

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ КЛАССИЧЕСКИЙ КУРС В РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Пособие отражает содержание семинарских занятий по курсу «Сопротивление материалов». Цель книги — помочь студентам выработать навыки в решении задач, что сэкономит время при выполнении контрольных заданий.

В пособии на подробно разобранных примерах показаны методы и приемы решения типовых задач по курсу. Рассмотрены задачи по исследованию напряженного и деформированного состояний, по применению теорий прочности. Также приведены расчеты прямого бруса при различных видах деформаций и расчеты простейших соединений элементов конструкций. В издание включены материалы, относящиеся к статически неопределимым стержневым системам и многопролетным неразрезным балкам. Достаточное внимание уделено расчетам тонкостенных сосудов при осесимметричном нагружении, а также расчетам сжатых стержней на устойчивость.

В каждом разделе пособия приведены основные теоретические понятия и формулы, необходимые для осознанного разбора задач и их успешного решения.

Рекомендовано для студентов технических вузов всех форм обучения, изучающих сопротивление материалов.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Напряженное и деформированное состояния	4
2. Критерии прочности	11
3. Растяжение (сжатие) прямых стержней	14
4. Чистый сдвиг	30
5. Расчеты простейших соединений элементов конструкций ..	33
6. Геометрические характеристики плоских сечений	42
7. Кручение круглых стержней (валов)	45
8. Плоский поперечный изгиб	52
9. Сложное сопротивление	70
10. Энергетические методы определения перемещений	83
11. Раскрытие статической неопределимости стержневых систем	101
12. Определение перемещений в статически неопределимых системах	126
13. Многопролетные неразрезные балки на шарнирных опорах	133
14. Осесимметричное нагружение тонкостенных оболочек вращения	141
15. Устойчивость сжатых стержней	147
Литература	154

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов как научная дисциплина: прочность, жесткость, устойчивость; балка (стержень), пластина, оболочка, массивное тело.

Определения деформированного состояния материала; типы деформаций: определение деформации; деформация упругая и пластическая (остаточная); растяжение (сжатие) и линейная деформация; сдвиг (срез) и угловая деформация; кручение; изгиб.

Основные гипотезы: сплошность, однородность и изотропность материала; малость деформаций; идеальная упругость материала; линейная зависимость между деформациями и нагрузками (закон Гука); принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции); плоские сечения.

Внешние силы: поверхностные и объемные (массовые); статические и динамические; циклические (периодические); мгновенное нагружение; удар.

Внутренние силы: метод сечений; нормальные и касательные напряжения в сечениях.

Прочность и жесткость: допускаемые напряжения; условия прочности по нормальным и касательным напряжениям; условия жесткости.

1. НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЯ

Напряженное состояние в точке:

- тензор напряжений в координатах x, y, z и в главных осях 1, 2, 3

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}, \quad T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Bmatrix};$$

- главные напряжения ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) как корни уравнения

$$s^3 - I_{1\sigma}s^2 + I_{2\sigma}s - I_{3\sigma} = 0,$$

где s - главное нормальное напряжение, а $I_{1\sigma}$, $I_{2\sigma}$, $I_{3\sigma}$ - инварианты тензора напряжений

$$I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z ,$$

$$I_{2\sigma} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 ,$$

$$I_{3\sigma} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 ;$$

- главные напряжения и тип напряженного состояния

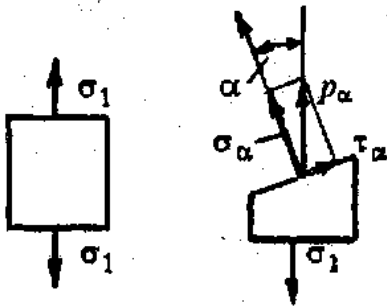
$\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ - линейное (одноосное) ,

$\sigma_1 \neq 0$ ($\sigma_{\text{макс}}$) , $\sigma_2 \neq 0$ ($\sigma_{\text{мин}}$) , $\sigma_3 = 0$ - плоское (двухосное) ,

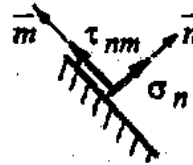
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \neq 0$ - объемное (трехосное) .

Линейное (одноосное) напряженное состояние:

- напряжения в произвольных площадках



Показаны действительные направления напряжений. Их положительные направления:



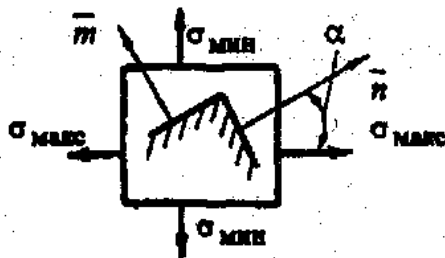
$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha , \quad \tau_\alpha = (\sigma_1 / 2) \sin 2\alpha .$$

- деформации при линейном напряженном состоянии. Закон Гука. Коэффициент Пуассона

$$\varepsilon_1 = \sigma_1 / E , \quad \left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right| = \left| \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \right| = \mu .$$

Плоское (двухосное) напряженное состояние:

- напряжения на двух произвольных взаимно перпендикулярных площадках (прямая задача)



$$\sigma_n = \sigma_{\text{макс}} \cos^2 \alpha + \sigma_{\text{мин}} \sin^2 \alpha ,$$

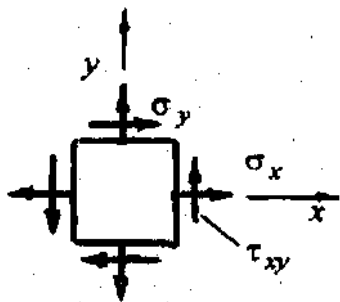
$$\tau_{nm} = - \frac{\sigma_{\text{макс}} - \sigma_{\text{мин}}}{2} \sin 2\alpha$$

(α - угол между $\sigma_{\text{макс}}$ и нормалью \bar{n} , отсчитываемый от $\sigma_{\text{макс}}$) .

Для отыскиваемых напряжений справедливы соотношения

$$\sigma_n + \sigma_m = \sigma_{\text{макс}} + \sigma_{\text{мин}} , \quad \tau_{nm} = -\tau_{mn} ;$$

- определение главных напряжений по напряжениям на произвольных взаимно перпендикулярных площадках (обратная задача)



$$\sigma_{\text{макс, мин}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow 2\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right).$$

Приведенные формулы получены в предположении, что $\sigma_x \geq \sigma_y$, а угол α_0 определяет направление $\sigma_{\text{макс}}$ относительно оси x .

- деформации для плоского напряженного состояния; обобщенный закон Гука в главных осях

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1) \end{cases}$$

Объемное (трехосное) напряженное состояние:

- обобщенный закон Гука в главных осях

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{cases}$$

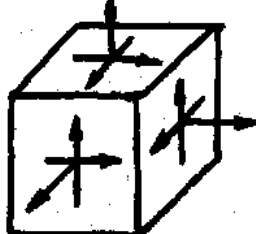
Деформированное состояние в точке:

- тензор деформаций в координатах x, y, z и в главных осях 1, 2, 3

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix};$$

- объемная деформация

$$\varepsilon_V = \vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 .$$

1.1		<p>Дано:</p> $T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma & \sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma & \sigma \end{Bmatrix}$	<p>Определить главные нормальные напряжения и тип напряженного состояния</p>
-----	---	--	--

Чтобы определить главные нормальные напряжения, нужно найти корни уравнения

$$s^3 - I_{1\sigma}s^2 + I_{2\sigma}s - I_{3\sigma} = 0 ,$$

где s - главное нормальное напряжение, а $I_{1\sigma}$, $I_{2\sigma}$, $I_{3\sigma}$ - инварианты напряженного состояния в точке (инварианты тензора напряжений). Можно получить, что

$$I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma ,$$

$$I_{2\sigma} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 0 ,$$

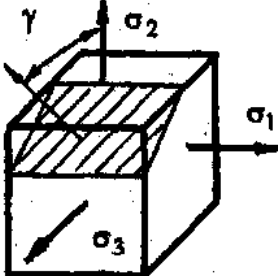
$$I_{3\sigma} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = 0 .$$

Подставляя значения инвариантов в уравнение, будем иметь

$$s^3 - 3\sigma s^2 = s^2(s - 3\sigma) = 0 .$$

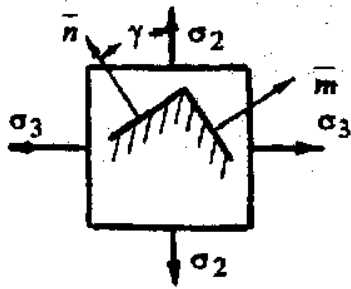
Соответственно корнями уравнения являются $s_1 = 3\sigma$, $s_2 = s_3 = 0$.

Главные нормальные напряжения - $\sigma_1 = 3\sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; напряженное состояние - линейное.

1.2		<p>Дано:</p> $\sigma_1 = 80 \text{ МПа} ,$ $\sigma_2 = 40 \text{ МПа} ,$ $\sigma_3 = 20 \text{ МПа} ,$ $\gamma = 30^\circ .$	<p>Определить напряжения в сечении с нормалью \bar{n} и главные касательные напряжения.</p>
-----	---	---	--

Поскольку нормаль к рассматриваемому сечению перпендикулярна главному направлению 1 (главному напряжению σ_1), имеем

возможность перейти к плоскому напряженному состоянию и воспользоваться готовыми соотношениями:



$$\sigma_n = \sigma_{\text{макс}} \cos^2 \alpha + \sigma_{\text{мин}} \sin^2 \alpha ,$$

$$\tau_{nm} = -\frac{\sigma_{\text{макс}} - \sigma_{\text{мин}}}{2} \sin 2\alpha$$

(α - угол между $\sigma_{\text{макс}}$ и нормалью \bar{n} , отсчитываемый от $\sigma_{\text{макс}}$).

Здесь $\alpha = \gamma$, $\sigma_{\text{макс}} = \sigma_2$, $\sigma_{\text{мин}} = \sigma_3$ и в соответствии с этими данными имеем следующие значения напряжений в искомом сечении:

$$\sigma_n = 40 \cdot \frac{3}{4} + 20 \cdot \frac{1}{4} = 35 \text{ МПа} , \quad \tau_{nm} = -\frac{40 - 20}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -8,66 \text{ МПа} .$$

Главные касательные напряжения определим по формулам:

$$\tau_1 = |(\sigma_1 - \sigma_2) / 2| = 20 \text{ МПа} ,$$

$$\tau_2 = |(\sigma_2 - \sigma_3) / 2| = 10 \text{ МПа} ,$$

$$\tau_3 = |(\sigma_3 - \sigma_1) / 2| = 30 \text{ МПа} .$$

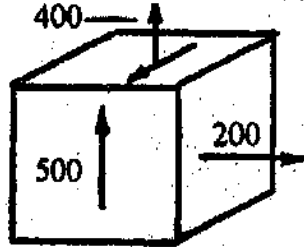
1.3		<p>Дано:</p> $\sigma_3 = -100 \text{ МПа} ,$ $\gamma = 30^\circ .$	<p>Определить напряжения в сечениях с нормальными \bar{n} и \bar{m}.</p>
-----	--	---	--

См. задачу 1.2. При определении напряжений на площадке с нормалью \bar{n} имеем $\sigma_{\text{макс}} = 0$, $\sigma_{\text{мин}} = -100 \text{ МПа}$, $\alpha = -60^\circ$. Для площадки с нормалью \bar{m} угол имеет другое значение - $\alpha = 30^\circ$. Вычисляя напряжения на площадках, получаем

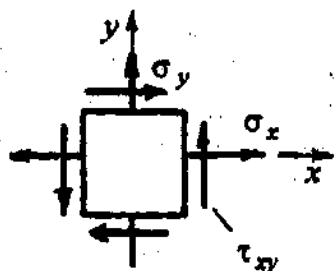
$$\sigma_n = -100 \cdot (0,866)^2 = -75 \text{ МПа} , \quad \tau_{nm} = -\frac{100}{2} \cdot (-0,866) = 43,3 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_m = -100 \cdot (0,5)^2 = -25 \text{ МПа} , \quad \tau_{mn} = -\frac{100}{2} \cdot 0,866 = -43,3 \text{ МПа} .$$

Напомним, что результат $\tau_{nm} = -\tau_{mn}$ определяется известным законом парности касательных напряжений.

1.4		Дано: напряжения в МПа	Определить главные нормальные и касательные напряжения
-----	---	---------------------------	--

Поскольку нормальное напряжение $\sigma = 200$ МПа является одним из главных, величины и направления двух оставшихся главных можно найти по соответствующим формулам для плоского напряженного состояния:

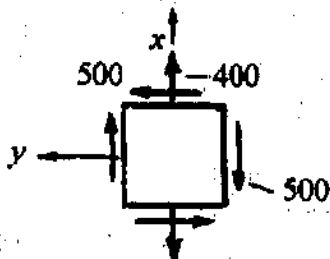


$$\sigma_{\text{макс, мин}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow 2\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right).$$

Приведенные формулы получены в предположении, что $\sigma_x \geq \sigma_y$, а угол α_0 определяет направление $\sigma_{\text{макс}}$ относительно оси x .

В рассматриваемой задаче $\sigma_x = 400$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 500$.



$$\sigma_{\text{макс, мин}} = 200 \pm \sqrt{200^2 + 500^2} = 200 \pm 540$$

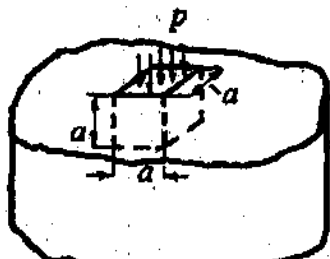
$$\sigma_{\text{макс}} = 740 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\text{мин}} = -340 \text{ МПа}.$$

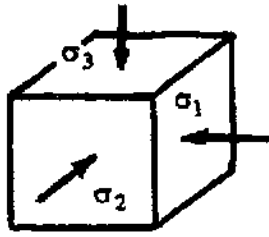
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{1000}{400} = 2,5 \rightarrow \alpha_0 = 34^\circ.$$

Окончательно имеем:

$$\sigma_1 = 740, \quad \sigma_2 = 200, \quad \sigma_3 = -340 \text{ (МПа)}.$$

$$\tau_1 = \pm 540, \quad \tau_2 = \pm 270, \quad \tau_3 = \pm 270 \text{ (МПа)}.$$

1.5		Дано: p, a, E, μ	Определить давление на стенки паза, изменение размера a и потенциальную энергию деформации.
-----	---	-------------------------	---



С точки зрения анализа напряженно-деформированного состояния поставленная задача сводится к отысканию главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ при известном

$\sigma_3 = -p$ и следующих значениях главных деформаций: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 \neq 0$ - ? Используя обобщенный закон Гука, можем записать

$$\begin{cases} E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = 0 \\ E\varepsilon_2 = \sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1) = 0 \\ E\varepsilon_3 = \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \neq 0 \end{cases}$$

Решение первых двух уравнений позволяет получить

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -p\mu / (1 - \mu) .$$

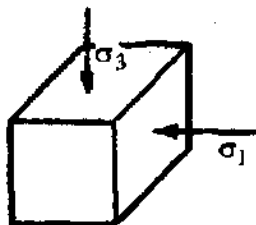
Изменение размера a связано с линейной деформацией ε_3 соотношением $\Delta a = a \varepsilon_3$, откуда имеем:

$$\Delta a = \frac{p}{E} a \cdot \frac{2\mu^2 + \mu - 1}{1 - \mu} < 0 .$$

Потенциальная энергия упругой деформации определяется формулой

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = \frac{p^2}{2E} \cdot \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{1 - \mu} > 0 .$$

1.6		<p>Дано: p, a, b, E, μ</p>	<p>Определить главные нормальные напряжения и изменение размеров a и b.</p>
-----	--	---	---



См. задачу 1.5. Здесь $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -p$ и $\varepsilon_1 = 0$ при неизвестных σ_1 , ε_2 и ε_3 . Используя уравнения обобщенного закона Гука, получаем $\sigma_1 = \mu\sigma_3 = -\mu p$.

Изменение размеров a и b определим через деформации ε_2 и ε_3 :

$$\Delta b = b \varepsilon_2 = (pb/E) \mu (1 + \mu) > 0 ,$$

$$\Delta a = a \varepsilon_3 = (pa/E) (\mu^2 - 1) < 0 .$$

1.7		Дано: $\sigma_1 = 60 \text{ МПа} ,$ $\sigma_2 = 30 \text{ МПа} ,$ $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} ,$ $\mu = 0,3 ,$ $\gamma = 30^\circ .$	Определить главные линейные деформации и деформации в осях n и m .
-----	--	---	--

Главные линейные деформации определяются уравнениями обобщенного закона Гука:

$$\varepsilon_1 = (\sigma_1 - \mu \sigma_2) / E = (60 - 0,3 \cdot 30) / 2 \cdot 10^5 = 2,55 \cdot 10^{-4} ,$$

$$\varepsilon_2 = (\sigma_2 - \mu \sigma_1) / E = (30 - 0,3 \cdot 60) / 2 \cdot 10^5 = 0,6 \cdot 10^{-4} .$$

Поскольку между напряженным и деформированным состоянием имеет место аналогия, можем получить (см. задачи 1.2 и 1.3):

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{\text{макс}} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{\text{мин}} \sin^2 \alpha ,$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{\text{макс}} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{\text{мин}} \cos^2 \alpha ,$$

$$\gamma_{nm} = -(\varepsilon_{\text{макс}} - \varepsilon_{\text{мин}}) \sin 2\alpha .$$

В рассматриваемой задаче $\varepsilon_{\text{макс}} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_{\text{мин}} = \varepsilon_2$, $\alpha = \gamma$. Подставляя числовые значения всех величин, будем иметь:

$$\varepsilon_n = 2,05 \cdot 10^{-4} , \quad \varepsilon_m = 1,09 \cdot 10^{-4} , \quad \gamma_{nm} = -1,7 \cdot 10^{-4} .$$

2. КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ

Назначение критерия прочности - сведение трехосного напряженного состояния к эквивалентному одноосному растяжению. Вне зависимости от используемого критерия условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{экр}} \leq [\sigma]_{\text{раст}} .$$

Основные критерии прочности:

- критерий наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности)

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{I}} = \sigma_1 ;$$

- критерий наибольших линейных деформаций (вторая теория прочности)

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) ;$$

- критерий наибольших касательных напряжений (третья теория прочности)

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 ;$$

- критерий Кулона - Мора

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_{\text{р}}}{[\sigma]_{\text{сж}}} \sigma_3 ;$$

- критерий удельной потенциальной энергии формоизменения

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} .$$

2.1	Трехосное напряженное состояние	Дано: $\sigma_1 = 20$ МПа, $\sigma_2 = -40$ МПа, $\sigma_3 = -80$ МПа.	Сравнить эквивалентные напряжения по всем теориям прочности ($\mu = 0,3$; $[\sigma]_{\text{р}} / [\sigma]_{\text{сж}} = 0,5$).
-----	---------------------------------	---	---

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{I}} = 20 \text{ МПа} ; \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{II}} = 56 \text{ МПа} ; \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = 100 \text{ МПа} ;$$

критерий Кулона - Мора - $\sigma_{\text{ЭКВ}} = 60$ МПа ;

критерий удельной потенциальной энергии формоизменения -

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = 87,2 \text{ МПа} .$$

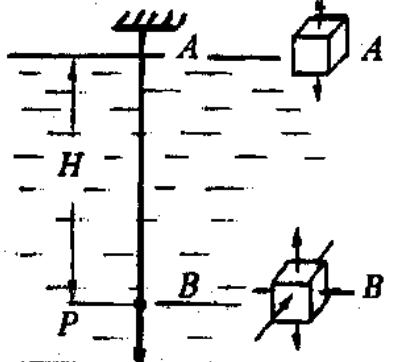
2.2		Дано: $[\sigma]_{\text{р}} = [\sigma]_{\text{сж}}$ (напряжения в МПа)	Определить, какое напряженное состояние является более опасным (использовать III теорию прочности).
-----	--	---	---

III теория прочности определяет эквивалентное напряжение соотношением $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3$. Соответственно имеем:

в первом случае - $\sigma_1 = 800$, $\sigma_2 = 300$, $\sigma_3 = 100$ и $\sigma_{\text{ЭКВ}} = 700$ МПа ;

во втором - $\sigma_1 = 750$, $\sigma_2 = 100$, $\sigma_3 = 0$ и $\sigma_{\text{экв}} = 750$ МПа.

