе циклов* N , значение которого меньше, чем базовое N_0 . В этом случае по кривой усталости и заданному числу циклов N определяется соответствующее напряжение σ_{RN} , называемое *пределом ограниченной выносливости*.

14.9. Какие основные *факторы* влияют на величину предела выносливости при симметричном цикле?

При оценке прочности детали, работающей в условиях статического нагружения, механические характеристики *материала детали* полностью отождествляются с механическими характеристиками *материала образца*, полученными в результате эксперимента. При этом не учитывается разница ни в форме, ни в размерах детали и образца и др.

При расчете *конкретной* детали на усталость необходимо учитывать упомянутые факторы. К наиболее существенным факторам, которые влияют на предел выносливости при симметричном цикле, относятся *концентрация напряжений, абсолютные размеры поперечного сечения детали и шероховатость ее поверхности*. Это легко объясняется тем, что все упомянутые факторы способствуют возникновению и распространению микротрещин.

Влияние концентрации напряжений. Вблизи выточек, у краев отверстий, в местах изменения формы стержня, у надрезов и т. п. наблюдается *резкое увеличение напряжений* по сравнению с номинальными напряжениями, вычисленными по обычным формулам сопротивления материалов. Такое явление называется *концентрацией напряжений*, а причина, вызывающая значительный рост напряжений, – *концентратором напряжений*.

Зона распространения повышенных напряжений носит местный характер, поэтому эти напряжения часто называют *местными*.

При напряжениях, переменных во времени, наличие концентратора напряжений на образце приводит к снижению предела выносливости. Это объясняется тем, что многократное изменение напряжений в зоне очага концентрации напряжений приводит к образованию и дальнейшему развитию трещины с последующим усталостным разрушением образца.

Для того чтобы оценить влияние концентрации напряжений на снижение сопротивления усталости образца с учетом чувствительности материала к концентрации напряжений, вводят понятие *эффективного коэффициента концентрации*, который представляет собой отношение предела выносливости стандартного образца без концентратора напряжений к пределу выносливости образца с концентратором напряжений заданного типа:

$$K_{\sigma} = \sigma_{-1} / \sigma_{-1k} \geq 1 \quad (\text{или } K_{\tau} = \tau_{-1} / \tau_{-1k} \geq 1).$$

Влияние абсолютных размеров поперечного сечения. С увеличением размеров поперечных сечений образцов происходит уменьшение предела выносливости. Это влияние учитывается *коэффициентом влияния абсолютных размеров поперечного сечения* (ранее этот коэффициент назывался *масштабным фактором*). Упомянутый коэффициент равен отношению предела выносливости гладких образцов диаметром d к пределу выносливости гладкого стандартного образца диаметром, равным 7,5 мм:

$$K_d = \sigma_{-1d} / \sigma_{-1} \leq 1 \quad (\text{или } K_d = \tau_{-1d} / \tau_{-1} \leq 1).$$

Шероховатость поверхности. Обработка поверхности детали оказывает существенное влияние на предел выносливости. Это связано с тем, что более грубая обработка поверхности детали создает дополнительные места для концентраторов напряжений и, следовательно, приводит к возникновению дополнительных условий для появления микротрещин.

Отношение предела выносливости образца с *данной* шероховатостью поверхности к пределу выносливости образца со стандартной обработкой поверхности, соответствующей ГОСТ 2789–73, называется *коэффициентом влияния шероховатости поверхности*:

$$K_F = \sigma_{-1n} / \sigma_{-1} \leq 1 \quad (\text{или } K_F = \tau_{-1n} / \tau_{-1} \leq 1).$$

Значение этого коэффициента определяется по таблицам или графикам, которые приводятся в справочниках по сопротивлению материалов или в другой научной литературе.

14.10. По какой формуле вычисляется предел выносливости детали при симметричном цикле?

Совместное влияние перечисленных в вопросе 14.9 трех факторов учитывается общим коэффициентом снижения предела выносливости при симметричном цикле:

$$K = K_\sigma / K_d K_F \geq 1 \quad (\text{или } K = K_\tau / K_d K_F \geq 1).$$

Поэтому предел выносливости *детали* при симметричном цикле будет равен:

$$\sigma_{-1(\text{дет})} = \sigma_{-1} K_d K_F / K_\sigma \quad (\text{или } \tau_{-1(\text{дет})} = K_d K_F / K_\tau).$$

14.11. Как выглядит диаграмма предельных амплитуд?

Детали машин в процессе эксплуатации испытывают напряжения, изменяющиеся во времени по самым разнообразным циклам, характеризуемым коэффициентом асимметрии R . И для каждого такого цикла, в принципе, необходимо определить свой предел выносливости материала σ_R .

В диапазоне от симметричного цикла до постоянного цикла (простого растяжения) укладывается бесконечное количество самых разнообразных циклов. Кроме того, опытное определение σ_R для каждого возможного цикла требует большого количества образцов и длительного времени испытаний. Поэтому в лабораторных условиях решить эту задачу практически невозможно.

Вследствие перечисленных причин по *ограниченному* числу опытов строится так называемая *диаграмма предельных амплитуд* (рис. 14.4).

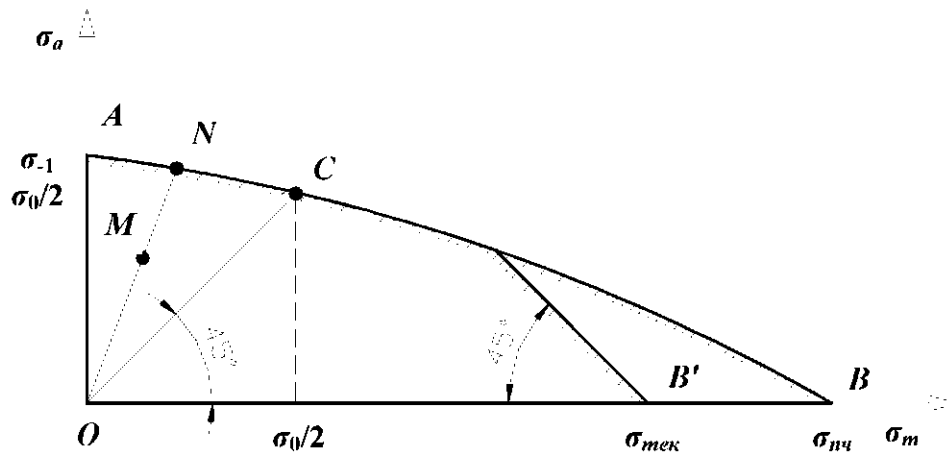


Рис. 14.4. Диаграмма предельных амплитуд

Будем в дальнейшем называть *предельным циклом* такой цикл, у которого максимальное напряжение σ_{\max} равно пределу выносливости цикла σ_R . По оси ординат диаграммы (см. рис. 14.4) откладывают значение *амплитудного* напряжения σ_a , а по оси абсцисс – значение *среднего* напряжения σ_m предельного цикла. Каждая пара напряжений σ_a и σ_m опреде-

ляет соответствующий *предельный цикл*, который изображается на диаграмме *точкой*. Точка *A* соответствует *симметричному предельному циклу*. Ее ордината $-\sigma_a = \sigma_{-1}$, а абсцисса $-\sigma_m = 0$. Точка *B*, имеющая координаты $\sigma_a = 0, \sigma_m = \sigma_m$, характеризует предельный *постоянный цикл* для *хрупкого материала*, а точка *B'* с координатами $\sigma_a = 0, \sigma_m = \sigma_{тек}$ – предельный *постоянный цикл* для *пластичного материала*. Точка *C* отвечает предельному *отнулевому циклу*. Для нее $\sigma_a = \sigma_m$.

Таким образом, кривая *ACB* характеризует *предельные циклы* для хрупких материалов, а кривая *ACB'* – для пластичных. Точки, расположенные ниже этих кривых (внутри диаграммы), представляют собой *безопасные циклы*, то есть циклы, не приводящие к разрушению образца.