Второе напряженное состояние более опасно.

2.3		<p>Дано:</p> <p>$H, P,$</p> <p>$\gamma_1,$</p> <p>$\gamma_2,$</p> <p>$[\sigma]_p = [\sigma]_{\text{сж}}$</p>	<p>Определить эквивалентные напряжения в сечениях A и B (использовать III теорию прочности).</p> <p>γ_1 - удельный вес воды;</p> <p>γ_2 - удельный вес кабеля.</p>
-----	---	--	--

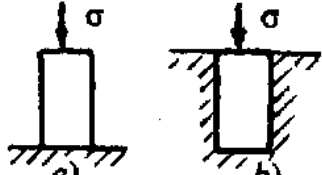
Напряженное состояние в сечении A является одноосным и определяется грузом P и весом кабеля в воде $P_K = (\gamma_2 - \gamma_1)FH$, где F - площадь сечения кабеля. Соответственно $\sigma_1 = (P + P_K) / F$ и

$$(\sigma_{\text{экв}})_A = (P / F) + (\gamma_2 - \gamma_1)H.$$

Напряженное состояние в сечении B - трехосное: $\sigma_1 = P / F$, $\sigma_2 = \sigma_3 = -\gamma_1 H$. Эквивалентное напряжение в сечении

$$(\sigma_{\text{экв}})_B = (P / F) + \gamma_1 H.$$

Можно видеть, что если $(\gamma_2 / \gamma_1) > 2$, то сечение A опаснее.

2.4		<p>Дано:</p> <p>$\sigma,$</p> <p>$k = [\sigma]_p / [\sigma]_{\text{сж}} \neq 1.$</p>	<p>Сравнить эквивалентные напряжения в случаях a и b.</p>
-----	---	--	---

В случае a) имеем: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma \Rightarrow \sigma_{\text{экв}}^{(1)} = k\sigma$ (критерий Кулона - Мора).

В случае b) (см. задачу 1.5) - $\sigma_1 = \sigma_2 = -\mu\sigma / (1 - \mu)$, $\sigma_3 = -\sigma \Rightarrow \sigma_{\text{экв}}^{(2)} = \left(k - \frac{\mu}{1 - \mu}\right) \sigma.$

Сравнение случаев a и b позволяет считать $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{(1)} > \sigma_{\text{ЭКВ}}^{(2)}$. Отметим, что при $k < \mu / (1 - \mu)$ имеем $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{(2)} < 0$ - в таких случаях полагают $\sigma_{\text{ЭКВ}} = 0$.

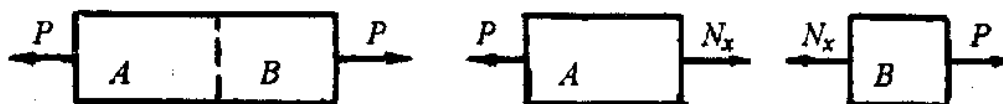
3. РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ) ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Механические характеристики материала при растяжении и сжатии:

- диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали. Характеристики прочности: $\sigma_{\text{плц}}$, σ_{T} ($\sigma_{0,2}$), $\sigma_{\text{В}}$ - пределы пропорциональности, текучести, прочности; $S_{\text{К}}$ - истинное сопротивление разрыву. Характеристики пластичности: δ , ψ - относительные удлинение и сужение образца после разрыва;
- диаграмма растяжения серого чугуна. Предел прочности $\sigma_{\text{В}}$;

Растяжение (сжатие) статически определимого бруса:

- метод сечений и определение продольной силы N_x



Из условия равновесия любой из частей бруса $\sum X = 0 \Rightarrow N_x = P$.

Растягивающее усилие считается положительным, сжимающее - отрицательным. Далее в задачах при определении продольной силы N_x направляем ее всегда как положительную;

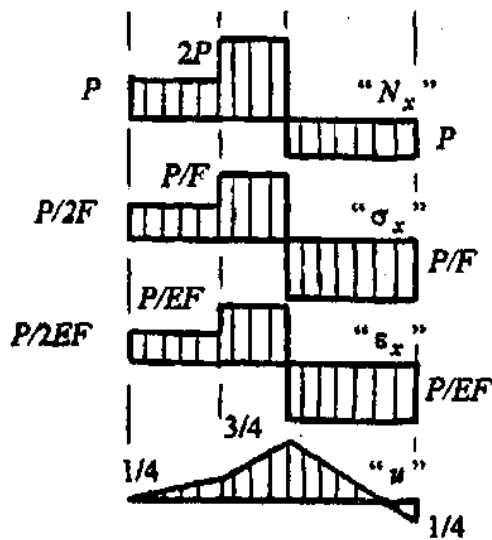
- нормальное напряжение $\sigma_x = N_x / F_{\text{сеч}}$;
- линейная продольная деформация
 - $\varepsilon_x = \sigma_x / E$ - при силовом нагружении,
 - $\varepsilon_x = (\sigma_x / E) + \alpha t(x)$ - при термосиловом нагружении;
- поперечные деформации $|\varepsilon_y / \varepsilon_x| = \varepsilon_z / \varepsilon_x = \mu$;
- перемещения точек

$$u = \int_0^x N_x dx / EF_{\text{сеч}} \quad \text{- при силовом нагружении,}$$

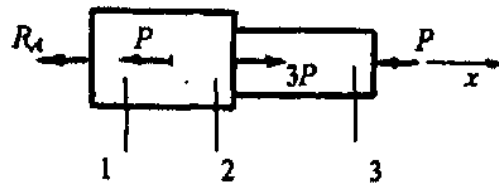
$$u = \int_0^x N_x dx / EF_{\text{сеч}} + \alpha \int_0^x t(x) dx - \text{при термосиловом нагружении};$$

Статически неопределимый брус и статически определимые и неопределимые стержневые системы.

3.1		Дано: P, F, a, E	Построить диаграммы (эпюры) продольных сил N_x , напряжений σ_x , деформаций ϵ_x и перемещений u .
-----	--	-----------------------	--



1. Определение реакции опоры.

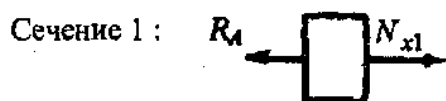


Из уравнения статики имеем:

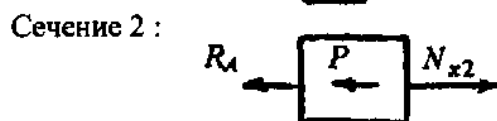
$$\Sigma X = 0 \Rightarrow -R_A - P + 3P - P = 0.$$

$$R_A = P.$$

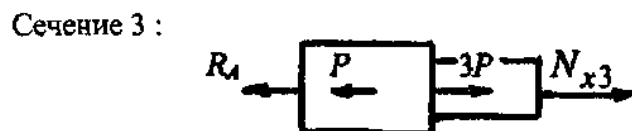
2. Построение эпюры продольных сил.



$$\Sigma X = 0 \Rightarrow N_{x1} = P.$$



$$\Sigma X = 0 \Rightarrow N_{x2} = 2P.$$



$$\Sigma X = 0 \Rightarrow N_{x3} = -P.$$

3. Эпюры напряжений и деформаций построим с помощью следующих зависимостей

$$\sigma_x = N_x / F_{\text{сеч}} \quad , \quad \varepsilon_x = \sigma_x / E = N_x / EF_{\text{сеч}} \quad .$$

4. Построение эпюры перемещений проведем с помощью формулы $u = \int_0^x (N_x / EF_{\text{сеч}}) dx$, проводя интегрирование в пределах каждого участка (эпюра построена в единицах Pa / EF).

$$\text{Участок 1: } u_1 = \int_0^x (N_{x1} / E \cdot 2F) dx \quad , \quad 0 \leq x \leq a/2 \quad .$$

$$u_1|_{x=0} = 0 \quad , \quad u_1|_{x=a/2} = Pa / 4EF \quad .$$

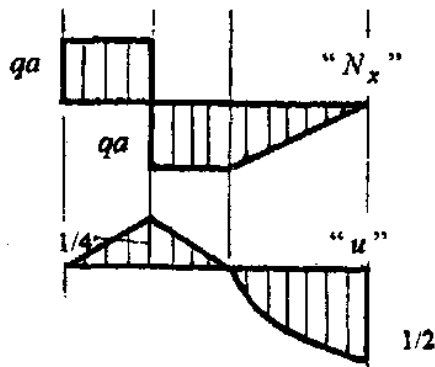
$$\text{Участок 2: } u_2 = u_1|_{x=a/2} + \int_0^x (N_{x2} / E \cdot 2F) dx \quad , \quad 0 \leq x \leq a/2 \quad .$$

$$u_2|_{x=0} = Pa / 4EF \quad , \quad u_2|_{x=a/2} = 3Pa / 4EF \quad .$$

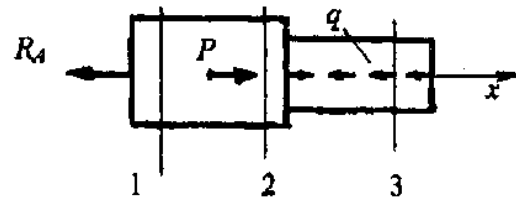
$$\text{Участок 3: } u_3 = u_2|_{x=a/2} + \int_0^x (N_{x3} / E \cdot F) dx \quad , \quad 0 \leq x \leq a \quad .$$

$$u_3|_{x=0} = 3Pa / 4EF \quad , \quad u_3|_{x=a} = -Pa / 4EF \quad .$$

3.2		Дано: P, q, F, a, E $(P = 2qa)$	Построить эпюры N_x и u .
-----	--	---	----------------------------------



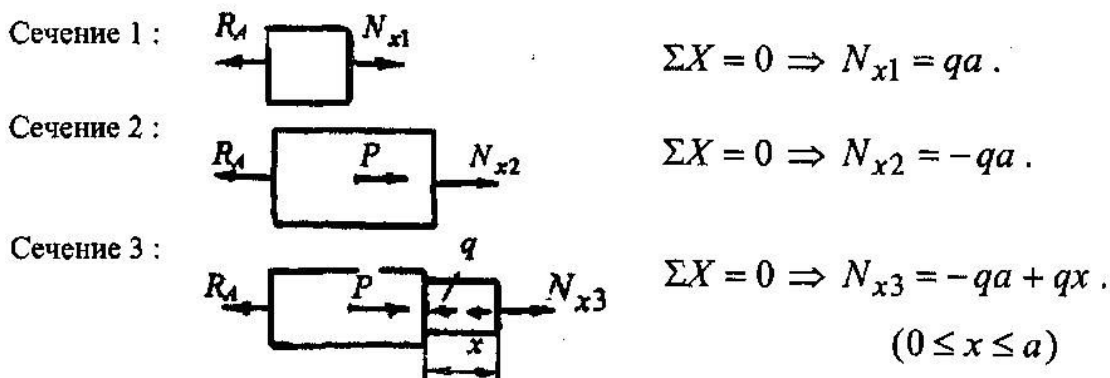
1. Определение реакции опоры.



$$\text{Из уравнения статики имеем: } \Sigma X = 0 \quad \Rightarrow \quad -R_A + P - qa = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_A = qa \quad .$$

2. Построение эпюры продольных сил.



4. Эпюру перемещений строим (см. задачу 3.1) с помощью формулы

$u = \int_0^x (N_x / EF_{\text{сеч}}) dx$ (построения - в единицах qa^2 / EF).

Участок 1: $u_1 = \int_0^x (N_{x1} / E \cdot 2F) dx = qax / EF$, $0 \leq x \leq a/2$.

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=a/2} = qa^2 / 4EF.$$

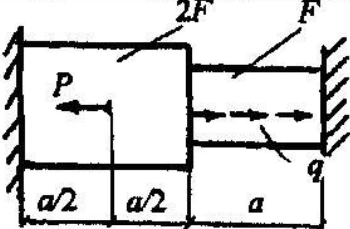
Участок 2: $u_2 = u_1|_{x=a/2} + \int_0^x (N_{x2} / E \cdot 2F) dx$, $0 \leq x \leq a/2$.

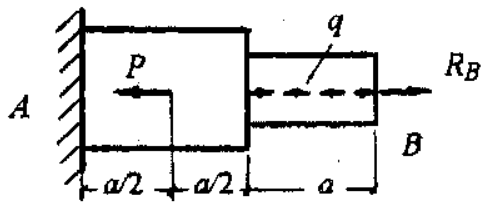
$$u_2|_{x=0} = qa^2 / 4EF, \quad u_2|_{x=a/2} = 0.$$

Участок 3: $0 \leq x \leq a$,

$$u_3 = \int_0^x (N_{x3} / E \cdot F) dx = -(2qax - qx^2) / 2EF.$$

Функция $u_3 = u_3(x)$ - квадратичная выпуклостью вниз. Имеет минимум при $x = a$: $u_3|_{x=0} = 0$, $u_3|_{x=a} = -qa^2 / 2EF$.

3.3		<p>Дано:</p> <p>$P = 20 \text{ кН}$,</p> <p>$q = 10 \text{ кН/м}$,</p> <p>$F = 2 \text{ см}^2$,</p> <p>$a = 1 \text{ м}$,</p> <p>$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$</p>	<p>Построить эпюры N_x и u.</p>
-----	---	--	---



1. Рассматриваемая задача - статически неопределимая. Степень статической неопределимости равна 1: имеем 2 неизвестные реакции опор и

1 уравнение статики. Для решения задачи используем следующую процедуру: отбросим правое закрепление B и введем в рассмотрение реакцию R_B . Полученная балка эквивалентна исходной при условии, что перемещение сечения B равно нулю:

$$\Delta_B = 0 \Rightarrow (\Delta_B)_P + (\Delta_B)_q + (\Delta_B)_{R_B} = 0 ,$$

где $(\Delta_B)_P$ - перемещение сечения B от действия только силы P и т.д. При записи уравнения реализован принцип независимости сил. Вычисляя каждое слагаемое, будем иметь:

$$(\Delta_B)_P = -P(a/2) / E \cdot 2F = -Pa / 4EF ,$$

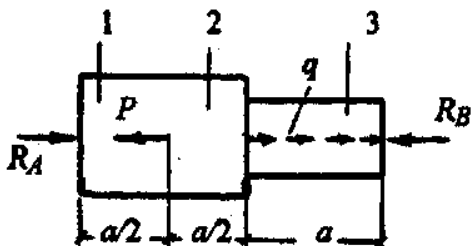
$$(\Delta_B)_q = \int_0^a \frac{qx dx}{E \cdot F} + \frac{qa \cdot a}{E \cdot 2F} = \frac{qa^2}{EF} ,$$

$$(\Delta_B)_{R_B} = R_B a / E \cdot F + R_B a / E \cdot 2F = 3R_B / 2EF .$$

Решение уравнения относительно R_B позволяет получить

$$R_B = (Pa - 4qa^2) / 6 = (20 \cdot 1 - 4 \cdot 10 \cdot 1) / 6 = -3,33 \text{ кН} .$$

Знак результата показывает, что выбранное направление реакции R_B неверно и его нужно заменить на обратное, приняв $R_B = 3,33 \text{ кН}$.



Отбросим левое закрепление A и введем в рассмотрение реакцию R_A . Из уравнения равновесия бруса

$$R_A - P + qa - R_B = 0$$

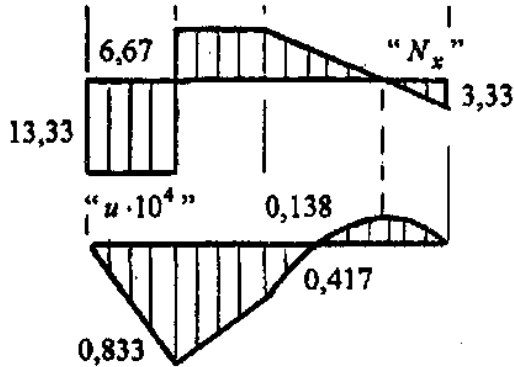
получаем, что $R_A = 13,33 \text{ кН}$.

Дальнейшее решение рассматриваемой задачи ничем не отличается от решения предыдущей (см. задачу 3.2).

2. Построение эпюры продольных сил.

$$N_{x1} = -13,33 \text{ кН}, \quad N_{x2} = 6,67 \text{ кН}, \quad N_{x3} = (6,67 - 10x) \Big|_{0 \leq x \leq a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{x3} \Big|_{x=0} = 6,67 \text{ кН}, \quad N_{x3} \Big|_{x=a} = -3,33 \text{ кН}.$$



3. Построение эпюры "u".

$$u_1 = \frac{N_{x1} x}{E \cdot 2F} = -1,67 \cdot 10^{-4} x,$$

$$(0 \leq x \leq 0,5 \text{ м}).$$

$$u_1 \Big|_{x=0} = 0,$$

$$u_1 \Big|_{x=0,5} = -0,833 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

$$u_2 = -0,833 \cdot 10^{-4} + \frac{N_{x2} x}{2EF} = -0,833 \cdot 10^{-4} + 0,833 \cdot 10^{-4} x$$

$$(0 \leq x \leq 0,5 \text{ м}).$$

$$u_2 \Big|_{x=0} = -0,833 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \quad u_2 \Big|_{x=0,5} = -0,417 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

$$u_3 = -0,417 \cdot 10^{-4} + \int_0^x \frac{N_{x3} x}{EF} dx = [-0,417 + 0,25 \cdot (6,67 - 5x^2)] \cdot 10^{-4}$$

$$(0 \leq x \leq 1,0 \text{ м}).$$

Функция $u_3 = u_3(x)$ - квадратичная выпуклостью вверх с максимумом при $x = 0,66 \text{ м}$: $u_3 \Big|_{x=0,66} = 0,138 \cdot 10^{-4} \text{ м}$. На концах интервала

$$u_3 \Big|_{x=0} = -0,417 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \quad u_3 \Big|_{x=1} = 0.$$

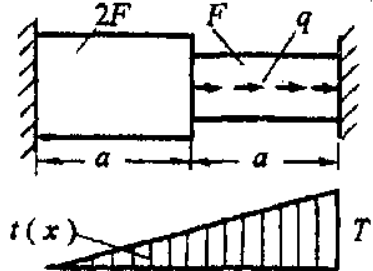
Последний результат отвечает жесткому закреплению бруса справа.

3.4		<p>Дано:</p> <p>$P = 150 \text{ кН},$ $\Delta = 0,28 \text{ см},$ $F = 20 \text{ см}^2,$ $a = 70 \text{ см},$ $E = 10^4 \text{ МПа}.$</p>	<p>Определить значения продольной силы N_x.</p>
-----	--	--	--

Определим перемещение правого конца бруса. Имеем:

$$\Delta = Pa / 2EF = 2,625 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,265 \text{ см} < \Delta = 0,28 \text{ см} .$$

Таким образом, рассматриваемая задача - статически определимая. Продольная сила $N_x = P$ имеет место в сечениях участка с площадью поперечного сечения $2F$; в остальных сечениях $N_x = 0$.

3.5		<p>Дано:</p> <p>$T = 30^\circ\text{C}$, $q = 10 \text{ кН/м}$, $F = 2 \text{ см}^2$, $a = 1 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$.</p>	<p>Построить эпюры N_x, σ_x, ϵ_x и u.</p>
-----	---	---	---

Отбросим правую опору B (см. задачу 3.3) и введем в рассмотрение реакцию R_B , как сжимающую. Перемещение сечения B приравниваем нулю:

$$\Delta_B = 0 \Rightarrow (\Delta_B)_t + (\Delta_B)_q + (\Delta_B)_{R_B} = 0 ,$$

где $(\Delta_B)_t$ - перемещение сечения B от действия температуры $t(x)$.

Вычисляя каждое слагаемое уравнения, получим

$$(\Delta_B)_t = \alpha \int_0^{2a} t(x) dx = \alpha (T/2a) \int_0^{2a} x dx = \alpha T a , \text{ где } t(x) = Tx/2a ,$$

$$(\Delta_B)_q = \int_0^a \frac{qx dx}{E \cdot F} + \frac{qa \cdot a}{E \cdot 2F} = \frac{qa^2}{EF} ,$$

$$(\Delta_B)_{R_B} = -R_B a / E \cdot F - R_B a / E \cdot 2F = -3R_B / 2EF .$$

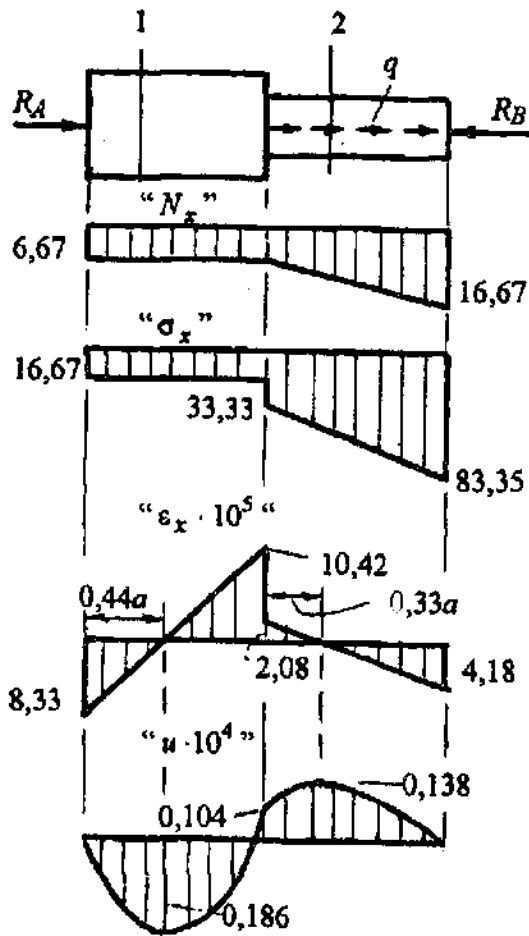
Решение уравнения относительно R_B позволяет отыскать

$$R_B = 2(qa + \alpha TEF) / 3 = 16,67 \text{ кН} .$$

Уберем левую опору A и введем в рассмотрение реакцию R_A (направление реакции - слева направо). Из уравнения равновесия бруса

$$R_A + qa - R_B = 0$$

получаем, что $R_A = 6,67 \text{ кН}$.



1. Построение эпюры " N_x ".

$$N_{x1} = -R_A = -6,67 \text{ кН},$$

$$N_{x2} = -(R_A + qx) \Big|_{0 \leq x \leq 1 \text{ м}} :$$

$$N_{x2} \Big|_{x=0} = -6,67 \text{ кН},$$

$$N_{x2} \Big|_{x=1} = -16,67 \text{ кН}.$$

2. Построение эпюры " σ_x ".

$$\sigma_{x1} = N_{x1} / 2F = -16,67 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{x2} = N_{x2} / F \Big|_{0 \leq x \leq 1 \text{ м}} :$$

$$\sigma_{x2} \Big|_{x=0} = -33,33 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{x2} \Big|_{x=1} = -83,35 \text{ МПа}.$$

3. Построение эпюры " ϵ_x ".

При наличии температуры изменение длины отрезка (относительное или абсолютное)

определяется суммой двух слагаемых, а именно силового и температурного: $\epsilon_x = (\sigma_x / E) + \alpha t(x)$. Будем иметь:

$$\epsilon_{x1} \Big|_{x=0} = -8,33 \cdot 10^{-5}, \quad \epsilon_{x1} \Big|_{x=1} = 10,42 \cdot 10^{-5};$$

$$\epsilon_{x2} \Big|_{x=0} = 2,08 \cdot 10^{-5}, \quad \epsilon_{x2} \Big|_{x=1} = -4,18 \cdot 10^{-5}.$$

4. Построение эпюры " u ".

Эпюру перемещений строим, используя формулу с силовым и температурным слагаемыми - $u = \int_0^x (N_x / EF_{\text{сеч}}) dx + \alpha \int_0^x t(x) dx$.

$$u_1 = \int_0^x \frac{N_{x1}}{E \cdot 2F} dx + \alpha \int_0^x \frac{T}{2a} x dx = \left(-0,834x + 0,938x^2 \right) \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Функция $u_1 = u_1(x)$ - квадратичная выпуклостью вниз; имеет минимум при $x = 0,44$ м : $u_1|_{x=0,44} = -0,186 \cdot 10^{-4}$ м . На концах интервала

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=1} = 0,104 \cdot 10^{-4} \text{ м} .$$

При определении перемещений на втором участке учтем, что распределение температуры по длине бруса $t(x) = Tx/2a$ задано в интервале $0 \leq x \leq 2$ м . Следовательно,

$$u_2 = 0,104 \cdot 10^{-4} + \int_0^x \frac{N_{x2} dx}{EF} + \alpha \int_1^{x'} t(x') dx' ,$$

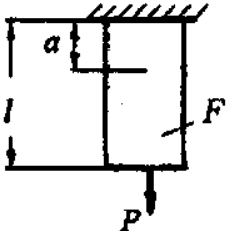
где $0 \leq x \leq 1$ м , а $1 \leq x' \leq 2$ м . После преобразований имеем:

$$u_2 = \left[0,104 - 1,667x - 1,25x^2 + 0,937(x'^2 - 1) \right] \cdot 10^{-4} .$$

Функция $u_2 = u_2(x)$ - квадратичная выпуклостью вверх; имеет максимум при $x = 0,33$ ($x' = 1,33$) м : $u_2|_{x=0,33; x'=1,33} = 0,138 \cdot 10^{-4}$ м . На концах интервала

$$u_2|_{x=0; x'=1} = 0,104 \cdot 10^{-4} \text{ м} , \quad u_2|_{x=1; x'=2} = 0 .$$

Как и в задаче 3.3 последний результат отвечает жесткому закреплению бруса справа.

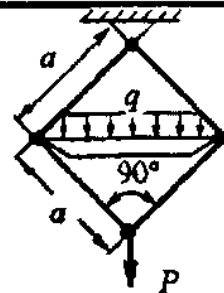
3.6		<p>Дано: F, a, E, γ, l, P</p>	<p>Определить изменение размера a .</p>
-----	---	---	--

Реакция опоры - $R = P + Fl\gamma$. Для продольной силы в сечении, отстоящем на расстоянии x от опоры, будем иметь

$$N_x = R - Fx\gamma = P + F\gamma(l - x) .$$

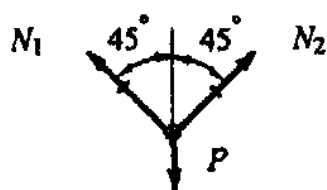
Соответственно, изменение размера a определим соотношением

$$\Delta a = u|_{x=a} = \int_0^a \frac{N_x dx}{EF} = \frac{a}{E} \left[\frac{P}{F} + \gamma \left(l - \frac{a}{2} \right) \right] .$$

3.7		Дано: F, a, E, q, P	Определить нормальные напряжения в сечениях стержней и перемещение точки приложения силы P .
-----	---	--------------------------	--

Рассматриваемая шарнирная стержневая система - статически определимая. Упругие перемещения точек в этом случае определяют в соответствии с законом Гука после отыскания из уравнений равновесия продольных усилий во всех стержнях системы.

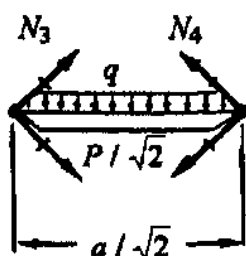
1. Определение усилий в стержнях.



$$\Sigma X = 0 \Rightarrow N_1 = N_2 .$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow 2N_1 \cos 45^\circ = P .$$

$$N_1 = P / \sqrt{2} .$$



$$\Sigma X = 0 \Rightarrow N_3 = N_4 .$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(N_3 - P / \sqrt{2}) \cos 45^\circ - qa\sqrt{2} = 0 .$$

$$N_3 = qa + (P / \sqrt{2}) .$$

2. Определение нормальных напряжений в сечениях стержней.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = P / F\sqrt{2} , \quad \sigma_3 = \sigma_4 = [qa + (P / \sqrt{2})] / F .$$

3. Перемещение δ точки приложения силы P определим как сумму проекций абсолютных удлинений стержней 1 и 3 на вертикаль:

$$\delta = \delta_1 + \delta_3 , \text{ где } \delta_1 = \Delta l_1 \cos 45^\circ \text{ и } \delta_3 = \Delta l_3 \cos 45^\circ .$$

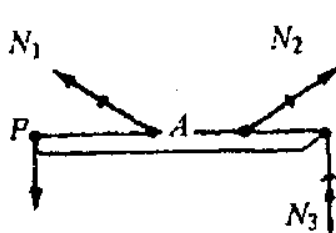
В свою очередь имеем, что $\Delta l_1 = N_1 a / EF$, $\Delta l_3 = N_3 a / EF$.

Окончательно получим:

$$\delta = (2Pa + qa^2 \sqrt{2}) / EF .$$

3.8		Дано: $F = 2 \text{ см}^2$, $\alpha = 30^\circ$, $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$	Определить допус- каемое значение силы P .
-----	--	--	--

Рассматриваемая шарнирная стержневая система - статически определимая.



1. Определение усилий в стержнях.

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_1 = N_2 .$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow 2N_1 \sin \alpha - P + N_3 = 0 .$$

$$N_3 = P - N_1 .$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P \cdot 2a + N_3 \cdot 2a + N_2 \cdot a \sin \alpha = 0 .$$

$$N_1 = 8P/3 .$$

Таким образом,

$$N_1 = N_2 = 8P/3 , \quad N_3 = -5P/3 .$$

2. Определение допускаемой силы.

В соответствии с условием прочности имеем

$$\sigma_{\text{макс}} = N_{\text{макс}} / F \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq 3F[\sigma] / 8 = 9 \cdot 10^{-3} \text{ МН} = 9 \text{ кН} .$$

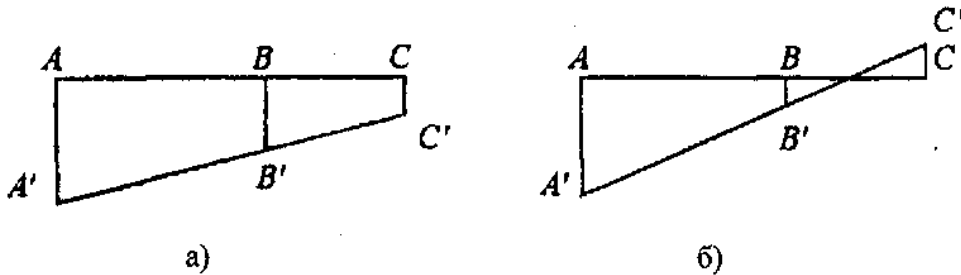
3.9		Дано: P, a, F .	Определить усилия в стержнях .
-----	--	----------------------	-----------------------------------

Рассматриваемая шарнирная стержневая система - статически неопределимая, поскольку 3 неизвестных усилия в стержнях не могут быть найдены с помощью только 2-х уравнений статики. Разность между числом неизвестных и числом уравнений статики

определяет степень (или порядок) статической неопределенности. В рассматриваемой задаче она равна единице, и это означает, что для ее решения к двум уравнениям статики необходимо добавить еще одно уравнение - уравнение совместного деформирования стержневой системы (условие совместности перемещений ее точек) или, другими словами, геометрическое уравнение, связывающее удлинения (укорочения) стержневой системы.

1. Уравнение совместности перемещений точек системы (раскрытие ее статической неопределенности).

Возможные схемы деформирования стержневой системы:



На рисунках а) и б) имеем: $AA' = \Delta l_1$, $BB' = \Delta l_3$, $CC' = \Delta l_2$. Соответственно, геометрическое уравнение, связывающее удлинения (укорочения) стержневой системы, запишем в виде:

для схемы а)

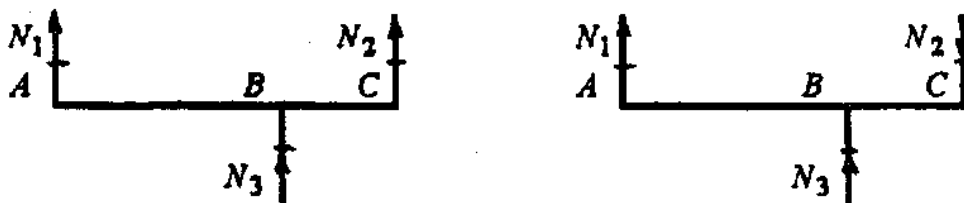
$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{3a} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_2}{a} \Rightarrow \Delta l_1 + 2\Delta l_2 - 3\Delta l_3 = 0 ; \quad (1a)$$

для схемы б)

$$\frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{3a} = \frac{\Delta l_3 + \Delta l_2}{a} \Rightarrow \Delta l_1 - 2\Delta l_2 - 3\Delta l_3 = 0 . \quad (1б)$$

2. Уравнения статики.

При получении уравнений статики схема сил должна соответствовать схеме деформирования стержневой системы



Будем иметь:

для схемы а)

$$N_1 + N_2 + N_3 = 0, \quad (2a)$$

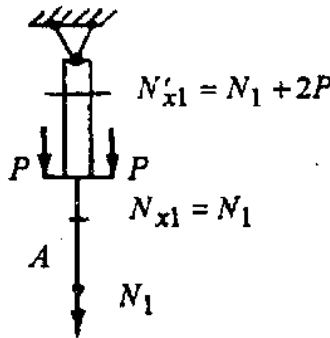
$$N_1 \cdot 2a = N_2 \cdot a \quad (3a)$$

для схемы б)

$$N_1 - N_2 + N_3 = 0, \quad (2б)$$

$$N_1 \cdot 2a = -N_2 \cdot a \quad (3б)$$

3. Представление удлинений (укорочений) стержневой системы через усилия, действующие в них.



$$\Delta l_1 = \frac{N'_{x1} a}{E \cdot 2F} + \frac{N_{x1} a}{E \cdot F} = \frac{3N_1 a}{EF} + \frac{Pa}{EF},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 a}{EF},$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 a}{EF}.$$

4. Определение продольных усилий в стержнях.