14.12. Как производится расчет на усталость?

В расчетах на усталость прочность детали принято оценивать по значению *расчетного* коэффициента запаса *n*, который сравнивается со значением *допускаемого* коэффициента запаса прочности $[n]$, установленного соответствующими нормами. Условие прочности при таком *проверочном* расчете записывается в виде: $n \geq [n]$.

При *симметричном* цикле расчетный коэффициент запаса прочности определяется как отношение *предельного* напряжения к *расчетному*.

При расчете на усталость понятие *предельного напряжения* относится не к материалу, а к конкретной *детали*.

Еще раз напомним, что предел выносливости детали при симметричном цикле существенно отличается от соответствующего *предела выносливости стандартного образца*, который обычно рассматривается как *механическая характеристика материала*.

Таким образом, расчетный коэффициент запаса при *симметричном* цикле определяется по формуле

$$n_\sigma = \sigma_{-1(дет)} / \sigma_{max} = \sigma_{-1} K_d K_F / \sigma_{max} K_\sigma.$$

Формула для коэффициента запаса при кручении аналогична.

При *асимметричном* (несимметричном) цикле расчетный коэффициент запаса прочности равен:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m},$$

где коэффициент $\psi_\sigma = (2\sigma_{-1} - \sigma_0) / \sigma_0$.

Важно отметить, что влияние факторов, снижающих предел выносливости, сказывается только на предельных *амплитудных* напряжениях цикла σ_a и не отражается на предельных *средних* напряжениях σ_m .

Коэффициент запаса *n* для асимметричного цикла может быть определен и непосредственно по диаграмме предельных амплитуд.

Сначала определяется коэффициент запаса не для реальной детали, а для гладкого стандартного образца $n_{\sigma(\sigma)}$. Для этого отметим точку M (см. рис. 14.4) с координатами σ_a и σ_m , характеризующими амплитудное и среднее напряжения *заданного рабочего цикла*. Соединим эту точку прямой линией с началом координат. Продолжим полученный отрезок OM до пересечения с кривой ACB (или ACB'). Полученная таким образом точка N соответствует предельному циклу. Тогда коэффициент запаса n для стандартного образца будет равен: $n_{\sigma(\sigma)} = ON/OM$.

Для оценки прочности детали еще необходимо учесть, что ее предел выносливости зависит от размеров детали, состояния ее поверхности и наличия концентраторов напряжений.

В случае возникновения в опасной точке детали плоского напряженного состояния, например при совместном изгибе и кручении, общий расчетный коэффициент запаса прочности n определяется из формулы

$$1/n^2 = 1/n_\sigma^2 + 1/n_\tau^2,$$

где n_σ – расчетный коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям σ , а n_τ – по касательным напряжениям τ .

15. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

В этой важной заключительной беседе мы рассмотрим основные теоремы механики деформируемого твердого тела, которые эффективно используются при решении ряда задач сопротивления материалов.

15.1. Как формулируется теорема Клапейрона?

Согласно этой теореме, *упругая работа внешней силы при статическом приложении равна половине произведения ее окончательного значения на соответствующее этой силе перемещение*.

Эту теорему в 1852 г. впервые сформулировал французский ученый *Бенуа Поль Эмиль Клапейрон (Clapeyron, 1799 – 1864 гг.)*.

Докажем эту теорему. Определим работу, которую совершает сила P_1 , действующая, например, на балку, изображенную на рис. 15.1, а.

Будем считать, что нагрузка прикладывается к балке *статически, то есть она медленно возрастает от нуля до заданной величины P_1* .

Пусть в *некоторый* момент сила, достигшая значения $P < P_1$, вызвала в месте своего приложения прогиб балки, равный Δ .

Увеличим это значение силы на бесконечно малую величину dP . Такое изменение нагрузки приведет к дополнительному прогибу $d\Delta$. Очевидно, что элементарная дополнительная работа определяется по формуле

$$dA = [P + dP]d\Delta \approx Pd\Delta.$$

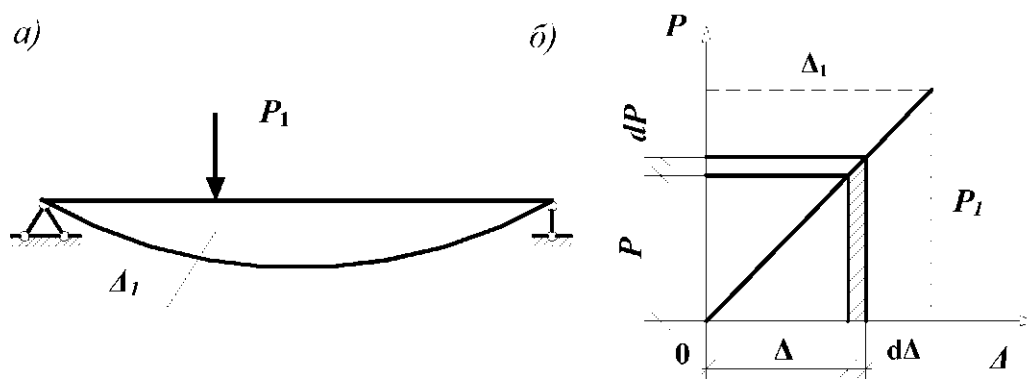


Рис. 15.1. Теорема Клапейрона

Тогда полная работа, совершенная внешней силой, будет равна:

$$A = \int_0^{P_1} P d\Delta. \quad (15.1)$$

Для *линейно* деформируемой системы (график зависимости между прогибом Δ и силой P для такой системы показан на рис. 15.1, б) прогиб балки пропорционален внешней нагрузке, то есть

$$\Delta = \delta P, \quad (15.2)$$

где δ – *перемещение от силы, равной единице* $\bar{P} = 1$. Коэффициент δ часто называют и *податливостью* системы.

Дифференцируя уравнение (15.2), найдем

$$d\Delta = \delta dP. \quad (15.3)$$

Подставляя (15.3) в (15.1) и учитывая, что, согласно (15.2), $\delta P_1 = \Delta_1$, окончательно получим

$$A = \int_0^{P_1} P d\Delta = \int_0^{P_1} \delta P dP = \delta P_1^2 / 2 = P_1 \Delta_1 / 2,$$

что и требовалось доказать.

15.2. А если на упругое твердое тело действует несколько внешних сил?

Представим себе балку, шарнирно опертую по краям (см., например, рис. 15.1) и нагруженную силами P_1, P_2, \dots, P_n . Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ перемещения точек приложения этих сил по направлениям их действия. Тогда, согласно теореме *Клапейрона*:

$$A = P_1 \Delta_1 / 2 + P_2 \Delta_2 / 2 + \dots + P_n \Delta_n / 2.$$

Важно отметить, что, записывая выражение для упругой работы внешних сил, мы принимаем во внимание только *активные* силы и совсем не учитываем силы *реактивные* – реакции опор. Поскольку перемещения на опорах отсутствуют, работа реакций всегда равна *нулю*.

15.3. Какая сила и какое перемещение называются *обобщенными*?

Внешняя нагрузка, действующая на балку, обычно представляет собой *группу сил*. *Упругую работу группы сил* по теореме Клапейрона можно записать в виде:

$$A = P\Delta/2,$$

где множитель P зависит только от сил этой группы и называется *обобщенной силой*, а Δ зависит от перемещений и называется *обобщенным перемещением*.

Таким образом, под *обобщенной силой* будем понимать *любую нагрузку (сосредоточенные силы, моменты, распределенную нагрузку)*, а под *обобщенным перемещением* – тот вид перемещения, на котором обобщенная сила производит работу.

Пусть, например, группа сил состоит из двух равных постоянных сил P , образующих пару. Момент этой пары (рис. 15.2) равен $M = Pa$.