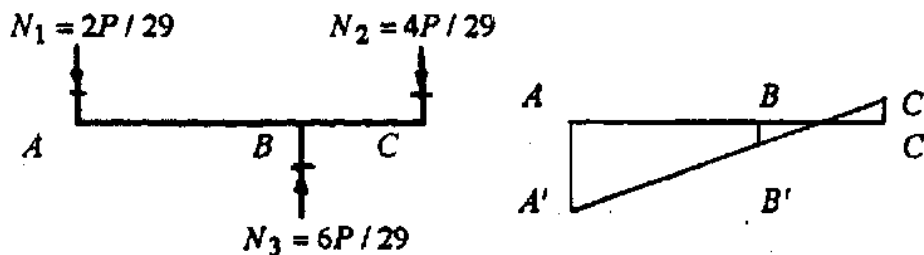
Подставляя найденные значения Δl_1 , Δl_2 , Δl_3 в уравнения (1а) и (1б) и решая совместно полученные системы уравнений относительно N_1 , N_2 и N_3 , будем иметь:

$$N_1 = -2P/29, \quad N_2 = -4P/29, \quad N_3 = 6P/29 \quad \text{для схемы а)}$$

$$N_1 = -2P/29, \quad N_2 = 4P/29, \quad N_3 = 6P/29 \quad \text{для схемы б)}$$

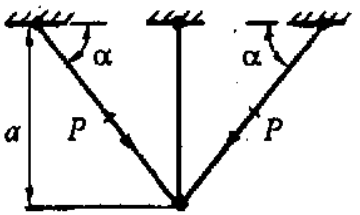
Знак “-” здесь показывает, что выбранное направление силы является неправильным и должно быть заменено на обратное.

Окончательно для схем сил и деформирования имеем:



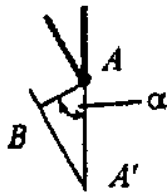
На схеме показаны действительные направления сил. Легко видеть, что стержень 1 на нижнем участке сжат ($N_{x1} = -2P/29$), а на верхнем растянут ($N'_{x1} = 56P/29$), стержни 2 и 3 - сжаты. Схему

деформирования проверим, вычисляя $\Delta l_1 = 26Pa / 29$ (удлинение стержня), $\Delta l_2 = 4Pa / 29$ (укорочение) и $\Delta l_3 = 6Pa / 29$ (укорочение). Уравнение (16) удовлетворяется тождественно.

3.10		<p>Дано: $P = 200$ кН, $\alpha = 60^\circ$, $[\sigma] = 120$ МПа.</p>	<p>Определить из условия прочности диаметр круглого сечения стержней (силы P приложены посередине стержня).</p>
------	---	---	--

Данная стержневая система - статически неопределимая: имеем три неизвестных усилия в стержнях и два уравнения статики.

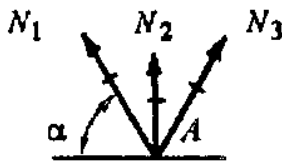
1. Уравнение совместности перемещений точек системы.



$$BA' = \Delta l_1, \quad AA' = \Delta l_2.$$

$$\Delta l_1 / \Delta l_2 = \sin \alpha \quad (1)$$

2. Уравнения статики.



$$N_1 = N_3, \quad (2)$$

$$2N_1 \sin \alpha + N_2 = 0 \quad (3)$$

3. Представление удлинений стержней через усилия N_1, N_2 :

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF} + \frac{P(l_1/2)}{EF} = \frac{N_1(2a/3)}{EF} + \frac{P(a/3)}{EF},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF} = \frac{N_2 a}{EF}$$

4. Определение продольных усилий в стержнях.

Подставляя найденные значения $\Delta l_1, \Delta l_2$ в уравнение (1) и решая систему уравнений (1) - (3) относительно N_1, N_2 и N_3 , будем иметь:

$$N_1 = N_3 = -43,5 \text{ кН (нижние части стержней - сжатие)},$$

$$N'_1 = N'_3 = 156,5 \text{ кН (верхние части стержней - растяжение)},$$

$$N_2 = 75,34 \text{ кН (растяжение)}.$$

5. Определение диаметра стержней из условия прочности.

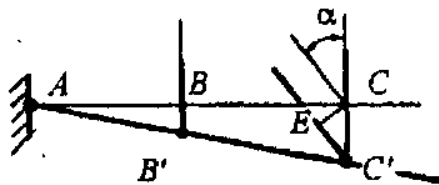
$$F = \pi d^2 / 4 \geq N_{\text{макс}} / [\sigma] = 15,65 \text{ см}^2 \Rightarrow d \geq 4,47 \text{ см} = 4,5 \text{ см}.$$

Можно рекомендовать изготавливать стержни 1 и 3 со ступенчатым поперечным сечением.

3.11		Дано: $P, a, F.$	Определить усилия в стержнях
------	--	---------------------	------------------------------

Порядок статической неопределимости рассматриваемой стержневой системы равен 2 : имеем 5 неизвестных (3 усилия в стержнях и 2 составляющие реакции в закреплении жесткого бруса) и только 3 уравнения статики.

1. Уравнения совместности перемещений точек системы.



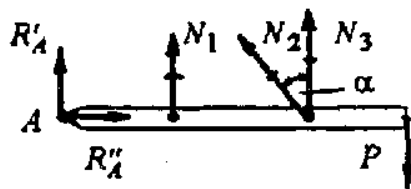
$$BB' = \Delta l_1, \quad EC' = \Delta l_2,$$

$$CC' = \Delta l_3.$$

$$\Delta l_3 / \Delta l_1 = 2a / a, \quad (1)$$

$$\Delta l_2 / \Delta l_3 = \sin \alpha. \quad (2)$$

2. Уравнения статики (2 уравнения сил и уравнение моментов относительно точки A).



$$R''_A - N_2 \cos \alpha = 0, \quad (3)$$

$$R'_A + N_1 + N_2 \sin \alpha + N_3 - P = 0, \quad (4)$$

$$N_1 a + N_3 2a - P 3a + N_2 2a \cos \alpha = 0. \quad (5)$$

3. Представление удлинений стержней через усилия N_1, N_2, N_3 .

$$\Delta l_1 = N_1 a / EF, \quad \Delta l_2 = N_2 a \sqrt{5} / EF, \quad \Delta l_3 = N_3 2a / EF.$$

4. Определение продольных усилий в стержнях.

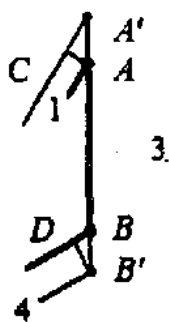
Подставляя найденные значения $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ в уравнения (1), (2) и решая систему уравнений (1), (2), (5) относительно N_1, N_2 и N_3 , будем иметь:

$$N_1 = 0,525P, \quad N_2 = 0,21P, \quad N_3 = 1,05P.$$

3.12		<p>Дано: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$, $T = 17,3^\circ\text{C}$, F, a.</p>	<p>Определить температурные напряжения в стержнях (T - изменение температуры среднего стержня).</p>
------	--	---	--

Порядок статической неопределимости рассматриваемой стержневой системы равен 1: имеем 5 неизвестных усилий в стержнях и 4 уравнения статики (по 2 для каждого из двух шарнирных узлов).

1. Уравнения совместности перемещений точек системы.



$$CA' = \Delta l_1, \quad DB = \Delta l_4, \quad AA' + BB' = \Delta l_3.$$

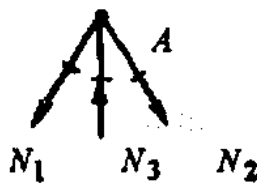
Можно видеть, что

$$AA' = \Delta l_1 / \cos 30^\circ, \quad BB' = \Delta l_4 / \cos 60^\circ.$$

Будем иметь

$$\Delta l_3 = \left(2\Delta l_1 / \sqrt{3}\right) + 2\Delta l_4. \quad (1)$$

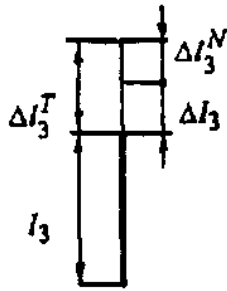
2. Уравнения статики (по 2 уравнения сил для каждого узла).



$$N_1 = N_2, \quad (2) \quad N_4 = N_5, \quad (4)$$

$$2N_1 \cos 30^\circ = N_3, \quad (3) \quad 2N_4 \cos 60^\circ = N_3. \quad (5)$$

3. Представление удлинений стержней через усилия и температуру.



Можно найти, что

$$l_1 = 2a, \quad l_3 = l_4 = 2a / \sqrt{3}.$$

Соответственно

$$\Delta l_1 = N_1 2a / EF, \quad \Delta l_4 = N_4 2a / EF \sqrt{3}.$$

Изменение длины стержня 3 определяется в соответствии со схемой, где Δl_3^T - его удлинение, вызванное температурой T , а Δl_3^N - укорочение, определяемое действием силы N_3 (связь стержня 3 с другими стержнями системы уменьшает его температурное расширение):

$$\Delta l_3 = \Delta l_3^T - \Delta l_3^N = \alpha T (2a / \sqrt{3}) - (N_3 / EF) (2a / \sqrt{3}).$$

4. Определение продольных усилий в стержнях.

Подставляя найденные значения Δl_1 , Δl_3 , Δl_4 в уравнение (1) и решая полученную систему уравнений относительно определяемых усилий, будем иметь:

$$N_1 = N_2 = 6,0F \text{ (МН)}, \quad N_3 = N_4 = N_5 = 10,4F \text{ (МН)}.$$

5. Определение температурных напряжений в стержнях.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 6,0 \text{ (МПа)}, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 10,4 \text{ (МПа)}.$$

4. ЧИСТЫЙ СДВИГ

Определения:

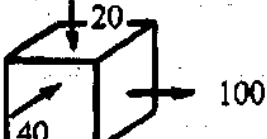
- чистого сдвига;
- абсолютного сдвига;
- относительного сдвига или угловой деформации γ ;
- касательного напряжения τ .

Закон Гука для чистого сдвига:

- связь между угловой деформацией и касательным напряжением $\gamma = \tau / G$;

- соотношения, связывающие главные угловые деформации $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, главные линейные деформации $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ и главные касательные напряжения τ_1, τ_2, τ_3 ;
- зависимость между упругими постоянными E, μ и G ;
- октаэдрический сдвиг $\gamma_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}$.

Условие прочности при чистом сдвиге.

4.1		Дано: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$, напряжения в МПа.	Определить главные угловые деформации и октаэдрический сдвиг.
-----	---	--	---

Заданные напряжения являются главными нормальными:

$$\sigma_1 = 100, \quad \sigma_2 = -20, \quad \sigma_3 = -40.$$

Главные касательные напряжения определяются как полуразности главных нормальных:

$$\tau_1 = |\sigma_1 - \sigma_2| / 2 = 60,$$

$$\tau_2 = |\sigma_2 - \sigma_3| / 2 = 10,$$

$$\tau_3 = |\sigma_3 - \sigma_1| / 2 = 70.$$

При определении главных угловых деформации используем закон Гука в форме соотношения $\gamma = \tau / G$, для чего необходимо вычислить модуль сдвига (модуль упругости второго рода):


$$G = E / 2(1 + \mu) = 7,7 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Соответственно имеем

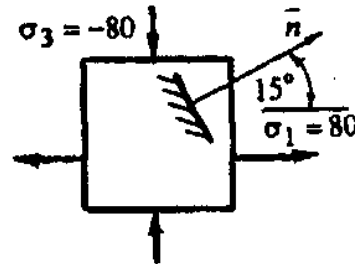
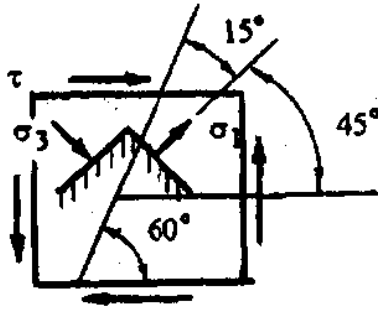
$$\gamma_1 = \tau_1 / G = 7,8 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_2 = \tau_2 / G = 1,3 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_3 = \tau_3 / G = 7,8 \cdot 10^{-4}$$

Октаэдрический сдвиг определим по известной формуле:

$$\gamma_0 = (2/3) \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} = 8,04 \cdot 10^{-4}.$$

4.2		Дано: напряжения в МПа.	Определить напряжения в сечении с нормалью \bar{n} .
-----	---	----------------------------	--

Для напряженного состояния чистого сдвига τ главные площадки составляют с исходными углы по 45° , а сами главные напряжения имеют значения: $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$ (см. раздел 1, обратная задача типа 1.4). Соответственно рассматриваемая задача сводится к отысканию напряжений на заданной площадке при известных главных напряжениях (см. раздел 1, прямая задача типа 1.2 или 1.3).



Применение известных формул

$$\sigma_n = \sigma_{\max} \cos^2 \alpha + \sigma_{\min} \sin^2 \alpha, \quad \tau_{nt} = -\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \sin 2\alpha$$

при $\alpha = 15^\circ$, $\sigma_{\max} = \sigma_1 = 80$ МПа и $\sigma_{\min} = \sigma_3 = -80$ МПа позволяет получить искомые напряжения

$$\sigma_n = 69,3 \text{ МПа}, \quad \tau_{nt} = -40 \text{ МПа}.$$

4.3		<p>Дано:</p> <p>$P = 50$ кН,</p> <p>$E = 2 \cdot 10^5$ МПа,</p> <p>$\mu = 0,3$.</p>	<p>Определить главные нормальные напряжения, угловую деформацию и деформацию в направлении диагонали.</p>
-----	--	--	---

Напряженное состояние прямоугольного параллелепипеда - чистый сдвиг. Касательное напряжение равно

$$\tau = P / F_{\text{сдв}} = 50 \cdot 10^{-3} / 10 \cdot 10^{-4} = 50 \text{ МПа}.$$

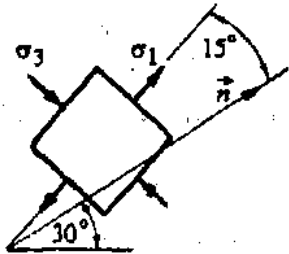
Главные напряжения имеют значения: $\sigma_1 = -\sigma_3 = 50$ МПа.

Вычисляя угловую деформацию, получим

$$\gamma = \tau / G = 2\tau(1 + \mu) / E = 0,65 \cdot 10^{-3}.$$

Деформацию в направлении диагонали рассматриваем как линейную деформацию ϵ_n в направлении нормали n , определяемой

заданным углом 30° . Ее отыскание проведем по схеме, предложенной в задаче 1.7, учитывая, что нормаль \vec{n} с главным напряжением σ_1 составляет угол $\alpha = -15^\circ$.



Будем иметь:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{\text{макс}} = (\sigma_1 - \mu\sigma_3) / E = 3,25 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{\text{мин}} = (\sigma_3 - \mu\sigma_1) / E = -3,25 \cdot 10^{-4}.$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{\text{макс}} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{\text{мин}} \sin^2 \alpha = 2,81 \cdot 10^{-4}.$$

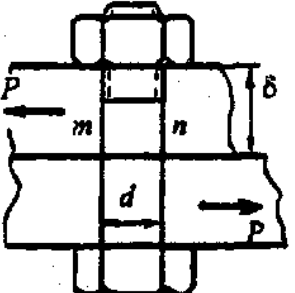
5. РАСЧЕТЫ ПРОСТЕЙШИХ СОЕДИНЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Типы соединений: болтовые, шпоночные, клиновые, заклепочные, сварные, деревянные врубки и т.д.

Виды деформирования: растяжение (сжатие), сдвиг и смятие.

Особенности расчетов:

- при работе конструкций чистый сдвиг практически не встречается. Сдвигу всегда сопутствует либо изгиб, либо растяжение (сжатие), однако технические расчеты проводят только на сдвиг, который для металлических элементов называют срезом, а для деревянных - скалыванием, считая, что по площади среза (скалывания) касательные напряжения распределены равномерно;
- смятие представляет собой поверхностное сжатие давящих друг на друга элементов конструкций. При проведении технических расчетов принимают, что смятие осуществляется по площади $F_{\text{см}}$, являющейся проекцией сминаемой поверхности на плоскость, перпендикулярную направлению давящей силы $P_{\text{см}}$, при равномерном распределении давления по этой площади;
- для рационального использования материала расчет соединений должен проводиться из условия равной прочности элементов, входящих в соединение. Если одна и та же площадь рассчитывается на два вида деформирования (например, на срез и смятие), то как окончательный результат принимается ее большее значение.

5.1		<p>Дано:</p> <p>P;</p> <p>b, δ;</p> <p>$[\sigma]_{\text{раст}}, [\sigma]_{\text{сж}}, [\tau]$,</p> <p>$[\sigma]_{\text{см}} = (2+2,5)[\sigma]_{\text{сж}}$</p>	<p>Рассчитать болтовое соединение - определить диаметр d болта, скрепляющего два листа (b и δ - ширина и толщина листа), растягиваемых силами P.</p>
-----	---	---	---

1. Определение диаметра болта из условия прочности на срез. Условие прочности болта на срез (по сечению mn) имеет вид

$$\tau = Q / F_{\text{ср}} \leq [\tau],$$

где $Q = P$ - перерезывающая сила, а $F_{\text{ср}} = \pi d^2 / 4$ - площадь среза. Для диаметра болта получаем

$$d \geq \sqrt{4P / \pi [\tau]}.$$

2. Определение диаметра болта из условия прочности на смятие. Расчетное соотношение в этом случае запишем в форме

$$\sigma_{\text{см}} = P_{\text{см}} / F_{\text{см}} \leq [\sigma]_{\text{см}}.$$

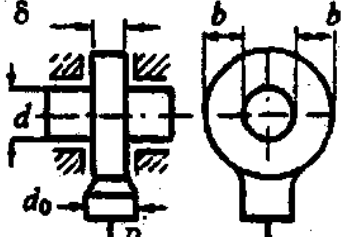
При $P_{\text{см}} = P$, $F_{\text{см}} = \delta \cdot d$ будем иметь

$$d \geq P / \delta [\sigma]_{\text{см}}.$$

Напомним, что из двух полученных значений диаметра болта нужно выбрать большее и округлить до нормированного.

3. Проверка прочности листа в ослабленном сечении при его растяжении (при выбранном значении диаметра болта).

$$\sigma = P / F_{\text{мин}} = P / \delta (b - d) \leq [\sigma]_{\text{раст}}$$

5.2		<p>Дано:</p> <p>$P = 32 \text{ кН}$,</p> <p>$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$,</p> <p>$[\tau] = 0,7 [\sigma]$,</p> <p>$[\sigma]_{\text{см}} = 2 [\sigma]$.</p>	<p>Рассчитать все необходимые размеры элементов соединения из условия их равной прочности.</p>
-----	---	---	--

1. Определение диаметра d_0 из условия прочности при растяжении.

$$\sigma = P / F_0 = 4P / \pi d_0^2 \leq [\sigma] \Rightarrow d_0 \geq \sqrt{4P / \pi [\sigma]} .$$

Из полученного соотношения следует

$$d_0 = 0,01596 \text{ м} \approx 1,6 \text{ см} .$$

2. Определение диаметра d из условия прочности на срез.

$$\tau = P / 2F_{\text{ср}} = 2P / \pi d^2 \leq [\tau] \Rightarrow d \geq \sqrt{2P / \pi [\tau]} ,$$

откуда можем получить

$$d = 0,0135 \text{ м} = 1,35 \text{ см} .$$

3. Определение размера δ из условия прочности на смятие.

$$\sigma_{\text{см}} = P / F_{\text{см}} = P / d\delta \leq [\sigma]_{\text{см}} \Rightarrow \delta \geq P / d [\sigma]_{\text{см}} .$$

Полученное соотношение позволяет найти

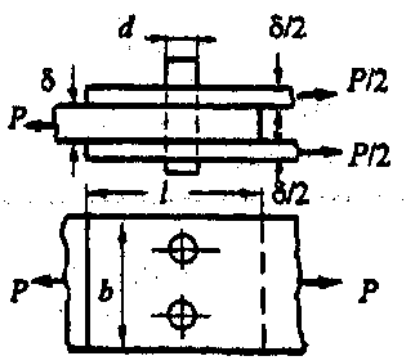
$$\delta = 0,0074 \text{ м} = 0,74 \text{ см} .$$

4. Определение размера b из условия прочности на растяжение в ослабленном сечении.

$$\sigma = P / F_{\text{мин}} = P / 2b\delta \leq [\sigma] \Rightarrow b \geq P / 2\delta [\sigma] .$$

Из полученного соотношения имеем

$$b = 0,0135 \text{ м} = 1,35 \text{ см} .$$

5.3		<p>Дано:</p> <p>$P = 480 \text{ кН}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau] = 120 \text{ МПа}$, $[\sigma]_{\text{см}} = 320 \text{ МПа}$.</p>	<p>Рассчитать все необходимые размеры элементов соединения из условия их равной прочности.</p>
-----	---	--	--

1. Определение диаметра заклепок из условия прочности на срез.

$$\tau = P / 4F_{\text{ср}} = P / \pi d^2 \leq [\tau] \Rightarrow d \geq \sqrt{P / \pi [\tau]} ,$$

откуда можем получить

$$d = 0,0357 \text{ м} = 3,57 \text{ см} .$$

2. Определение толщины листа δ из условия прочности заклепок на смятие.

$$\sigma_{\text{см}} = P / 2F_{\text{см}} = P / 2d\delta \leq [\sigma]_{\text{см}} \Rightarrow \delta \geq P / 2d [\sigma]_{\text{см}} .$$

Полученное соотношение позволяет найти

$$\delta = 0,021 \text{ м} = 2,1 \text{ см} .$$

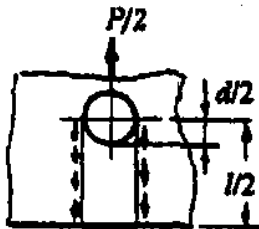
3. Определение ширины полосы b из условия прочности на растяжение в ослабленном сечении.

$$\sigma = P / F_{\text{мин}} = P / \delta(b - 2d) \leq [\sigma] \Rightarrow b \geq 2d + (P / \delta [\sigma]) .$$

Из полученного соотношения имеем

$$b = 0,2142 \text{ м} = 21,4 \text{ см} .$$

4. Определение длины l конца полосы из условия прочности на срез.



$$\tau = P / 4F_{\text{ср}} = P / 4\delta \left[(l/2) - (d/2) \right] \leq [\tau] \Rightarrow$$

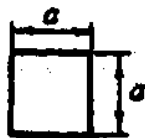
$$\Rightarrow l = d + (P / 2\delta [\tau]) ,$$

откуда можем получить

$$l = 0,131 \text{ м} = 13,1 \text{ см} .$$

5.4		<p>Дано:</p> <p>$P = 160 \text{ кН}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau] = 120 \text{ МПа}$, $[\sigma]_{\text{см}} = 320 \text{ МПа}$.</p>	<p>Рассчитать все необходимые размеры элементов соединения из условия их равной прочности.</p>
-----	--	--	--

1. Определение размера a из условия прочности при растяжении.

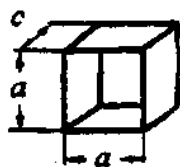


$$\sigma = P / F = P / a^2 \leq [\sigma] \Rightarrow a \geq \sqrt{P / [\sigma]} .$$

Из полученного соотношения следует

$$a = 0,0316 \text{ м} = 3,16 \text{ см} .$$

2. Определение размера c из условия прочности на срез.

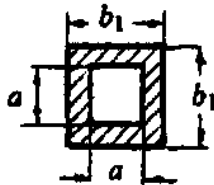


$$\tau = P / 4F_{\text{ср}} = P / 4ac \leq [\tau] \Rightarrow c \geq P / 4a[\tau],$$

откуда можем получить

$$d = 0,0106 \text{ м} = 1,06 \text{ см}.$$

3. Определение размера b_1 из условия прочности на смятие.



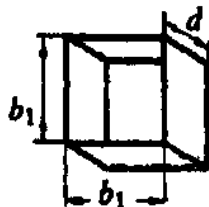
$$\sigma_{\text{см}} = P / F_{\text{см}} = P / (b_1^2 - a^2) \leq [\sigma]_{\text{см}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1 \geq \sqrt{a^2 + (P / [\sigma]_{\text{см}})}.$$

Полученное соотношение позволяет найти

$$b_1 = 0,0387 \text{ м} = 3,87 \text{ см}.$$

4. Определение размера d из условия прочности на срез.

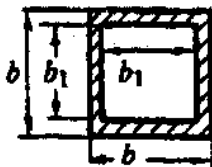


$$\tau = P / 4F_{\text{ср}} = P / 4b_1d \leq [\tau] \Rightarrow d \geq P / 4b_1[\tau],$$

откуда следует

$$d = 0,0086 \text{ м} = 0,86 \text{ см}.$$

5. Определение размера b из условия прочности при растяжении.



$$\sigma = P / F = P / (b^2 - b_1^2) \leq [\sigma] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \geq \sqrt{b_1^2 + (P / [\sigma])}.$$

Из полученного соотношения имеем

$$b = 0,05 \text{ м} = 5 \text{ см}.$$

5.5		<p>Дано: P; d, δ; $[\tau], [\sigma]_{\text{см}}$.</p>	<p>Рассчитать заклепочное соединение - определить необходимое число i заклепок (d - диаметр заклепки).</p>
-----	--	--	--

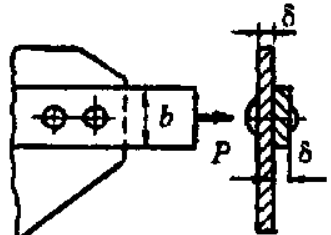
Считая, что усилие P распределяется равномерно между всеми заклепками, определим их число из условия прочности на срез.

$$\tau = P / i \cdot 2F_{\text{ср}} = 2P / i \cdot \pi d^2 \leq [\tau] \Rightarrow i \geq 2P / \pi d^2 [\tau].$$

Необходимое число заклепок может быть найдено и из условия прочности на смятие.

$$\sigma_{\text{см}} = P / i \cdot F_{\text{см}} = P / i \cdot d \delta \leq [\sigma]_{\text{см}} \Rightarrow i \geq P / \delta d [\sigma]_{\text{см}}$$

Каждое из найденных значений i нужно округлить до ближайшего целого числа и из этих двух чисел выбрать большее.

5.6		<p>Дано: $P = 30 \text{ кН}$, $b = 5 \text{ см}$, $\delta = 5 \text{ мм}$, $d = 2\delta$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau] = 100 \text{ МПа}$, $[\sigma]_{\text{см}} = 260 \text{ МПа}$.</p>	<p>Определить необходимое число i заклепок (d - диаметр заклепки). Проверить прочность полосы с учетом ее ослабления заклепками</p>
-----	---	--	---

Определим необходимое число заклепок (см. задачу 5.5):

- из условия прочности на срез

$$\tau = 4P / i \cdot \pi d^2 \leq [\tau] \Rightarrow i \geq 4P / \pi d^2 [\tau] \Rightarrow i \geq 3,82$$

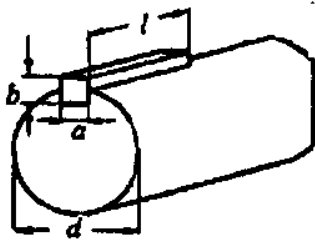
- из условия прочности на смятие

$$\sigma_{\text{см}} = P / i \cdot d \delta \leq [\sigma]_{\text{см}} \Rightarrow i \geq P / \delta d [\sigma]_{\text{см}} \Rightarrow i \geq 2,31$$

Необходимое число заклепок - 4.

Проверка полосы на разрыв по ослабленному сечению показывает, что условие прочности удовлетворяется:

$$\sigma = P / F_{\text{мин}} = P / (b - d) \delta \leq [\sigma] \Rightarrow 150 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}$$

5.7		<p>Дано: $N = 22,5 \text{ кВт}$ $n = 300 \text{ об/мин}$, $a = 12 \text{ мм}$, $b = 8 \text{ мм}$, $d = 40 \text{ мм}$. $[\tau] = 60 \text{ МПа}$.</p>	<p>Определить длину l шпонки при заданных размерах ее поперечного сечения a и b (N - мощность, передаваемая валом; n - число оборотов вала в минуту).</p>
-----	---	--	--

При вращении вала шпонка работает на срез. Условие прочности на срез запишем в известной форме

$$\tau = P / F_{\text{ср}} \leq [\tau]$$

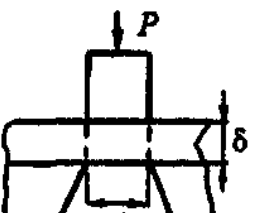
где P - перерезывающая сила, определяемая крутящим моментом, передаваемым валом, а $F_{\text{ср}} = a \cdot l$ - площадь среза.

В системе единиц СИ связь между крутящим моментом M (Н·м), мощностью N (Вт) и угловой скоростью вращения вала ω (1/сек) представляется соотношением $M = N / \omega$. Учитывая, что в рассматриваемой задаче $M = Pd$ и $\omega = 2\pi n / 60$, будем иметь $P = 60N / 2\pi nd$ и для отыскания длины шпонки получаем формулу

$$l = 60N / 2\pi nda [\tau]$$

Подставляя исходные данные в представленное соотношение, находим

$$l = 0,02488 \text{ м} \approx 25 \text{ мм}.$$

5.8		<p>Дано:</p> <p>$d = 30 \text{ мм}$,</p> <p>$[\sigma]_{\text{сж}} = 400 \text{ МПа}$,</p> <p>$\tau_{\text{пред}} = 500 \text{ МПа}$.</p>	<p>Определить наибольшую толщину листа δ, который может прорубить пробойник, не разрушаясь.</p>
-----	--	---	---

Условие прорезания листа в рассматриваемой задаче будет иметь вид

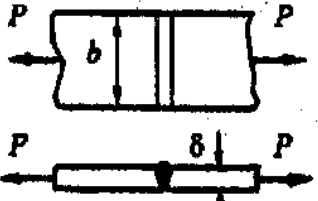
$$\tau = P / F_{\text{ср}} \geq \tau_{\text{пред}},$$

где $F_{\text{ср}} = \pi d \cdot \delta$ - площадь среза, а значение силы P должно быть найдено из условия прочности пробойника на сжатие

$$P / F = P / (\pi d^2 / 4) \leq [\sigma]_{\text{сж}} \Rightarrow P = \pi d^2 [\sigma]_{\text{сж}} / 4.$$

С учетом найденного значения силы P получаем

$$\delta \leq d [\sigma]_{\text{сж}} / 4 \tau_{\text{пред}} = 6 \text{ мм}.$$

5.9		<p>Дано:</p> <p>$P = 100 \text{ кН}$,</p> <p>$\delta = 10 \text{ мм}$,</p> <p>$[\sigma] = 140 \text{ МПа}$,</p> <p>$[\sigma]_{\text{эл}} = 100 \text{ МПа}$.</p>	<p>Определить необходимую ширину b полос, сваренных встык, и процент использования материала полос.</p>
-----	---	--	--

Поскольку шов при сварке встык работает на растяжение, условие прочности шва будет иметь вид:

$$\sigma = P / F_{\text{шв}} = P / l_{\text{шв}} \cdot \delta \leq [\sigma]_{\text{эл}} \Rightarrow l_{\text{шв}} \geq P / \delta [\sigma]_{\text{эл}},$$

где $l_{\text{шв}}$ - расчетная длина сварного шва; $[\sigma]_{\text{эл}}$ - допускаемое напряжение для материала шва при электрической сварке. С учетом исходных данных получаем

$$l_{\text{шв}} \geq 0,1 \text{ м} = 10 \text{ см.}$$

Отметим, что при расчете сварных швов принято различать расчетную длину сварного шва $l_{\text{шв}}$ и реальную $l = (l_{\text{шв}} + 10 \text{ мм})$, увеличенную на 10 мм из-за возможного непровара шва по концам. С учетом данного обстоятельства имеем

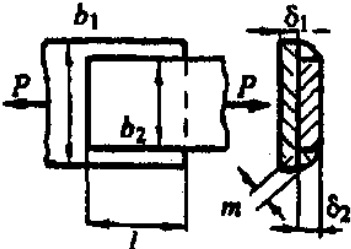
$$b = l = 11 \text{ см.}$$

При принятой ширине $b = 11 \text{ см}$ лист безопасно выдерживает растягивающее усилие

$$R_1 = b \cdot \delta [\sigma] = 154 \text{ кН.}$$

Процент использования материала полосы

$$(P / R_1) \cdot 100\% = 65\%.$$

5.10		<p>Дано: $P = 252 \text{ кН}$, $\delta_1 = 10 \text{ мм}$, $\delta_2 = 12 \text{ мм}$, $b_1 = 180 \text{ мм}$, $b_2 = 150 \text{ мм}$, $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$, $[\tau]_{\text{эл}} = 72 \text{ МПа}$.</p>	<p>Рассчитать длину l фланговых (боковых) сварных швов и процент использования материала полос.</p>
------	---	---	--

В расчетной практике сварных швов принято считать, что угловые швы (типа представленных в рассматриваемой задаче) имеют форму равнобедренного прямоугольного треугольника и их разрушение проходит по самому слабому сечению, определяемому высотой m этого треугольника. Легко получить, что $m = \delta \cos 45^\circ = 0,7\delta$.

Боковые (фланговые) сварные швы работают на срез и условие прочности шва имеет вид:

$$\tau = P / F_{\text{ср}} = P / 2ml_{\text{шв}} = P / 1,4\delta_2 l_{\text{шв}} \leq [\tau]_{\text{эл}},$$

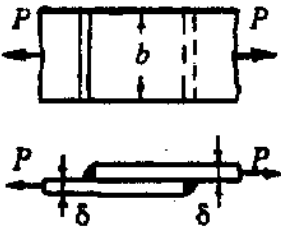
где $[\tau]_{\text{эл}}$ - допускаемое касательное напряжение для материала шва при электрической сварке. Из условия прочности следует

$$l_{\text{шв}} \geq P / 1,4\delta_2 [\tau]_{\text{эл}} = 0,208 \text{ м} \approx 21 \text{ см.}$$

Необходимая длина сварного шва $l = l_{\text{шв}} + 10 \text{ мм} = 22 \text{ см.}$

Процент использования материала полос равен 100%. Действительно

$$P / b_1 \cdot \delta_1 = 140 = [\sigma] \quad \text{и} \quad P / b_2 \cdot \delta_2 = 140 = [\sigma].$$

5.11		<p>Дано:</p> <p>$\delta = 10 \text{ мм},$ $b = 180 \text{ мм},$ $[\sigma] = 140 \text{ МПа},$ $[\tau]_{\text{эл}} = 90 \text{ МПа}.$</p>	<p>Определить наибольшую растягивающую силу P, которую можно приложить к сварному соединению внахлестку двумя торцевыми (фронтальными) швами, и степень использования материала полос.</p>
------	---	---	---

Торцевые (фронтальные) швы при сварке внахлестку работают на срез (см. задачу 5.10) и определяющим здесь является соотношение

$$\tau = P / 1,4\delta l_{\text{шв}} \leq [\tau]_{\text{эл}} \quad \Rightarrow \quad P \leq 1,4\delta l_{\text{шв}} [\tau]_{\text{эл}},$$

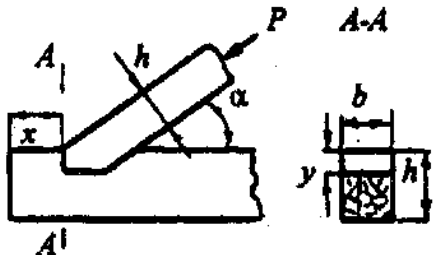
где $l_{\text{шв}} = b - 10 \text{ мм} = 170 \text{ мм}$. С учетом исходных данных получаем, что наибольшая растягивающая сила

$$P = 214 \text{ кН}.$$

Определяя напряжения в полосе при найденной растягивающей силе P , будем иметь

$$\sigma = P / b \cdot \delta = 118,9 \text{ МПа.}$$

Процент использования материала полос $(\sigma / [\sigma]) \cdot 100\% = 85\%$.

5.12		<p>Дано:</p> <p>$P,$ $b, h, \alpha,$ $[\sigma]_{\text{см}}, [\tau].$</p>	<p>Определить необходимую глубину y врубки и длину x конца затяжки опорного узла стропильной фермы.</p>
------	---	---	---

Необходимые размеры опорного узла стропильной фермы определим из условий прочности:

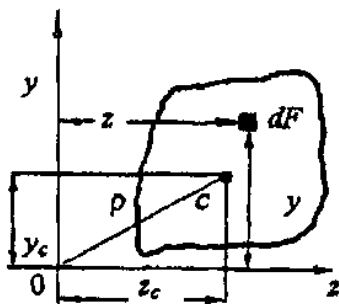
- на скалывание конца затяжки узла горизонтальной составляющей силы P

$$\tau = P \cos \alpha / F_{\text{СК}} = P \cos \alpha / b \cdot x \leq [\tau] \Rightarrow x \geq P \cos \alpha / b [\tau] .$$

- на смятие затяжки горизонтальной составляющей силы P

$$\sigma_{\text{СМ}} = P \cos \alpha / F_{\text{СМ}} = P \cos \alpha / b \cdot y \leq [\sigma]_{\text{СМ}} \Rightarrow y \geq P \cos \alpha / b [\sigma]_{\text{СМ}} .$$

6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ



Площадь сечения: $F = \int_F dF$.