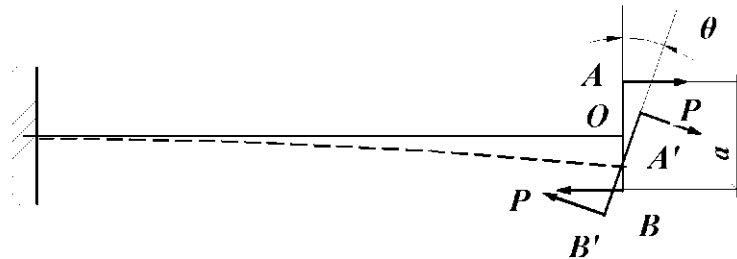


Рис. 15.2. Обобщенная сила и обобщенное перемещение

Допустим, что в результате деформации системы элемент AB повернулся на угол θ . Пути, пройденные точками приложения сил P по направлениям их действия, соответственно равны $AA' = OA \cdot \theta$ и $BB' = OB \cdot \theta$.

Суммарная работа обеих сил:

$$A = P \cdot AA'/2 + P \cdot BB'/2 = Pa\theta/2 = M\theta/2.$$

Следовательно, если обобщенной силой является момент M , то обобщенным перемещением – угол поворота θ .

15.4. Как определяется работа *внутренних сил*?

Если нагруженное тело находится в равновесии, то *внутренние силы (силы упругости) равны по значению внешним силам и противоположны им по направлению*, поскольку они препятствуют развитию деформации. Поэтому *работа внутренних сил U , с учетом их направления по отношению к деформации, всегда является отрицательной*.

При этом, очевидно, что *работа внешних сил равна взятой с обратным знаком работе внутренних сил*, то есть $A = -U$.

Пусть элемент стержня длиной dz испытывает растяжение. Действие отброшенных частей стержня на рассматриваемый элемент заменим про-

дольными «растягивающими» силами N , направленными от сечения. По отношению к элементу они являются как бы *внешними*. Тогда «вызываемое» ими удлинение элемента равно:

$$\Delta dz = Ndz/EF.$$

Действие рассматриваемого элемента на отброшенные нами части стержня представляет собой для рассматриваемого элемента как бы *внутренние* усилия. Элементарная работа именно этих, постепенно увеличивающихся, *внутренних продольных сил*, противодействующих развитию удлинения, согласно теореме Клапейрона, равна:

$$dU_N = -\frac{1}{2}N\Delta dz = -\frac{1}{2}N(Ndz/EF).$$

Теперь вычислим *элементарную работу внутренних перерезывающих сил* Q_y при *чистом* сдвиге. Напомним, что в этом случае считается, что касательные напряжения *равномерно* распределены по всему сечению и определяются по формуле

$$\tau_{xy} = Q_y/F.$$

Абсолютный сдвиг dy правого сечения элемента длиной dz по отношению к левому сечению, с учетом закона Гука, равен:

$$dy = \gamma dz = \tau_{xy} dz/G = Q_y dz/GF,$$

тогда

$$dU_{Q_y} = -\frac{1}{2}Q_y dy = -\frac{1}{2}Q_y(Q_y dz/GF).$$

При *поперечном изгибе* касательные напряжения распределены по сечению *неравномерно*. В этом случае выражение для *элементарной работы внутренних перерезывающих сил* может быть представлено в виде:

$$dU_{Q_y} = -\frac{1}{2}kQ_y dy = -\frac{1}{2}kQ_y(Q_y dz/GF),$$

где k – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения стержня. Например, для прямоугольного поперечного сечения $k = 1,2$.

Определим теперь *элементарную работу внутренних усилий при кручении*. Поворот правого сечения элемента длиной dz по отношению к левому сечению, происходящий под действием *внешних* по отношению к нему крутящих моментов M_z , согласно закону Гука, равен:

$$d\varphi = M_z dz/GI_\rho.$$

Тогда *элементарная работа внутренних крутящих моментов* на этом же угле поворота определяется по формуле

$$dU_{M_z} = -\frac{1}{2}M_z d\varphi = -\frac{1}{2}M_z(M_z dz/GI_\rho).$$

Пусть теперь элемент стержня длиной dz испытывает *чистый изгиб*. И пусть его правое поперечное сечение повернется на угол $d\theta$ по отноше-

нию к левому сечению. Значение этого угла поворота мы определили ранее (см. беседу 7). Оно равно:

$$d\theta = M_x dz / EI_x.$$

Тогда *внутренние* изгибающие моменты совершат на этом угле поворота следующую *элементарную* работу:

$$dU_{M_x} = -\frac{1}{2} M_x d\theta = -\frac{1}{2} M_x (M_x dz / EI_x).$$

При одновременном *растяжении, кручении и прямом поперечном изгибе* стержня (с учетом того, что работа каждого из внутренних усилий на перемещениях, вызываемых остальными усилиями, равна нулю) получим следующее выражение для *элементарной работы внутренних сил*:

$$dU = -\frac{1}{2} N \left(\frac{N}{EF} dz \right) - \frac{1}{2} M_z \left(\frac{M_z}{GI_\rho} dz \right) - \frac{1}{2} k Q_y \left(\frac{Q_y}{GF} dz \right) - \frac{1}{2} M_x \left(\frac{M_x}{EI_x} dz \right).$$

Интегрируя последнее выражение по всей длине стержня, окончательно будем иметь:

$$U = -\frac{1}{2} \int_0^l N \left(\frac{N}{EF} dz \right) - \frac{1}{2} \int_0^l M_z \left(\frac{M_z}{GI_\rho} dz \right) - \frac{1}{2} \int_0^l k Q_y \left(\frac{Q_y}{GF} dz \right) - \frac{1}{2} \int_0^l M_x \left(\frac{M_x}{EI_x} dz \right). \quad (15.4)$$

15.5. Как формулируется принцип возможных перемещений?

Этот принцип в 1788 г. был сформулирован для *абсолютно* твердых тел французским ученым *Жозефом Луи Лагранжем* (Lagrange, 1736 – 1813 гг.) и впервые применен к *деформируемым* телам *Пуассоном* в 1833 г.

Принцип возможных перемещений формулируется следующим образом: *если система находится в равновесии под действием приложенной к ней нагрузки, то сумма работ внешних и внутренних сил на всяком бесконечно малом возможном перемещении точек системы, допускаемых связями, равна нулю*:

$$A_\delta + U_\delta = 0,$$

где A_δ – возможная работа внешних, а U_δ – возможная работа внутренних сил.

Заметим, что *в процессе совершения системой возможного перемещения значения и направления внешних и внутренних сил считаются неизменными, то есть такими же, как и в исходном состоянии*.

Поэтому *возможная работа внешних и внутренних сил определяется простым произведением соответствующих сил и перемещений*, то есть в отличие от выражения для *упругой* работы в выражении для *возможной* работы коэффициента 1/2 нет.

Учитывая принятое в сопротивлении материалов допущение о малости деформаций, а также линейную зависимость деформаций от нагрузок, *в качестве возможных перемещений можно принимать и конечные упру-*

гие перемещения, вызванные любым видом внешней нагрузки и происходящие без нарушения связей.

15.6. Как формулируется теорема Бетти (теорема о взаимности работ)?

Эта теорема, доказанная в 1872 г. итальянским ученым Энрико Бетти (Betti, 1823 – 1892 гг.), формулируется следующим образом: *возможная работа сил первого состояния на соответствующих перемещениях, вызванных силами второго состояния, равна возможной работе сил второго состояния на соответствующих перемещениях, вызванных силами первого состояния.* Приведем доказательство этой теоремы.

Наметим на балке две точки 1 и 2 (рис. 15.3, а). Приложим статически в точке 1 силу P_1 . Она вызовет в этой точке прогиб Δ_{11} , а в точке 2 – Δ_{21} . Для обозначения перемещений мы используем два индекса. Первый индекс означает место перемещения (где), а второй – причину, вызывающую это перемещение (от какого усилия).

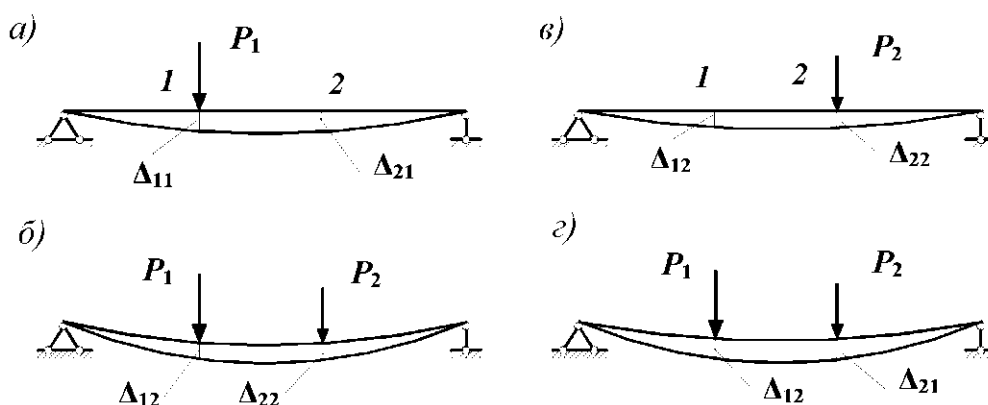


Рис. 15.3. Теорема Бетти

Так, например, Δ_{21} означает прогиб балки в точке 2 от нагрузки P_1 .

После того, как закончен рост силы P_1 , приложим в точке 2 к деформированному состоянию балки статическую силу P_2 (15.3, б). Балка получит дополнительные прогибы: Δ_{12} в точке 1 и Δ_{22} в точке 2.

Составим выражение для работы, которую совершают эти силы на соответствующих им перемещениях:

$$A_1 = P_1 \Delta_{11} / 2 + P_1 \Delta_{12} + P_2 \Delta_{21} / 2.$$

Здесь первое и третье слагаемые представляют собой упругие работы сил P_1 и P_2 . Согласно теореме Клапейрона, они имеют коэффициент $1/2$. У второго слагаемого этого коэффициента нет, поскольку сила P_1 своего значения не изменяет и совершает возможную работу на перемещении Δ_{12} , вызванном другой силой P_2 .

Изменим теперь порядок нагружения балки. Сначала прикладываем к балке силу P_2 , а затем P_1 (рис. 15.3, в, з).

Тогда

$$A_2 = P_2 \Delta_{22} / 2 + P_2 \Delta_{21} + P_1 \Delta_{11} / 2.$$

Очевидно, что $A_1 = A_2$. Из этого равенства и следует теорема *Бетти*:

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}.$$

Заметим, что теорема *Бетти* справедлива как для случая *внешних*, так и для случая *внутренних* сил.

15.7. А как формулируется теорема о взаимности перемещений?

Пусть $\bar{P}_1 = 1$ и $\bar{P}_2 = 1$. Тогда, с учетом принятого нами обозначения перемещения от единичной силы, будем иметь:

$$\delta_{12} = \delta_{21}.$$

Это выражение носит название теоремы о взаимности перемещений. Она была доказана в 1864 г. Максвеллом и формулируется следующим образом:

Перемещение точки приложения первой единичной силы, вызванное действием второй единичной силы, равно перемещению точки приложения второй единичной силы, вызванному действием первой единичной силы (рис. 15.4).

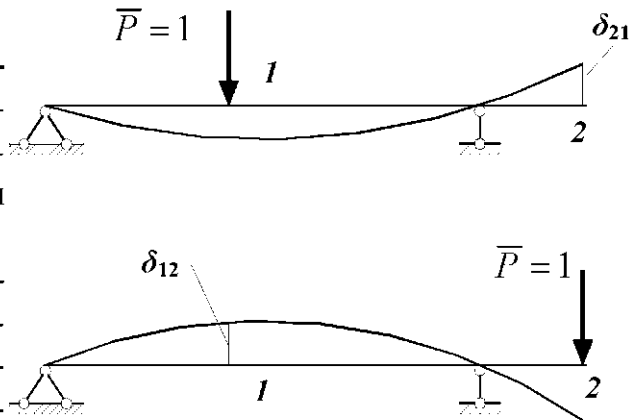


Рис. 15.4. Теорема о взаимности перемещений

15.8. Как вычисляется возможная работа внутренних сил?

Пусть мы имеем два состояния. Первому из них отвечают внутренние силы $N_1, Q_{y1}, M_{z1}, M_{x1}$, а второму — $N_2, Q_{y2}, M_{z2}, M_{x2}$. Тогда, используя формулу (15.4) и устраняя в ней коэффициент $1/2$, получим следующее выражение для работы внутренних сил первого состояния на перемещениях, вызываемых силами второго состояния, и наоборот:

$$\begin{aligned} U_{12} = U_{21} &= -\int_0^l N_1 \left(\frac{N_2}{EF} dz \right) - \int_0^l M_{z1} \left(\frac{M_{z2}}{GI_\rho} dz \right) - \int_0^l k Q_{y1} \left(\frac{Q_{y2}}{GF} dz \right) - \int_0^l M_{x1} \left(\frac{M_{x2}}{EI_x} dz \right) = \\ &= -\int_0^l N_2 \left(\frac{N_1}{EF} dz \right) - \int_0^l M_{z2} \left(\frac{M_{z1}}{GI_\rho} dz \right) - \int_0^l k Q_{y2} \left(\frac{Q_{y1}}{GF} dz \right) - \int_0^l M_{x2} \left(\frac{M_{x1}}{EI_x} dz \right). \end{aligned}$$

15.9. Как определяются прогибы и углы поворота в балке методом Мора?

Рассмотрим балку, изображенную на рис. 15.5, а.

Эту балку будем называть *заданной*. Обозначим M_{xp} и Q_{yp} , соответственно, изгибающий момент и перерезывающую силу, возникающие в *заданной* балке от действующей на нее группы нагрузок P . Пусть требуется определить прогиб балки Δ_{KP} в точке K .

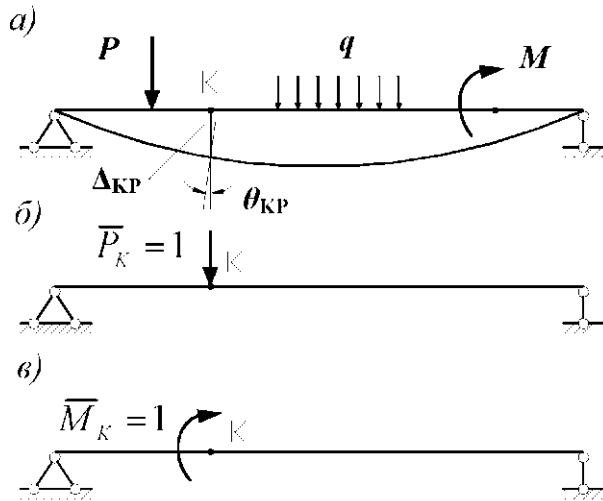


Рис. 15.5. Определение перемещений балки методом Мора

Введем в рассмотрение *вспомогательную* балку, представляющую собой ту же самую балку. Нагрузим ее только одной силой $\bar{P}_K = 1$ (рис. 15.5, б). Эту единичную силу мы приложим в точке K , то есть в той самой точке, где мы и собираемся определить прогиб.

Внутренние усилия, возникающие во вспомогательной балке, обозначим \bar{M}_x и \bar{Q}_y .

Воспользуемся теперь *теоремой о взаимности работ*, согласно которой работа *внешних* сил, приложенных к вспомогательной балке на соответствующих перемещениях *заданной* балки, равна *взятой с обратным знаком* работе *внутренних* сил *заданной* балки на соответствующих перемещениях *вспомогательной* балки.