Статические моменты сечения:

$$S_z = \int_F y dF = y_c \cdot F ,$$

$$S_y = \int_F z dF = z_c \cdot F ,$$

где y_c , z_c - координаты центра тяжести сечения. Статические моменты сечения относительно центральных осей равны нулю.

Моменты инерции сечения:

- осевые (или линейные, или экваториальные)

$$I_z = \int_F y^2 dF , \quad I_y = \int_F z^2 dF ;$$

- центробежный

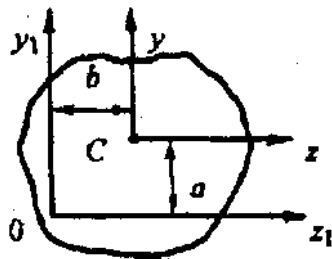
$$I_{yz} = I_{zy} = \int_F yz dF ;$$

- полярный

$$I_p = \int_F \rho^2 dF = I_y + I_z .$$

Главные, центральные, главные центральные оси и соответствующие моменты инерции.

Моменты инерции для параллельных осей, одни из которых центральные:



$$I_{z_1} = I_z + a^2 F, \quad I_{y_1} = I_y + b^2 F,$$

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + abF; \quad I_{p_1} = I_p + (a^2 + b^2) F.$$

Моменты инерции простейших сечений для главных центральных осей:

- прямоугольник (ось y параллельна высоте h сечения, ось z - его ширине b)

$$I_z = bh^3 / 12, \quad I_y = b^3 h / 12;$$

- равнобедренный треугольник (ось y параллельна высоте h сечения, ось z - его основанию b)

$$I_z = bh^3 / 36, \quad I_y = b^3 h / 48;$$

- круг (диаметр d)

$$I_z = I_y = \pi d^4 / 64, \quad I_p = \pi d^4 / 32;$$

- кольцо (d - наружный диаметр, d_0 - внутренний)

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64} \left[1 - \left(\frac{d_0}{d} \right)^4 \right].$$

6.1		Дано: a	Определить положение центра тяжести сечения.
-----	--	-----------	--

Координаты центра тяжести сечения вычислим, используя определение статических моментов сечения

$$S_z = \int_F y dF = y_c \cdot F, \quad S_y = \int_F z dF = z_c \cdot F.$$

Имеем: $z_c = S_y / F, \quad y_c = S_z / F.$

Площадь сечения найдем, разбивая его на два прямоугольника:

$$F = F_1 + F_2 = 4a \cdot 2a + 4a \cdot a = 12a^2.$$

Для этих же прямоугольников вычисляем статические моменты:

$$S_{z1} = \int_{F_1} y dF_1 = 2a \int_0^{4a} y dy = 16a^3, \quad S_{y1} = \int_{F_1} z dF_1 = 4a \int_0^{2a} z dz = 8a^3,$$

$$S_{z2} = \int_{F_2} y dF_2 = 4a \int_0^a y dy = 2a^3, \quad S_{y2} = \int_{F_2} z dF_2 = a \int_{2a}^{6a} z dz = 16a^3,$$

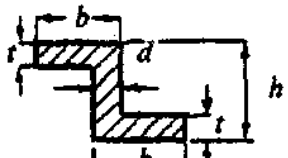
При отыскании статических моментов прямоугольников можем использовать и соотношения типа

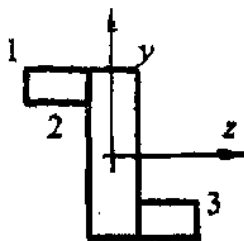
$$S_{z1} = F_1 y_{c1} = 4a \cdot 2a \cdot 2a = 16a^3,$$

$$S_{y2} = F_2 z_{c2} = 4a \cdot a \cdot 4a = 16a^3.$$

Окончательно имеем, что $S_z = 18a^3$, $S_y = 24a^3$ и

$$z_c = 2a, \quad y_c = 1,5a.$$

6.2		<p>Дано:</p> <p>$h = 100$ мм,</p> <p>$b = 40$ мм,</p> <p>$t = 10$ мм,</p> <p>$d = 8$ мм.</p>	<p>Определить моменты инерции сечения для центральных осей.</p>
-----	--	--	---



Положение центра тяжести и, соответственно, положение центральных осей для данного сечения известны.

Моменты инерции сечения относительно осей y и z определим, разбивая его на 3

прямоугольника и используя формулы перехода к параллельным осям. Имеем:

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3},$$

$$\text{где } I_{z1} = I_{z3} = \frac{(b-d)t^3}{12} + \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)^2 \cdot t(b-d), \quad I_{z2} = \frac{dh^3}{12};$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3},$$

$$\text{где } I_{y1} = I_{y3} = \frac{t(b-d)^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot t(b-d), \quad I_{y2} = \frac{hd^3}{12}.$$

$$\text{Окончательно получаем } I_z = 196,8 \text{ см}^4, \quad I_y = 31,5 \text{ см}^4.$$

7. КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫХ СТЕРЖНЕЙ (ВАЛОВ)

Внешние и внутренние силовые факторы:

- величина внешнего скручивающего момента M (Н·м) при заданных передаваемой мощности N и числе n (об/мин) определяется соотношениями $M = 9736 N / n$ (N в кВт) или $M = 7162 N / n$ (N в л.с.). При задании мощности в ваттах и угловой скорости вращения вала ω в 1/сек скручивающий момент равен $M = N / \omega$ (Н·м);
- метод сечений и определение внутреннего силового фактора (крутящего момента) M_x . Крутящий момент M_x принимается положительным, если со стороны внешней нормали к сечению он направлен против часовой стрелки.

Исходные положения и характер деформирования бруса:

- гипотеза плоских сечений, сохранение прямолинейности радиусов, неизменность расстояния между сечениями;
- характер деформирования - чистый сдвиг;
- угловая деформация $\gamma_{xt} = r \vartheta$, где $\vartheta = d\phi / dx$ - относительный угол закручивания;
- относительный угол закручивания $\vartheta = M_x / GI_p$;
- угол закручивания (взаимный угол поворота сечений вала, отстоящих друг от друга на расстоянии x) $\phi = \int_0^x \frac{M_x}{GI_p} dx$.

Напряжения при кручении:

- касательное напряжение $\tau_{xt} = M_x r / I_p$;
- максимальное касательное напряжение $(\tau_{xt})_{\max} = M_x / W_p$, где $W_p = I_p / (d / 2)$ - полярный момент сопротивления сечения;
- напряженное состояние при кручении.

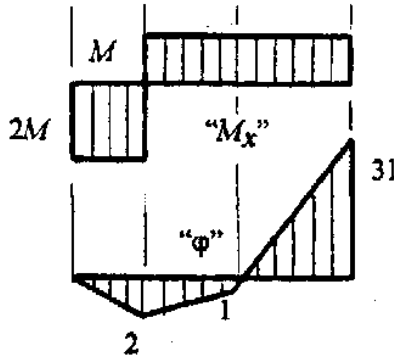
Расчеты на прочность, на жесткость.

Статически неопределимые задачи.

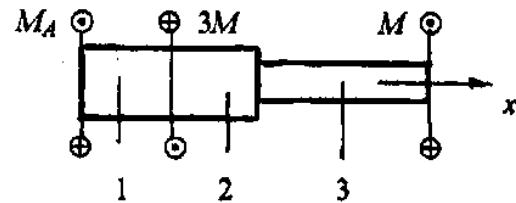
Диаграмма кручения:

- сравнение с диаграммой растяжения;
- типы разрушения при кручении для пластичных и хрупких материалов.

7.1		<p>Дано: $M, D = 2d, a, G$</p>	<p>Построить эпюры крутящих моментов M_x и углов закручивания φ.</p>
-----	--	--	--



1. Определение реакции в опоре.

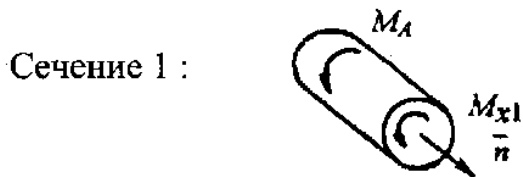


В соответствии с уравнением статики (уравнением моментов

относительно оси x) имеем:

$$M_A - 3M + M = 0 \Rightarrow M_A = 2M.$$

2. Построение эпюры крутящих моментов.



Из уравнения равновесия

$$M_A + M_{x1} = 0$$

получаем $M_{x1} = -2M$.

Сечение 2: $M_A - 3M + M_{x2} = 0 \Rightarrow M_{x2} = M$.

Сечение 3: $M_A - 3M + M_{x3} = 0 \Rightarrow M_{x3} = M$.

3. Эпюру углов закручивания построим с помощью формулы

$$\varphi = \int_0^x \left(M_x / GI_p \right) dx,$$

проводя интегрирование в пределах каждого участка. Поскольку полярный момент инерции имеет разные значения на участках скручиваемого стержня ($I_{p1} = \pi D^4 / 32$, $I_{p2} =$

$= \pi d^4 / 32$; $I_{p1} = 16I_{p2}$), построения проведены в Ma / GI_{p1} .

Участок 1: $\varphi_1 = \int_0^x \left(M_{x1} / GI_{p1} \right) dx, \quad 0 \leq x \leq a.$

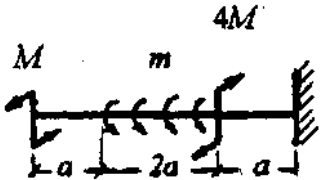
$$\varphi_1|_{x=0} = 0, \quad \varphi_1|_{x=a} = -2Ma / GI_{p1}.$$

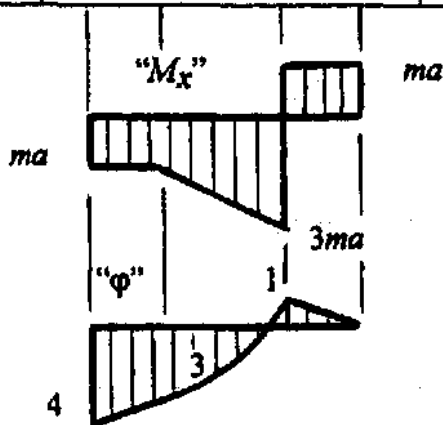
Участок 2 : $\varphi_2 = \varphi_1|_{x=a} + \int_0^x (M_{x2} / GI_{p1}) dx, \quad 0 \leq x \leq a .$

$\varphi_2|_{x=0} = -2Ma / GI_{p1} , \quad \varphi_2|_{x=a} = -Ma / GI_{p1} .$

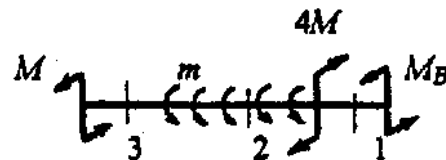
Участок 3 : $\varphi_3 = \varphi_2|_{x=a} + \int_0^x (16M_{x3} / GI_{p1}) dx, \quad 0 \leq x \leq 2a .$

$\varphi_3|_{x=0} = -Ma / GI_{p1} , \quad \varphi_3|_{x=2a} = 31Ma / GI_{p1} .$

7.2		<p>Дано: $M, m = \frac{M}{a}, a, G$</p>	<p>Построить эпюры M_x и φ и определить наибольшее касательное напряжение.</p>
-----	---	---	--



1. Определение реакции в опоре.



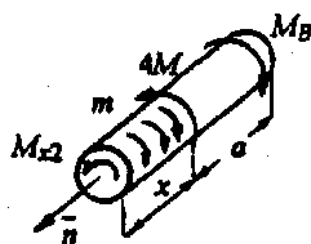
$M + m \cdot 2a - 4M + M_B = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_B = ta .$

2. Построение эпюры крутящих моментов.

Сечение 1 : $-M_B + M_{x1} = 0 \Rightarrow M_{x1} = ta .$

Сечение 2 : $-M_B + 4M - m \cdot x + M_{x2} = 0 .$
 $M_{x2} = mx - 3ta, \quad (0 \leq x \leq 2a) .$



$M_{x2}|_{x=0} = -3ta ,$

$M_{x2}|_{x=2a} = -ta .$

Сечение 3 : $M_{x3} + M = 0 \Rightarrow M_{x3} = -ta .$

3. Эпюру φ строим в единицах ta^2 / GI_p .

Участок 1 : $\varphi_1 = \int_0^x (M_{x1} / GI_p) dx, \quad 0 \leq x \leq a .$

$$\varphi_1'|_{x=0} = 0, \quad \varphi_1|_{x=a} = ma^2 / GI_p.$$

Участок 2: $\varphi_2 = \varphi_1|_{x=a} + \int_0^x (M_{x2} / GI_p) dx, \quad 0 \leq x \leq 2a.$

$$\varphi_2|_{x=0} = ma^2 / GI_p, \quad \varphi_2|_{x=2a} = -3ma^2 / GI_p.$$

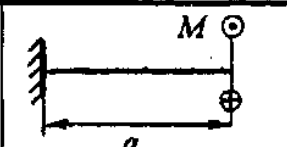
(функция $\varphi_2 = \varphi_2(x)$ - квадратичная выпуклостью вниз)

Участок 3: $\varphi_3 = \varphi_2|_{x=2a} + \int_0^x (M_{x3} / GI_p) dx, \quad 0 \leq x \leq a.$

$$\varphi_3'|_{x=0} = -3ma^2 / GI_p, \quad \varphi_3|_{x=a} = -4ma^2 / GI_p.$$

4. Наибольшее касательное напряжение определим по формуле $(\tau_{xt})_{\max} = (M_x)_{\max} / W_p$, где $W_p = I_p / (d/2) = \pi d^3 / 16$ - полярный момент сопротивления сечения. Будем иметь

$$(\tau_{xt})_{\max} = 48ma / \pi d^3.$$

7.3		<p>Дано: $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м},$ $[\tau] = 60 \text{ МПа}.$</p>	<p>Определить размеры кругового (d) и кольцевого ($d_0 / d = 7/8$) сечений. Сравнить вес стержней.</p>
-----	--	---	--

Условие прочности стержня при кручении имеет вид:

$$(\tau_{xt})_{\max} = (M_x)_{\max} / W_p \leq [\tau].$$

В рассматриваемой задаче крутящий момент $M_x = M$. Размеры сечения будем отыскивать через его полярный момент сопротивления

$$W_p = I_p / (d/2) \geq M / [\tau] = 0,167 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 167 \text{ см}^3.$$

Для сечения в форме круга имеем:

$$W_p = \pi d^3 / 16 = 167 \text{ см}^3 \Rightarrow d = 9,43 \text{ см} \Rightarrow F_1 = 69,8 \text{ см}^2.$$

Для кольцевого сечения -

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d_0}{d} \right)^4 \right] = 167 \text{ см}^3 \Rightarrow d = 12,7 \text{ см} \Rightarrow F_2 = 29,4 \text{ см}^2.$$

Сравнение весов стержней следует из отношения их площадей поперечного сечения

$$P_1 / P_2 = F_1 / F_2 = 2,37 \text{ - кольцевое сечение гораздо экономичнее.}$$

7.4		<p>Дано:</p> $N_1 = 45 \text{ кВт,}$ $N_2 = 30 \text{ кВт,}$ $n = 360 \text{ об/мин,}$ $[\tau] = 20 \text{ МПа,}$ $a = 3 \text{ м, } b = 2 \text{ м.}$	<p>Определить размеры сечений участков вала и их углы закручивания ($G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$).</p>
-----	--	--	---

Мощность N_0 можно рассматривать как подаваемую на вал, а мощности N_1 и N_2 - как снимаемые. Моменты, соответствующие N_1 и N_2 , определим по известной формуле:

$$M_1 = 9736N_1 / n = 1217 \text{ Н·м, } M_2 = 9736N_2 / n = 811,3 \text{ Н·м.}$$

Момент M_0 вычислим из условия равновесия вала (условия равномерного вращения)

$$M_0 = M_1 + M_2 = 2028,3 \text{ Н·м.}$$

Можно видеть, что для участка вала с диаметром d_1 крутящий момент $M_{x1} = M_0$, а для участка с диаметром d_2 - $M_{x2} = M_2$. Обеспечивая прочность вала на первом участке, будем иметь

$$W_{p1} = M_0 / [\tau] = 101,4 \text{ см}^3 \Rightarrow d_1 = 8,0 \text{ см.}$$

Аналогичным образом для второго участка получим

$$W_{p2} = M_2 / [\tau] = 40,6 \text{ см}^3 \Rightarrow d_2 = 5,9 \text{ см.}$$

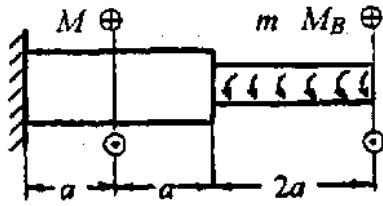
Углы закручивания вала по участкам таковы:

$$\varphi_1 = M_0 a / GI_{p1} = 18,6 \cdot 10^{-3}, \quad \varphi_2 = M_2 b / GI_{p2} = 16,74 \cdot 10^{-3}.$$

Угол закручивания всего вала равен

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 35,34 \cdot 10^{-3} = 2,03^\circ.$$

7.5		<p>Дано:</p> $M = ma,$ $D = 2d,$ $a,$ $G.$	<p>Построить эпюры M_x и φ.</p>
-----	--	---	---



1. Рассматриваемая задача - статически неопределимая. Степень статической неопределимости равна 1: имеем 2 неизвестные реакции опор и только одно уравнение статики. Для решения задачи

используем следующую процедуру (см. задачу 3.3): отбросим правое закрепление B и введем в рассмотрение реакцию M_B . Полученная задача эквивалентна исходной при условии, что угол поворота сечения B равен нулю:

$$\varphi_B = 0 \Rightarrow (\varphi_B)_M + (\varphi_B)_m + (\varphi_B)_{M_B} = 0,$$

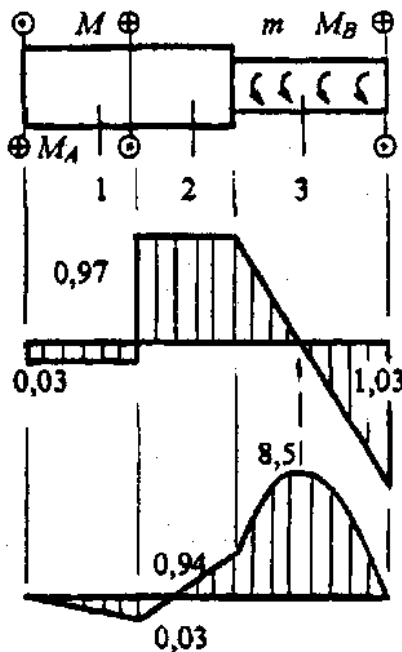
где $(\varphi_B)_M$ - угол поворота сечения B от действия только момента M и т.д. Вычисляя каждое слагаемое, будем иметь

$$(\varphi_B)_M = Ma / GI_{p1},$$

$$(\varphi_B)_m = - \int_0^{2a} \frac{mx}{GI_{p2}} dx - \frac{2ma \cdot 2a}{GI_{p1}} = - \frac{36ma^2}{GI_{p1}},$$

$$(\varphi_B)_{M_B} = \frac{M_B \cdot 2a}{GI_{p1}} + \frac{M_B \cdot 2a}{GI_{p2}} = \frac{34M_B a}{GI_{p1}}.$$

При вычислениях учтено, что $I_{p1} = 16I_{p2}$. Решение уравнения относительно реакции M_B позволяет получить $M_B = 35ma / 34$.