Тогда

$$\bar{P}_K \Delta_{KP} = \int_0^l M_{xp} \left(\frac{\bar{M}_x}{EI_x} dz \right) + \int_0^l k Q_{yp} \left(\frac{\bar{Q}_y}{GF} dz \right). \quad (15.5)$$

При определении перемещений в балке, как правило, можно пренебрегать влиянием перерезывающей силы, то есть *второе* слагаемое в (15.5) можно отбросить. Тогда, учитывая, что $\bar{P}_K = 1$, окончательно получим:

$$\Delta_{KP} = \int_0^l M_{xp} \left(\frac{\bar{M}_x}{EI_x} dz \right).$$

Эту формулу в 1874 г. получил *Мора*. Определение перемещений по этой формуле часто называют определением перемещений *методом Мора*, а саму формулу – *интегралом Мора*.

Необходимо иметь в виду, что входящие в интеграл *Мора* изгибающие моменты берутся в произвольном поперечном сечении и поэтому представляют собой аналитические функции от текущей координаты z .

Заметим, что если мы хотим в некоторой точке K определить *угол поворота* поперечного сечения θ_{KP} , то нам необходимо к вспомогательной балке приложить не единичную силу, а *единичный момент* $\bar{M}_K = 1$ (рис. 15.5, в).

15.10. Как практически определяются перемещения (прогиб и угол поворота поперечного сечения) балки методом Мора?

Приведем порядок вычисления перемещений балки методом Мора:

1) к вспомогательной балке в той точке, где требуется определить перемещение, прикладываем единичное усилие (при определении прогиба прикладываем единичную силу $\bar{P}_K = 1$, а при определении угла поворота – единичный момент $\bar{M}_K = 1$);

2) для *каждого* участка балки составляем выражения для изгибающих моментов заданной M_{xP} и вспомогательной \bar{M}_x балок;

3) вычисляем интеграл Мора для всей балки по соответствующим участкам;

4) если вычисленное перемещение имеет *положительный* знак, то это означает, что его направление совпадает с направлением единичного усилия (*отрицательный* знак указывает на то, что действительное направление искомого перемещения противоположно направлению единичного усилия).

Пусть, например, для шарнирно опертой балки постоянной изгибной жесткости $EI_x = const$, длиной l , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 15.6, а), требуется определить прогиб посередине пролета f и угол поворота на левой опоре θ_A .

Начнем с определения *прогиба*.

В том месте, где нам нужно определить прогиб, к вспомогательной балке прикладываем единичную силу $\bar{P}_K = 1$ (рис. 15.6, б).

Записываем выражения для изгибающих моментов для каждого из *двух* участков ($0 \leq z_1 \leq l/2$; $0 \leq z_2 \leq l/2$) заданной и вспомогательной балок:

$$M_{xP}(z_1) = +\frac{ql}{2}z_1 - qz_1\frac{z_1}{2} = \frac{qz_1}{2}(l - z_1); \quad M_{xP}(z_2) = +\frac{ql}{2}z_2 - qz_2\frac{z_2}{2} = \frac{qz_2}{2}(l - z_2);$$

$$\bar{M}_x(z_1) = +\frac{1}{2}z_1; \quad \bar{M}_x(z_2) = +\frac{1}{2}z_2.$$

Вычисляем интеграл Мора. Учитывая симметрию балки, получим:

$$f = \Delta_{KP} = 2 \frac{1}{EI_x} \int_0^{l/2} z_1 \frac{qz_1}{2} (l - z_1) dz = \frac{2}{EI_x} \frac{q}{4} \left(\frac{z_1^3}{3} l - \frac{z_1^4}{4} \right) \Bigg|_0^{l/2} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_x}.$$

Переходим к определению угла поворота поперечного сечения балки на левой опоре.

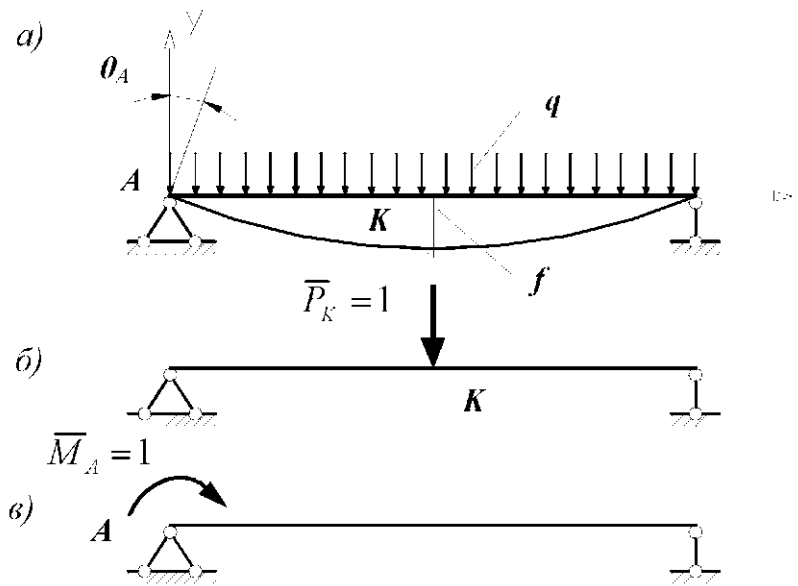


Рис. 15.6. Определение прогиба и угла поворота методом Мора

Нагружаем *вспомогательную* балку единичным моментом $\bar{M}_A = 1$, прикладывая его в том месте, где мы ищем угол поворота (рис. 15.6, в).

Записываем выражения для изгибающих моментов в заданной и вспомогательной балках только для одного участка ($0 \leq z \leq l$):

$$M_{x^p}(z) = +\frac{ql}{2}z - qz\frac{z}{2} = \frac{qz}{2}(l - z); \quad \bar{M}_x(z) = 1 - \frac{1}{l}z.$$

Тогда интеграл Мора будет иметь вид:

$$\theta_A = \Delta_{AP} = \frac{1}{EI_x} \int_0^l \left(1 - \frac{1}{l}z\right) \frac{qz}{2}(l - z) dz = \frac{1}{EI_x} \frac{q}{2l} \left(l^2 \frac{z^2}{2} - 2l \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^l = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI_x}.$$

Полученный нами положительный знак в выражении для угла поворота поперечного сечения балки указывает на то, что поворот сечения происходит по направлению единичного момента $\bar{M}_A = 1$.

15.11. Чему равна потенциальная энергия деформации стержня?

Согласно закону сохранения энергии, работа *внешних* сил не исчезает, а переходит в потенциальную энергию V , накапливаемую в упругом теле при его деформировании. Следовательно, *потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил при нагружении тела (или работе внутренних сил, совершаемой ими в процессе разгружения)*.

Обращаем внимание Читателя на присутствие в этом предложении слова «*численно*». Его необходимо добавлять потому, что *потенциальная энергия и работа являются разными понятиями* и что они не могут быть равны друг другу.

Таким образом, потенциальная энергия стержня, испытывающего, например, растяжение, кручение и прямой поперечный изгиб, равна:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EI'} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_z^2}{GI_\rho} dz + \frac{1}{2} \int_0^l k \frac{Q_y^2}{GI'} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{EI_x} dz .$$

Как видно из этой формулы, *потенциальная энергия деформации* всегда положительна, поскольку она является *квадратичной функцией* обобщенных сил (или обобщенных перемещений, так как последние линейно связаны с обобщенными силами).

Отсюда следует, что *потенциальная энергия, накопленная в результате действия группы сил, не равна сумме потенциальных энергий, накопленных от действия каждой нагрузки в отдельности.*

Следовательно, *принцип независимости действия сил при вычислении потенциальной энергии деформации не применим.*

15.12. Как формулируется теорема Кастильяно?

Пусть на упругое тело в точке K действует одна внешняя сила P . Если нагрузка получит приращение dP , то потенциальная энергия деформации увеличится на величину $dV = dP \Delta_{KP}$ и станет равной

$$V + dV = V + \frac{dV}{dP} dP = V + dP \Delta_{KP} .$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_{KP} = \frac{dV}{dP} ,$$

то есть производная от потенциальной энергии деформации по внешней силе дает перемещение, соответствующее этой силе.