Отбросим теперь левое закрепление и введем в рассмотрение реакцию M_A . Из уравнения равновесия вала

$$M_A - M + m \cdot 2a - M_B = 0$$

получаем $M_A = ma / 34$.

2. Построение эпюры M_x .

Сечение 1: $M_{x1} + M_A = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow M_{x1} = -0,03ma.$$

Сечение 2: $M_A - M + M_{x2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow M_{x2} = 0,97ma.$$

Сечение 3: $M_A - M + mx + M_{x3} = 0$

$$\Rightarrow M_{x3} = 0,97ma - mx.$$

Для третьего участка имеем линейный закон изменения момента M_{x3} при $0 \leq x \leq 2a$. На границах участка - $M_{x3}|_{x=0} = 0,97ma$, $M_{x3}|_{x=2a} = -1,03ma$. Эпюра M_x построена в единицах ma .

3. Эпюру φ строим в единицах ma^2 / GI_{p1} .

$$\text{Участок 1: } \varphi_1 = \int_0^x \left(M_{x1} / GI_{p1} \right) dx, \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$\varphi_1|_{x=0} = 0, \quad \varphi_1|_{x=a} = -0,03ma^2 / GI_{p1}.$$

$$\text{Участок 2: } \varphi_2 = \varphi_1|_{x=a} + \int_0^x \left(M_{x2} / GI_{p1} \right) dx, \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$\varphi_2|_{x=0} = -0,03ma^2 / GI_{p1}, \quad \varphi_2|_{x=a} = 0,94ma^2 / GI_{p1}.$$

$$\text{Участок 3: } \varphi_3 = \varphi_2|_{x=a} + \int_0^x \left(16M_{x3} / GI_{p1} \right) dx, \quad 0 \leq x \leq 2a.$$

Функция $\varphi_3 = \varphi_3(x)$ - квадратичная выпуклостью вверх с максимумом при $x = 0,97a$: $\varphi_3|_{x=0,97a} = 8,5ma^2 / GI_{p1}$. На концах интервала

$$\varphi_3|_{x=0} = 0,94ma^2 / GI_{p1}, \quad \varphi_3|_{x=2a} = 0.$$

7.6		<p>Дано: P, GI_p, Δ, a, l.</p>	<p>Определить вертикальное перемещение δ точки приложения силы P.</p>
-----	--	---	--

При небольших значениях силы P закручивается только стержень 2. В этом случае $M_2 = P \cdot a$ и перемещение δ определяется соотношением

$$\Delta \geq \delta = \varphi_2 \cdot a = Pa^2 l / GI_p.$$

Если $P > \Delta GI_p / a^2 l$, то система становится статически неопределимой. Для отыскания крутящих моментов M_1 и M_2 в стержнях запишем следующие два уравнения:

$$M_1 + M_2 = Pa \quad - \text{уравнение статики,}$$

$$\varphi_2 \cdot a - \varphi_1 \cdot a = \Delta \quad - \text{уравнение совместности перемещений точек системы.}$$

Второе из уравнений с учетом соотношения $\varphi = Ml / GI_p$ приводится к виду:

$$M_2 - M_1 = \Delta GI_p / al .$$

Решение полученной системы уравнений относительно крутящих моментов позволяет получить

$$M_1 = \frac{Pa}{2} - \frac{\Delta GI_p}{2al} \quad , \quad M_2 = \frac{Pa}{2} + \frac{\Delta GI_p}{2al} .$$

Перемещение δ в этом случае будет

$$\delta = \varphi_2 \cdot a = \frac{1}{2} \left(\frac{Pa^2 l}{GI_p} + \Delta \right) .$$

8. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Классификация внешних сил:

- сосредоточенные сила и момент;
- распределенная нагрузка.

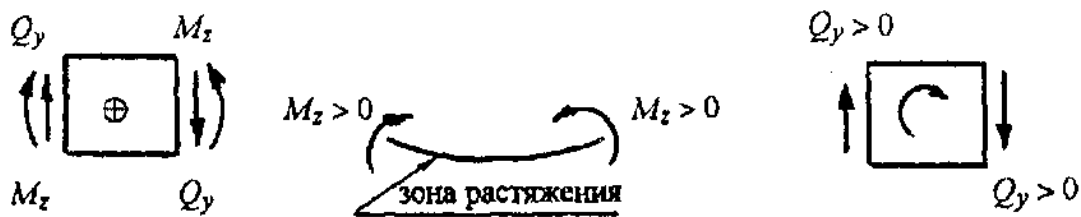
Определения плоского, косоугольного и плоского поперечного изгибов.

Классификация опор и балок:

- опоры шарнирно подвижная, шарнирно неподвижная, жесткое закрепление (заделка);
- балки статически определимые и неопределимые.

Внутренние силовые факторы:

- метод сечений и определение изгибающего момента M_z и перерезывающей силы Q_y ;
- правила знаков для M_z и Q_y



Дифференциальные зависимости Журавского:

$$dM_z / dx = Q_y, \quad dQ_y / dx = q \Rightarrow d^2 M_z / dx^2 = q;$$

- основные следствия из зависимостей Журавского и их использование при построении или проверке правильности построения эпюр M_z и Q_y .

Чистый изгиб:

- определение чистого изгиба;
- исходные гипотезы (гипотеза плоских сечений; растяжение и сжатие волокон, параллельных оси балки; наличие нейтрального слоя);
- нормальное напряжение $\sigma_x = (M_z / I_z) y$, где y - ордината точки, в которой определяется напряжение;
- максимальные напряжения растяжения и сжатия

$$(\sigma_x)_{\text{макс}}^p = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\text{макс}}^p = \frac{M_z}{W_z^p} \quad \left(W_z^p = \frac{I_z}{y_{\text{макс}}^p} \right),$$

$$(\sigma_x)_{\text{макс}}^{\text{сж}} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\text{макс}}^{\text{сж}} = \frac{M_z}{W_z^{\text{сж}}} \quad \left(W_z^{\text{сж}} = \frac{I_z}{y_{\text{макс}}^{\text{сж}}} \right),$$

где $y_{\text{макс}}^p$, $y_{\text{макс}}^{\text{сж}}$ - ординаты наиболее удаленных от нейтральной оси точек в зонах растяжения и сжатия. W_z^p и $W_z^{\text{сж}}$ - осевые моменты сопротивления сечения;

Поперечный изгиб:

- определение поперечного изгиба;
- нормальное напряжение $\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y$;
- касательное напряжение $\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^*(y)}{I_z b(y)}$, где $S_z^*(y)$ - статический момент части сечения, расположенной выше уровня y , а $b(y)$ - ширина сечения на этом уровне;

- эпюры нормальных и касательных напряжений в сечениях различного типа;

Расчет на прочность при плоском поперечном изгибе:

- $\tau_{xy} \cong 0$, $[\sigma]_p \neq [\sigma]_{сж}$

$$(\sigma_x)_{\max}^p = |M_z|_{\max} / W_z^p \leq [\sigma]_p ,$$

$$(\sigma_x)_{\max}^{сж} = |M_z|_{\max} / W_z^{сж} \leq [\sigma]_{сж} ;$$

- $\tau_{xy} \cong 0$, $[\sigma]_p = [\sigma]_{сж} = [\sigma]$ и $W_z^p = W_z^{сж} = W_z$

$$|\sigma_x|_{\max} = |M_z|_{\max} / W_z \leq [\sigma] ;$$

- $\tau_{xy} \sim \sigma_x$

расчет на прочность ведется с использованием одной из теорий прочности.

Перемещения при изгибе:

- дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (обычно используют при условии $EI_z = \text{const}$)

$$EI_z v''(x) = M_z(x) ;$$

- интегрирование дифференциального уравнения прогибов. Уравнение углов поворота

$$EI_z \vartheta = EI_z v'(x) = \int M_z(x) dx + C_1$$

и прогибов

$$EI_z v(x) = \int \left[\int M_z(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2 .$$

Граничные условия (условия закрепления концов балки) и определение постоянных C_1 и C_2 .

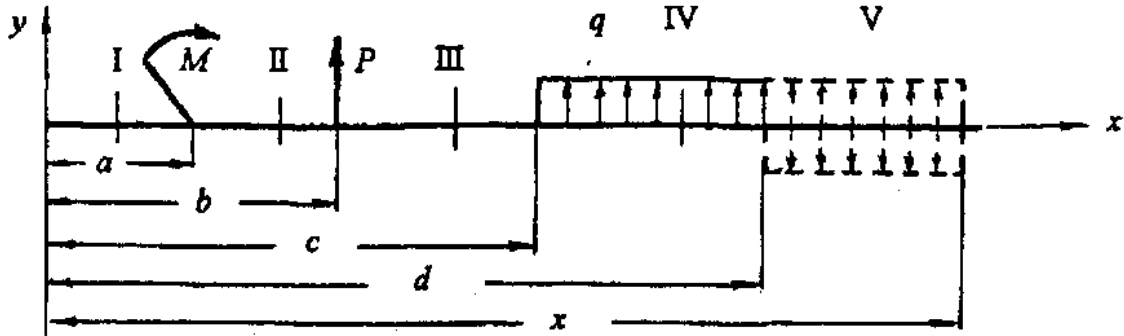
- универсальное уравнение упругой линии (определение перемещений методом начальных параметров).

За начальные параметры принимаются прогиб v_0 и угол поворота ϑ_0 левого концевого поперечного сечения балки, в центре тяжести которого расположено начало координат. Их значения находят из условий закрепления балки.

Целесообразно записывать уравнение упругой линии для произвольного сечения последнего участка балки, включая нагрузки в

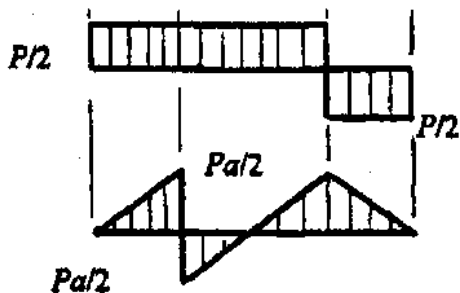
той последовательности, в которой они расположены от начала координат.

Если на балке имеется распределенная нагрузка, не доходящая до сечения, где определяется прогиб (угол поворота), то ее продляют до этого сечения и прикладывают противоположно направленную компенсирующую нагрузку той же интенсивности.



$$EI_z v = EI_z v_0 + EI_z \vartheta_0 x \Big|_I + M \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_II + P \frac{(x-b)^3}{6} \Big|_III + q \frac{(x-c)^4}{24} \Big|_IV - q \frac{(x-d)^4}{24} \Big|_V + \dots$$

8.1		<p>Дано:</p> <p>$P, a,$ $M = Pa.$</p>	<p>Построить эпюры перерезывающих сил Q_y и изгибающих моментов M_z</p>
-----	--	---	---



1. Определение реакций опор.
Уравнения равновесия ($\sum Y=0$
и $\sum M_A=0$) имеют вид:

$$R_A - P + R_B = 0 ,$$

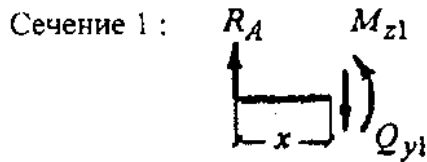
$$M - P \cdot 3a + R_B \cdot 4a = 0 .$$

Решая систему уравнений относительно реакций опор, получим

$$R_B = P/2 , \quad R_A = P/2 .$$

2. Построение эпюр Q_y и M_z .

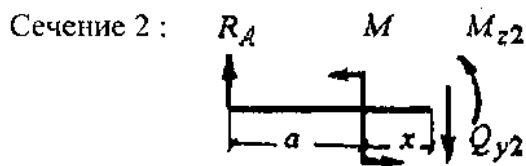
Для упрощения соотношений для перерезывающих сил и изгибающих моментов в сечениях 1 и 2 определим их, отбрасывая правую часть балки, а в сечении 3 - левую. При отыскании M_z здесь и далее уравнение моментов будем записывать всегда относительно сделанного сечения.



$$Q_{y1} = R_A = P/2,$$

$$M_{z1} = R_A \cdot x = Px/2.$$

$$(0 \leq x \leq a)$$



$$Q_{y2} = P/2,$$

$$M_{z2} = P(x-a)/2.$$

$$(0 \leq x \leq 2a)$$



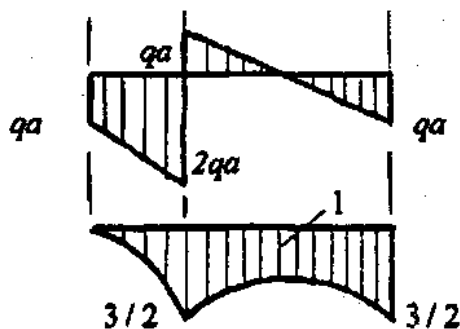
$$Q_{y3} = -R_B = -P/2,$$

$$M_{z3} = R_B \cdot x = Px/2.$$

$$(0 \leq x \leq a)$$

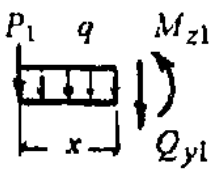
Отметим, что, в соответствии с принятым порядком прохождения участков, на 3-м участке ось x направлена справа налево (значение $x=0$ принадлежит сечению B). В этом случае $dM_z / dx = -Q_y$.

8.2		<p>Дано:</p> <p>$q, a,$</p> <p>$P_1 = qa,$</p> <p>$P_2 = 3qa.$</p>	<p>Построить эпюры</p> <p>Q_y и $M_z.$</p>
-----	--	---	--



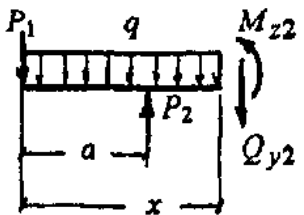
В рассматриваемой задаче значения Q_y и M_z в сечениях балки определим, проходя участки слева направо. При этом нет необходимости предварительно вычислять реакции опоры B .

Эпюру моментов M_z построим в единицах qa^2 .

Сечение 1: 

$$Q_{y1} = -P_1 - qx = -q(a+x),$$

$$M_{z1} = -P_1 x - \frac{qx^2}{2} = -qax - \frac{qx^2}{2} \quad (0 \leq x \leq a)$$

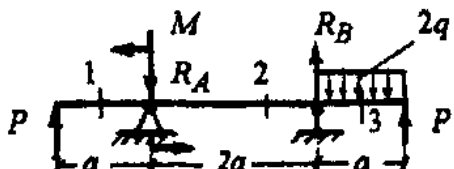
Сечение 2: 

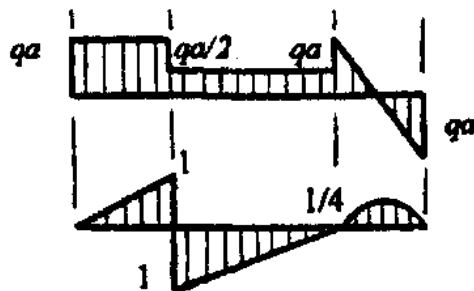
$$Q_{y2} = 2qa - qx,$$

$$M_{z2} = -3qa^2 + 2qax - \frac{qx^2}{2} \quad (a \leq x \leq 3a)$$

Функция $M_{z2} = M_{z2}(x)$ - квадратичная выпуклостью вверх и имеет максимум при $x = 2a$: $M_{z2}|_{x=2a} = -qa^2$. Это легко видеть по эпюре Q_y на втором участке, учитывая, что $dM_z / dx = Q_y$: эпюру M_z можно рассматривать как график первообразной функции, а эпюру Q_y - как график ее производной.

Реакции в опоре B при необходимости можно определить по значениям перерезывающей силы и изгибающего момента в сечении B : $R_B = qa$ (направлена вверх) и $M_B = 3qa^2 / 2$ (изгибает балку выпуклостью вверх).

8.3		Дано: $q, a,$ $P = qa,$ $M = 2qa^2.$	Построить эпюры Q_y и M_z .
-----	---	---	---------------------------------



1. Определение реакций опор. Уравнения равновесия запишем в виде:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow$$

$$P - R_A + R_B - 2q \cdot a + P = 0,$$

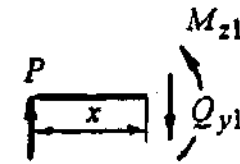
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P \cdot a + M + R_B \cdot 2a - 2qa \cdot 2,5a + P \cdot 3a = 0.$$

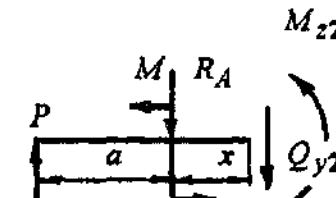
Решение уравнений равновесия относительно реакций опор дает

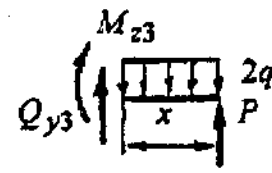
$$R_A = qa/2, \quad R_B = qa/2.$$

2. Построение эпюр Q_y и M_z (M_z - в единицах qa^2).