Эта теорема в 1875 г. была доказана итальянским ученым *Карло Альберто Кастильяно* (Castigliano, 1847 – 1884 гг.).

Если к телу приложено несколько нагрузок, теорема *Кастильяно* формулируется следующим образом: *перемещение точки приложения обобщенной силы по направлению ее действия равно частной производной от потенциальной энергии деформации по этой силе, то есть*

$$\Delta_{KP} = \frac{\partial V}{\partial P_K} .$$

Для определения перемещения (линейного или углового) в точке, где по условию задачи внешнее усилие (сила или момент) отсутствует, необходимо приложить в этом месте *фиктивную обобщенную силу*. Далее следует написать выражение для потенциальной энергии деформации от всех сил, включая и фиктивную, и взять от этого выражения производную по фиктивной силе. В полученном выражении для обобщенного перемещения фиктивную нагрузку необходимо принять равной нулю.

Продемонстрируем применение теоремы *Кастильяно* на следующем примере. Определим *угол поворота* поперечного сечения в точке K жестко заземленной балки, нагруженной распределенной нагрузкой q (рис. 15.7, а).

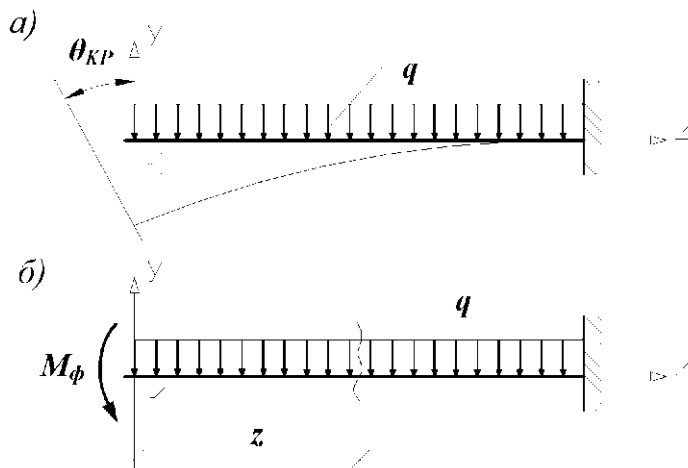


Рис. 15.7. Определение перемещений по теореме Кастильяно

Приложим к заданной балке на ее свободном конце в точке К фиктивный момент M_ϕ (рис. 15.7, б).

Изгибающий момент в произвольном сечении балки равен:

$$M_x(z) = -qz \frac{z}{2} - M_\phi.$$

Потенциальная энергия деформации при изгибе балки (при пренебрежении влиянием перерезывающей силы) вычисляется по формуле

$$V_u = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{EI_x} dz = \frac{1}{2EI_x} \int_0^l \left(-\frac{qz^2}{2} - M_\phi \right)^2 dz = \frac{1}{2EI_x} \left(\frac{q^2 l^5}{20} + qM_\phi \frac{l^3}{3} + M_\phi^2 \right).$$

Угол поворота равен:

$$\theta_{KP} = \Delta_{KP} = \frac{\partial V_u}{\partial M_\phi} = \frac{1}{2EI_x} \left(\frac{ql^3}{3} + 2M_\phi \right).$$

Принимая в полученном выражении $M_\phi = 0$, окончательно найдем:

$$\theta_K = ql^3 / 6EI_x.$$

Теорему Кастильяно можно использовать и для раскрытия статической неопределимости. Рассмотрим, например, один раз статически неопределимую балку (рис. 15.8, а).

Для определения опорных реакций R_A и R_B , а также момента в жесткой заделке M_A мы имеем только два уравнения статики: $\sum Y = 0$ и $\sum M_A = 0$. Мысленно удалим лишнюю связь – правую опору и вместо нее введем в рассмотрение неизвестную опорную реакцию R_B , которую мы будем рассматривать как активную силу (рис. 15.8, б). Однако перемещение полученной таким образом статически определимой балки в точке приложения силы R_B должно быть равно нулю, поэтому $\Delta_{BP} = 0$.

Составим выражение для изгибающего момента в произвольном сечении статически определимой балки:

$$M_x(z) = R_B z - qz \frac{z}{2}.$$

Потенциальная энергия деформации балки будет равна:

$$V_u = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{EI_x} dz = \frac{1}{2EI_x} \int_0^l \left(R_B z - \frac{qz^2}{2} \right)^2 dz = \frac{1}{2EI_x} \left(R_B^2 \frac{l^3}{3} - R_B q \frac{l^4}{4} + \frac{q^2 l^5}{5} \right).$$

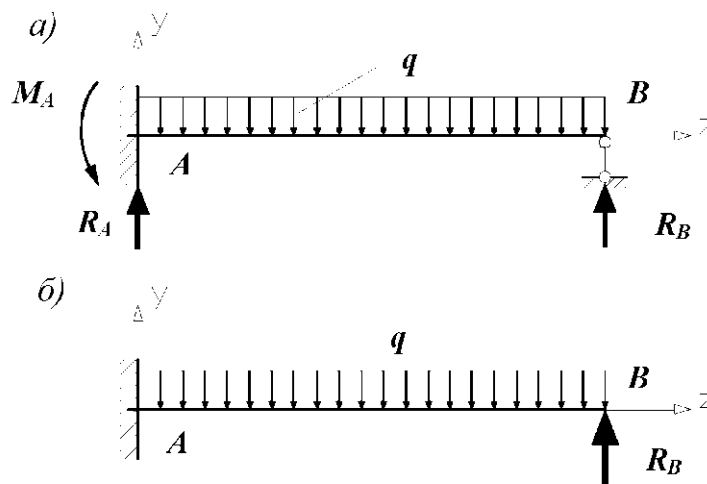


Рис. 15.8. Раскрытие статической неопределенности по теореме Кастильяно

Так как перемещение в месте приложения неизвестной силы R_B равно нулю, то

$$\frac{\partial V_u}{\partial R_B} = 0,$$

тогда

$$2R_B \frac{l^3}{3} - q \frac{l^4}{4} = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим реакцию правой опоры:

$$R_B = 3ql/8.$$

Теперь, составляя уравнения статики для исходной балки (см. рис. 15.8, а), мы можем легко определить две остальные опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad +M_A - ql^2/2 + R_B l = 0; \quad \underline{M_A = ql^2/2 - R_B l = ql^2/8};$$

$$\sum Y = 0; \quad R_A - ql + R_B = 0; \quad \underline{R_A = -R_B + ql = 5ql/8}.$$

Эти результаты полностью совпадают с результатами, полученными нами другим способом для аналогичной статически неопределимой балки в беседе 7.

15.13. Как формулируется теорема Лагранжа?

Частная производная от потенциальной энергии деформации по любому обобщенному перемещению равна обобщенной силе, действующей по направлению этого перемещения, то есть

$$P_K = \frac{\partial V}{\partial \Delta_{KP}}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

*Недостаточно иметь ясные
и верные мысли.
Чтобы сообщить их другим, надо
еще уметь выразить их ясно.
Клод Адриан Гельвеций*

Итак, мы завершаем беседы о *прочности, жесткости и устойчивости* стержней. Автор надеется, что теперь уважаемый Читатель сможет сознательно ориентироваться в многочисленных учебниках и в справочниках по *сопротивлению материалов*, а также подготовлен к изучению более серьезной литературы по *механике деформируемого твердого тела*.

В заключительной части настоящего пособия мы позволим себе дать Читателю несколько практических советов по выполнению прочностных расчетов.

Прежде чем воспользоваться той или иной формулой для определения напряженного и деформированного состояния конструкции, необходимо убедиться в том, что она применима к Вашему конкретному случаю и что Вы понимаете физический смысл всех величин, входящих в эту формулу.

Подставляя в расчетные формулы соответствующие нагрузки и размеры конструкции, следует предварительно убедиться, что они выражены в одной и той же системе единиц и, в связи с этим, не напутаны порядки чисел.

Самое серьезное внимание должно быть обращено на математические вычисления. В этом вопросе желательно руководствоваться следующим:

1) Не следует гнаться за чрезмерной точностью. Надо придерживаться основных правил приближенных вычислений. За редким исключением точность расчетов не должна превышать *трех значащих цифр*, поскольку решение задачи не может быть точнее тех приближенных предпосылок, которые были заложены в расчетные формулы.

2) Необходимо помнить о стандартизации ряда деталей и их размеров и поэтому не оставлять результат расчета в несогласованном со стандартами виде.

3) Полученный в ходе расчета результат необходимо проверить хотя бы приблизительно, пытаясь определить, какие напряжения и деформации в конструкции должны возникнуть. Это развивает критическое мышление, приучает к здоровой технической оценке числовых результатов. Здесь уместно привести следующий фрагмент поучительного рассказа академика *А. Н. Крылова* о замечательном русском кораблестроителе *П. И. Титове*, самоучке без диплома. «... Давай считать какую-нибудь стрелу или шлюпбалку», обращался к академику (тогда еще мичману) *Титов*. По окончании расчета он открывал ящик своего стола, вынимал эскиз и говорил:

«Да, мичман, твои формулы верные: видишь, я размеры назначил на глаз сходятся».

4) Если по Вашим расчетам будет изготовлена реальная конструкция, то Вы обязаны все свои расчеты проверять по несколько раз. Именно самонадеянность расчетчика, как показывает практика, зачастую приводит к авариям, в то время как тревога за конструкцию позволяет ее предотвратить.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 **Бернштейн, С. А.** Очерки по истории строительной механики / С. А. Бернштейн. – М. : Госстройиздат, 1957. – 236 с.
- 2 **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989. – 622 с.
- 3 **Гордон, Дж.** Конструкции, или почему не ломаются вещи / Дж. Гордон. – М. : Мир, 1980. – 391 с.
- 4 **Ицкович, Г. М.** Методика преподавания сопротивления материалов в техникумах / Г. М. Ицкович. – М. : Высш. шк., 1990. – 224 с.
- 5 Сопротивление материалов / под ред. Г. С. Писаренко. – Киев: Вища школа, 1986. – 775 с.
- 6 Сопротивление материалов / под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Высш. шк., 1975. – 480 с.
- 7 **Феодосьев, В. И.** Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986 – 512 с.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Бельтрами Э. 101
Бернулли Я. 20, 25, 27, 49, 76, 88, 93
Бетти Э. 138, 139
Бресс Ж. 73, 108
- Велер А. 128
- Галилей Г. 5, 63, 66
Гельвеций К. 146
Гиллель 4
Губер М. 101
Гук Р. 6, 11, 22, 23, 27, 37, 50, 51, 76, 78, 79, 93, 95, 100, 116, 122, 136
Гюйгенс Х. 42
- Д'Аламбер Ж. 120
- Журавский Д.И. 72, 83, 84, 85, 86, 87
- Карно Л. 121
Кастильяно К. 143, 144, 145
Клапейрон Б. 123, 133, 134, 135, 136, 138
Коши О. 15
Крылов А. Н. 146
Кулон Ш. 49, 101
- Лагранж Ж. 137, 145
Лейбниц Г. 66
Людерс В. 26, 100
- Максвелл Дж. 101, 139
Мариотт Э. 22, 99
Мизес Р. 101
- Монтень М. 4
Мор О. 101, 102, 140, 141, 142
Морен А. 66
- Навье Л. 63, 78
НЬЮТОН И. 120
- Паскаль Б. 15
Понселе Ж. 125
Пуансо Л. 9, 13
Пуассон С. 21, 22, 38, 79, 100, 137
- Сегнер Я. 42
Сен-Венан Б. 20, 21, 86, 99, 101, 102
- Титов П. И. 146
Треска А. 101
- Уайльд О. 4
- Хокинг С. 4
- Чернов Д. К. 26
- Шведлер И. 71, 72, 83
Штейнер Я. 43
- Эйлер Л. 42, 43, 114, 115, 116, 117, 118
- Юнг Т. 22, 23, 37, 106, 114, 116, 117, 122
- Ясинский Ф. С. 116, 117

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Анизотропный материал 10
Амплитудное напряжение цикла 126, 131–133
База испытаний 129
Балка 17, 62
– жестко заземленная 68, 70, 88, 114, 115, 143
– консольная 68, 102
– простая 68
– шарнирно опертая 68, 81, 114, 134, 141
– статически неопределимая 70, 92, 95, 96, 144, 145
Брус 17
Вал 17, 48–54, 109–112, 125, 126
Велера кривая 128
Вес собственный 9, 34
Взаимность перемещений 139
– работ 138
Виды циклов 126
Внецентренное сжатие 106, 107
Внутренние силовые факторы 12, 64
Возможная работа 137, 139
Выносливость 125
Геометрические характеристики 39
Гибкость стержня 116, 117
Гипотеза Бернулли 49, 76
Гипотеза плоских сечений 20, 49, 76
Гипотеза прочности 96
– – первая 99
– – вторая 99
– – третья 100
– – четвертая 101
– – Мора 101
Главные напряжения 59
– оси 13, 42
– площадки 59
– центральные моменты инерции 44
– – оси 42, 44–47, 59, 63, 89, 102, 104, 107
Двутавр 78, 80, 84, 85, 91, 119
Депланация 49
Деформация остаточная 7, 28
– пластическая 7, 8, 30
– поперечная 21
– продольная 21, 22
– угловая 39
– упругая 6, 7, 22
Диаграмма предельных амплитуд 131, 132
– растяжения 25–29
– сдвига 38
– сжатия 29
Динамическая нагрузка 9, 119, 121, 122, 123
Дифференциальное уравнение изогнутой балки 93
Допускаемое напряжение 30, 31, 35, 38, 52, 53, 89, 96, 98, 118
Единичная сила 139–141
Единичный момент 140–142
Жесткость 5, 8, 10
– при изгибе 92
– при кручении 52
– при растяжении (сжатии) 23, 39
– при сдвиге 37, 52
Заданная система 33
Задача статически неопределимая 32–34
Закон Гука 11, 22, 23, 37, 50, 51, 76, 78, 79, 93, 116
– – обобщенный 79
– парности касательных напряжений 57, 61, 62, 81, 86, 87
Изгиб 17, 39, 40, 62
– косой 63, 64, 102
– плоский 64
– прямой 62, 63
– с кручением 109, 110
– чистый 66, 76, 77, 81, 88, 91, 125, 127, 136
Изотропность 10, 21, 37
Интеграл Мора 140–142
Интенсивность распределенной нагрузки 9, 67
Испытание на растяжение 25
– – сжатие 29
– – усталость 127

- Касательные напряжения 15, 16, 55, 57–62, 100
- – при изгибе 81–89
 - – – с кручением 111
 - – – косом изгибе 105
 - – – кручении 50–53
 - – – сдвиге 37, 49
- Консоль 68
- Концентрация напряжений 129, 130
- Коэффициент асимметрии цикла 126
- динамичности 121, 123, 124
 - запаса прочности 30, 31, 97, 132, 133
 - приведения длины 114
 - Пуассона 21, 22, 38, 79, 100
- Кривая Велера 128
- Кривизна оси 78, 92, 95
- Критическая нагрузка 8, 47, 113, 115–118
- Критическое напряжение 117, 118
- Кручение 48
- Линии Людерса–Чернова 26
- Масштабный фактор 130
- Материал анизотропный 10
- изотропный 10, 21, 37
 - однородный 10
 - пластичный 28
 - сплошной 10
 - упругий 10
 - хрупкий 28–30, 38, 53, 97, 99, 100, 102, 112, 117, 132
- Метод Мора 140–142
- сечений 12
- Модуль Юнга 22, 23, 114, 117, 122
- сдвига 37, 52
- Момент изгибающий 14, 65, 66, 70–72, 74, 78, 88, 95, 111, 140, 144
- инерции 40–46
 - – осевой 41, 43–46
 - – полярный 41, 51, 52
 - – центробежный 41–44
 - крутящий 14, 48, 51, 53, 106, 111, 136
 - сопротивления при кручении 52, 53
 - сопротивления при изгибе 80, 89–91, 104
- Нагрузка активная 9, 12, 14, 19, 33, 66, 68, 70, 74, 94, 134
- динамическая 9, 119, 121, 122, 123
 - критическая 8, 47, 113, 115–118
 - повторно-переменная 125
 - предельная 97
 - распределенная 9, 69, 71, 72, 74, 75, 88, 94, 135, 141, 143
 - реактивная 9, 12, 14, 19, 33, 66, 68, 70, 74, 94, 134
 - статическая 9, 119, 122–124, 129, 133
- Напряжение в точке тела на данной площадке 14–16, 54
- амплитудное 126
 - главное 59, 60
 - динамическое 122–124
 - допускаемое 30, 31
 - касательное 15
 - критическое 117, 118
 - местное 130
 - нормальное 15
 - опасное 32, 97
 - полное 15, 25
 - предельное 30, 32, 97, 117
 - расчетное 30, 31
 - среднее 126
 - температурное 34
 - эйлерово 116
 - эквивалентное 98
 - экстремальное 59, 61
- Напряжения при внецентренном сжатии 107
- – изгибе с кручением 110, 111
 - – кручении 50, 52
 - – косом изгибе 102, 105
 - – прямом изгибе 76, 78, 80–83
 - – растяжении (сжатии) 20
 - – сдвиге 37
 - на наклонных площадках 24, 54
- Напряженное состояние в точке тела 8, 10, 39, 54, 55, 62, 122
- – линейное (одноосное) 56
 - – плоское (двухосное) 56, 62, 79, 111, 133
 - – объемное (трехосное) 56

- Нейтральная ось 40, 66
- Нейтральный слой 66
- Нулевая линия 66

- Оболочка 7, 8
- Однородность 10
- Основная система 33
- Ось стержня 7, 8
 - главная 13, 42
 - – центральная 42, 44–47, 59, 63, 89, 102, 104, 107
- Относительное удлинение 21
 - сужение при разрыве 28
 - – при разрыве 28
- Относительный сдвиг 36, 37
 - угол закручивания 50–53

- Парность касательных напряжений 57, 61, 62, 81, 86, 87
- Перемещения обобщенные 135, 143, 145
 - при изгибе 63, 91, 94, 141, 143
 - – косом изгибе 106
- Переносный момент инерции 43
- Пластина 7, 8
- Пластичность 7, 28
- Плоское напряженное состояние 56, 62, 79, 111, 133
- Плоскость главная 63
 - силовая 47, 63
- Площадка главная 59
 - текучести 26
- Податливость 134
- Подбор сечения 32, 89, 118
- Поперечная (перерезывающая) сила 13
- Потенциальная энергия 32, 38, 54, 91, 101, 123, 142–144
- Предел выносливости 125, 128–133
 - пропорциональности 27, 38, 115, 116
 - прочности 27–30, 35, 38, 97, 99, 117
 - текучести 27, 28, 30, 38, 97, 117
- Предельная гибкость 116, 117
 - нагрузка 97
- Предельное напряжение 30, 32, 97, 117
- Предельное состояние 97, 101
- Пределы применимости формулы Эйлера 116
- Приведенная длина 114, 115

- Принцип возможных перемещений 137
 - Д'Аламбера 120
 - начальных размеров 10, 11
 - независимости действия сил 11, 33, 103, 107, 143
 - Сен-Венана 20, 21
- Прогиб 8, 47, 63, 92–96, 120, 133, 134, 138, 140, 141
 - динамический 123, 124
 - при косом изгибе 106
- Продольная сила 9
- Прочность 4, 5, 8

- Работа упругая внешних сил 134–135
 - внутренних сил 135–137
 - возможная 137, 138
- Равновесие безразличное 112, 113
 - неустойчивое 112, 113
 - устойчивое 112, 113
- Радиус инерции 46
 - кривизны 76
- Разрушение материала усталостное 124, 130
 - – пластичного 28
 - – хрупкого 28, 100
- Расчетная схема 7
- Реакции опор (связей) 9, 12, 18, 32, 33, 68–70

- Сдвиг 26, 29, 36–39, 49
 - абсолютный 36, 50
 - относительный 36, 37
- Сечение наклонное 24, 25, 58
 - опасное 17, 24, 31, 52, 53, 111, 112
- Сжатие внецентренное 106, 107
 - всестороннее 99
- Сила внешняя 9
 - внутренняя 6, 12
 - инерции 9, 119
 - критическая 113
 - обобщенная 135, 143, 145
 - объемная 9
 - поперечная (перерезывающая) 13
 - поверхностная 9
 - продольная 9
 - реактивная 12
 - сосредоточенная 9
 - упругости 12
 - эйлера 114

- Сплошная среда 10
Срез 38, 39
Среднее напряжение цикла 126
Сталь 21, 23, 26, 28–30, 34, 35, 38, 116, 117
Статический момент 40, 41, 77, 82, 85
Стержень 7, 8
Стойка 17
Стрела прогиба 92
- Текучесть 26
Теорема Бетти 138, 139
– Клапейрона 123, 133–136, 138
– Кастильяно 143, 144
– Лагранжа 145
Типы опорных закреплений балок 67, 68
- Угол закручивания 48–50, 53
– – относительный 50–52
– поворота поперечного сечения балки при изгибе 76, 92–94, 96, 136, 141–144
– сдвига 36, 37, 50
Удар 122–124
Удлинение 6, 22, 26, 27, 32–34, 39, 59, 136
– абсолютное 21, 23, 25, 26, 34
– относительное 21
– остаточное 28
Упругость 7, 23
Уравнение изогнутой оси балки 93
Усилия внутренние 14, 17
Условие жесткости 8, 32, 53, 54
– прочности 8, 30, 31, 35, 38, 39, 52–54, 89, 90, 99–102, 111, 118, 132
– устойчивости 118
Условия закрепления 94, 114, 115, 117
Усталость 124, 125, 127–129, 132
Устойчивость 5, 8, 10, 47, 112, 116–118
- Факторы, влияющие на выносливость 129–132
Формула Журавского 83–87
– Мора 140–142
– Эйлера 114–118
– Ясинского 117
Формулы Шведлера-Журавского 72, 83
- Характеристики механические 27, 28
– пластичности 28
– цикла 126, 127
Хрупкий материал 28–30, 38, 53, 97, 99, 100, 102, 112, 117, 132
- Центр тяжести поперечного сечения 7, 13, 17, 41–46, 65, 66, 70, 77
Центральные оси 42, 44–47, 59, 63, 89, 102, 104, 107
Центробежный момент инерции 42–44
Цикл напряжений 126
– асимметричный 132
– знакопеременный 127
– знакопостоянный 127
– постоянный 127, 129, 132
– предельный 131–133
– симметричный 127, 129, 131, 132
– отнулевой 127, 129, 132
- Чистый изгиб 66, 76, 77, 81, 88, 91, 125, 127, 136
– сдвиг 37–39, 62, 136
Чугун 23, 28–30
- Шейка (сужение) 26–28
Шарнирно неподвижная опора 67
– подвижная опора 67, 68
- Эксцентриситет приложения нагрузки 109
Энергия потенциальная 32, 38, 54, 91, 101, 123, 142–144
Эпюра моментов изгибающих 70, 72–76, 78, 88, 95, 111, 125
– – крутящих 48, 111
– напряжений касательных 78, 84, 85, 87, 104
– – нормальных 84–86, 109
– сил перерезывающих (поперечных) 70, 72–76
– – продольных 17–20, 34
- Ядро сечения 109