При определении перерезывающих сил и изгибающих моментов в сечениях 1 и 2 отбрасываем правую часть балки, а в сечении 3 - левую.

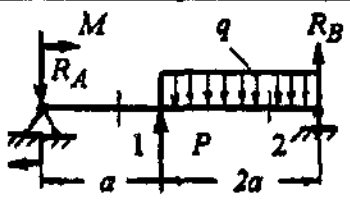
Сечение 1 :  $Q_{y1} = P = qa$,
 $M_{z1} = Px = qax$.
 $(0 \leq x \leq a)$

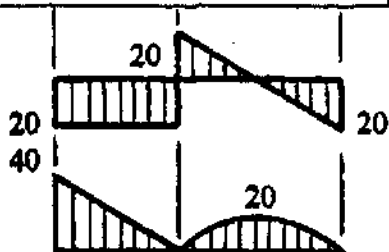
Сечение 2 :  $Q_{y2} = qa/2$,
 $M_{z2} = (qax/2) - qa^2$.
 $(0 \leq x \leq 2a)$

Сечение 3 :  $Q_{y3} = q(2x - a)$,
 $M_{z3} = qx(a - x)$.
 $(0 \leq x \leq a)$

Напомним, что на 3-м участке ось x направлена справа налево (значение $x = 0$ принадлежит крайнему правому сечению) и $dM_z / dx = -Q_y$.

Функция $M_{z3} = M_{z3}(x)$ - квадратичная выпуклостью вверх и имеет максимум при $x = a/2$: $M_{z3} \text{ при } x=a/2 = qa^2/4$ (перерезывающая сила Q_{y3} при $x = a/2$ равна нулю).

8.4		Дано: $q = 10 \text{ кН/м}$, $a = 2 \text{ м}$, $P = 2qa$, $M = qa^2$.	Построить эпюры Q_y и M_z и распределения напряжений σ_x и τ_{xy} для разных форм сечений.
-----	---	--	--



1. Определение реакций опор. Уравнения равновесия ($\sum M_A = 0$ и $\sum M_B = 0$) в данной задаче имеют вид:

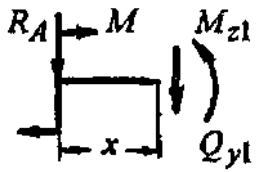
$$-M + q \cdot 2a \cdot 2a + P \cdot a + R_B \cdot 3a = 0 ,$$

$$R_A \cdot 3a - M - P \cdot 2a + q \cdot 2a \cdot a = 0 .$$

Решение уравнений равновесия относительно реакций опор дает
 $R_A = qa = 20 \text{ кН}$, $R_B = qa = 20 \text{ кН}$.

2. Построение эпюр Q_y и M_z (Q_y - кН, M_z - кН·м).

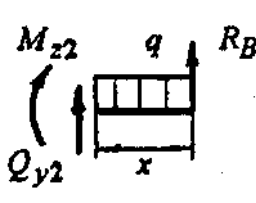
При определении перерезывающих сил и изгибающих моментов в сечении 1 отбрасываем правую часть балки, а в сечении 2 - левую.

Сечение 1 : 

$$Q_{y1} = -R_A = -qa ,$$

$$M_{z1} = M - R_A x = qa(a - x) .$$

$$(0 \leq x \leq a)$$

Сечение 2 : 

$$Q_{y2} = q(x - a) ,$$

$$M_{z2} = qax - (qx^2 / 2) .$$

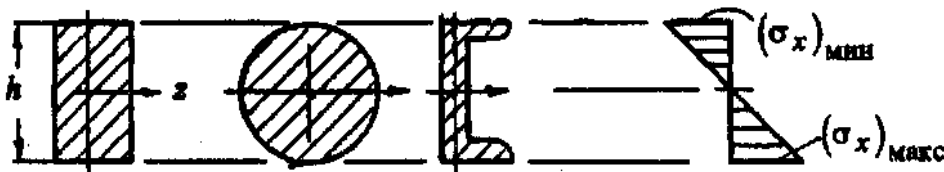
$$(0 \leq x \leq 2a)$$

На 2-м участке ось x направлена справа налево (значение $x = 0$ принадлежит сечению B) и $dM_z / dx = -Q_y$. Функция $M_{z2} = M_{z2}(x)$ - квадратичная выпуклостью вверх и имеет максимум при $x = a$:
 $M_{z2}|_{x=a} = qa^2 / 2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

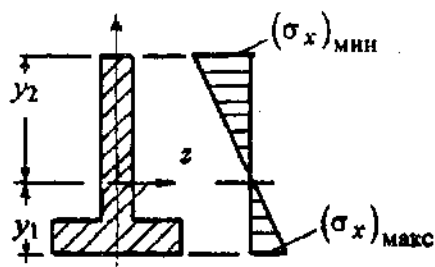
3. Распределения нормальных напряжений в сечениях различной формы.

Нормальное напряжение при изгибе определяется известным соотношением $\sigma_x = (M_z / I_z) y$.

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси (в нашем случае - оси z), или сечений с центром тяжести, расположенным посередине их высоты, имеем, что $(\sigma_x)_{\text{макс}} = -(\sigma_x)_{\text{мин}} = M_z / W_z$, где $W_z = 2I_z / h$. При $M_z > 0$



В общем случае (при $M_z > 0$) имеем



$$(\sigma_x)_{\max} = (M_z / I_z) y_1 = M_z / W_{z1} ,$$

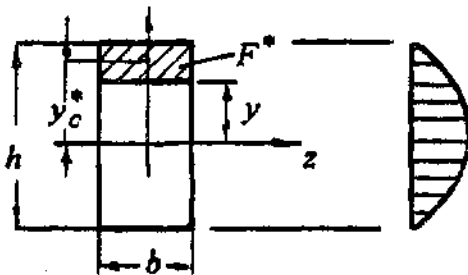
$$(\sigma_x)_{\min} = -(M_z / I_z) y_2 = -M_z / W_{z2} ,$$

где y_1 и y_2 - расстояния от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых и сжатых волокон; W_{z1} и

W_{z2} - моменты сопротивления сечения балки для этих же волокон.

4. Распределения касательных напряжений в сечениях различной формы.

Касательное напряжение при изгибе определяется соотношением $\tau_{xy} = Q_y S_z^*(y) / I_z b(y)$. При известной перерезывающей силе и заданной форме сечения распределение τ_{xy} по высоте сечения зависит от двух величин $S_z^*(y)$ и $b(y)$ и, в отличие от распределения σ_x , является нелинейным. Приведем пример построения распределения τ_{xy} для прямоугольного поперечного сечения балки.



В рассматриваемом случае $b = \text{const}$ и $I_z = bh^3 / 12$. Статический момент отсекаемой части сечения вычислим, используя соотношение $S_z^*(y) = F^* \cdot y_c^*$, что поз-

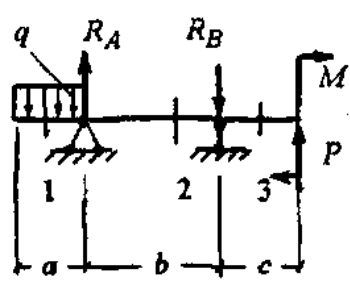
воляет получить

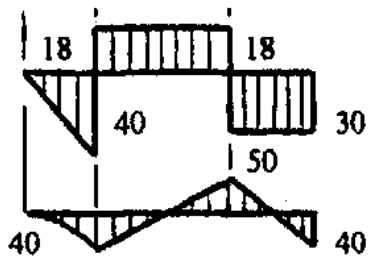
$$S_z^*(y) = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left[\frac{h}{2} - \frac{(h/2) - y}{2} \right] = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) .$$

Соответственно касательное напряжение

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} Q_y \left(\frac{1}{bh} - \frac{4y^2}{bh^3} \right) .$$

Можно найти, что $\tau_{xy} \big|_{y=\pm h/2} = 0$, $\tau_{xy} \big|_{y=0} = (\tau_{xy})_{\max} = 3Q_y / 2F$, где $F = bh$ - площадь поперечного сечения балки.

8.5		<p>Дано:</p> $q = 20 \text{ кН/м}$, $P = 30 \text{ кН}$, $M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $a = 2 \text{ м}$, $b = 5 \text{ м}$, $c = 3 \text{ м}$, $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$	<p>Определить необходимые размеры круглого, квадратного, прямоугольного сечений и сечения в форме двутавра. Провести для последнего проверку прочности по III теории.</p>
-----	---	--	---



1. Определение реакций опор.

Уравнения равновесия ($\sum M_A = 0$ и $\sum M_B = 0$) в данной задаче имеют вид:

$$qa(a/2) - R_B b + P(b+c) - M = 0,$$

$$qa[b + (a/2)] + Pc - M - R_A b = 0.$$

Решение уравнений равновесия относительно реакций опор дает

$$R_A = 58 \text{ кН}, \quad R_B = 48 \text{ кН}.$$

2. Построение эпюр Q_y и M_z (Q_y - кН, M_z - кН·м).

При определении перерезывающих сил и изгибающих моментов в сечениях 1 и 2 отбрасываем правую часть балки, а в сечении 3 - левую.

Сечение 1: $Q_{y1} = -qx$, $M_{z1} = -qx^2/2$. ($0 \leq x \leq a$)

Сечение 2: $Q_{y2} = R_A - qa$, $M_{z2} = R_A x - qa\left(\frac{a}{2} + x\right)$. ($0 \leq x \leq b$)

Сечение 3: $Q_{y3} = -P$, $M_{z3} = Px - M$. ($0 \leq x \leq c$)

На 3-м участке ось x направлена справа налево (значение $x = 0$ принадлежит крайнему правому сечению) и $dM_z / dx = -Q_y$. Функция

$M_{z1} = M_{z1}(x)$ - квадратичная выпуклостью вверх.

3. Определение момента сопротивления сечения балки.

Поскольку материал балки одинаково работает на растяжение и сжатие, момент сопротивления W_z следует находить из условия

$$|\sigma_{x \text{ макс}}| = |M_z|_{\text{макс}} / W_z \leq [\sigma] \Rightarrow W_z \geq |M_z|_{\text{макс}} / [\sigma].$$

Из эпюры M_z имеем $(M_z)_{\text{макс}} = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$, что позволяет получить $W_z = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 500 \text{ см}^3$.

4. Определение необходимых размеров сечений.

Круглое сечение (d):

$$W_z^{\text{кр}} = \pi d^3 / 32 = 500 \Rightarrow d = 17,2 \text{ см} \Rightarrow F^{\text{кр}} = 232,5 \text{ см}^2.$$

Квадратное сечение ($a \times a$):

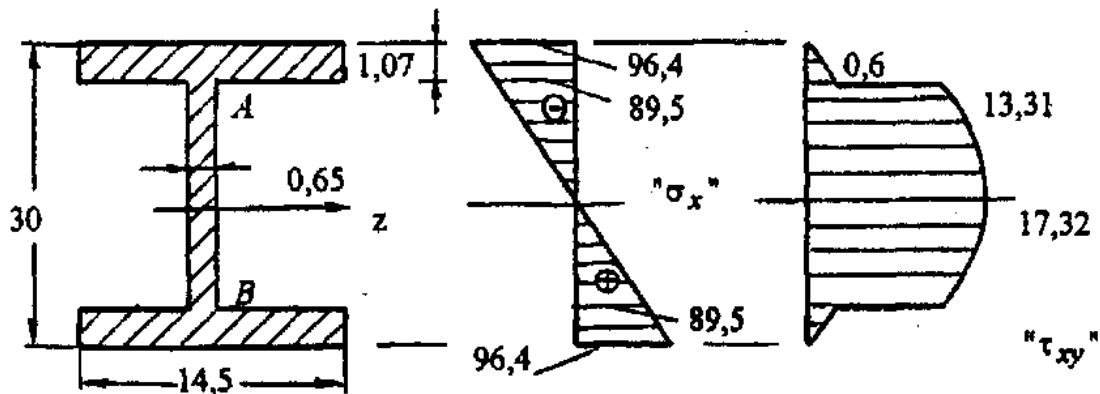
$$W_z^{\text{кв}} = a^3 / 6 = 500 \Rightarrow a = 14,4 \text{ см} \Rightarrow F^{\text{кв}} = 208 \text{ см}^2.$$

Прямоугольное сечение ($h = 2b$):

$$W_z^{\text{пр}} = h^3 / 12 = 500 \Rightarrow h = 18,2 \text{ см} \Rightarrow F^{\text{пр}} = 165 \text{ см}^2.$$

Сечение двутавр:

В соответствии с сортаментом "Сталь прокатная. Балки двутавровые. ГОСТ 8239-56" имеем двутавры № 30 с $W_z = 472 \text{ см}^3$ и № 30а с $W_z = 518 \text{ см}^3$. Выбираем № 30а со следующими характеристиками $I_z = 7780 \text{ см}^4$, $S_z^{1/2} = 292 \text{ см}^3$ (статический момент половины сечения), $F^{\text{дв}} = 49,9 \text{ см}^2$ и сечением с размерами в сантиметрах, показанном ниже на рис.



Учитывая, что вес балки на единицу длины пропорционален ее площади поперечного сечения, отношения весов балок с найденными размерами сечений определяются соотношением

$$F^{\text{дв}} : F^{\text{пр}} : F^{\text{кв}} : F^{\text{кр}} = 1 : 3,3 : 4,17 : 4,66 ,$$

где площадь двутавра принята за единицу. Отсюда следует, что при равной прочности двутавровая балка в 4,66 раза легче, чем круглая. Данное обстоятельство и определяет выгодность прокатных профилей при их применении в качестве балок.

5. Проверка прочности двутавровой балки.

Построение эпюры нормальных напряжений. Нормальные напряжения при изгибе определяются формулой $\sigma_x = (M_z / I_z) y$. Вычисляем их значения в максимально удаленных точках и в точках A и B (точках перехода полки двутавра в его стенку):

$$\sigma_x \Big|_{y=\pm 15} = \pm 96,4 \text{ МПа} \quad , \quad \sigma_x \Big|_{y=\pm 13,93} = \pm 89,5 \text{ МПа} .$$

По высоте сечения нормальные напряжения меняются линейно. Знаки напряжений расставлены в соответствии со знаком изгибающего момента $M_z > 0$ (растянуты нижние волокна).

Построение эпюры касательных напряжений. Касательные напряжения при изгибе определяются формулой $\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^*(y)}{I_z b(y)}$.

К имеющимся данным добавим известное значение перерезывающей силы $|Q_y| = 30 \text{ кН}$ в рассматриваемом опасном сечении и значение S_z^* , вычисленное для полки двутавра при $y = 13,93 \text{ см}$:

$$S_z^* \Big|_{y=13,93} = 14,5 \cdot 1,07 \cdot 14,46 = 224,4 \text{ см}^3 .$$

Касательные напряжения найдем в следующих точках:

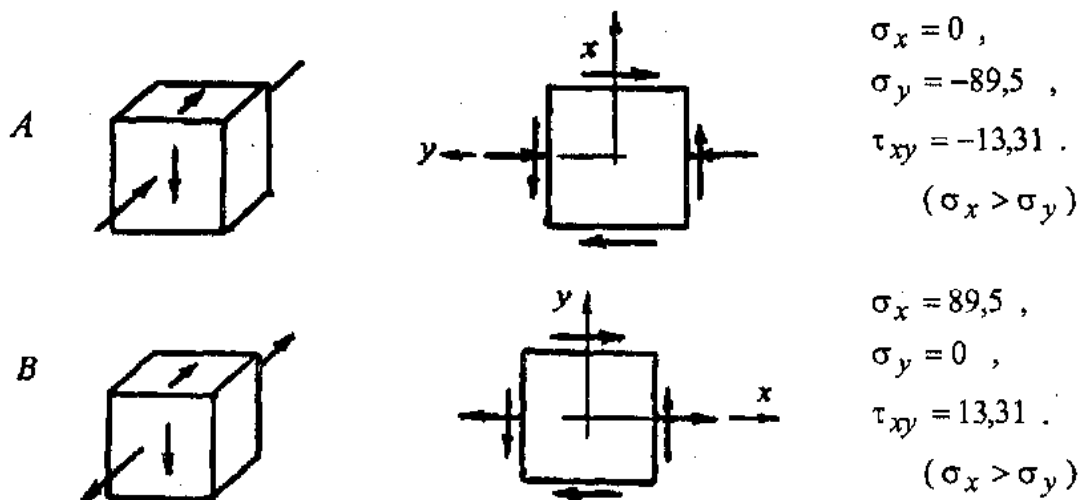
$$\tau_{xy} \Big|_{y=\pm 15} = 0 \quad , \quad \tau_{xy} \Big|_{y=\pm 13,93, b=14,5} = 0,6 \text{ МПа} \quad ,$$

$$\tau_{xy} \Big|_{y=\pm 13,93, b=0,65} = 13,31 \text{ МПа} \quad , \quad \tau_{xy} \Big|_{y=0} = 17,32 \text{ МПа} .$$

Рассмотрение эпюр нормальных и касательных напряжений показывает, что опасными точками в сечении являются точки A (зона сжатия) и B (зона растяжения).

Определение главных нормальных напряжений в опасных точках. Покажем напряженные состояния в точках A и B , учитывая знаки нормальных напряжений и направляя касательные на-

пряжения по направлению перерезывающей силы в рассматриваемом сечении ($Q_y = -30 \text{ кН} < 0$; сила направлена вниз).



Вычисление главных нормальных напряжений (см. задачу 1.4) для показанных напряженных состояний позволяет получить:

для точки *A*

$$\sigma_{\text{макс, мин}} = -44,75 \pm 46,7 \Rightarrow \sigma_{\text{макс}} = 1,95 \text{ , } \sigma_{\text{мин}} = -91,45 .$$

$$\sigma_1 = 1,95 \text{ МПа } , \quad \sigma_2 = 0 \quad , \quad \sigma_3 = -91,45 \text{ МПа } ;$$

для точки *B*

$$\sigma_{\text{макс, мин}} = 44,75 \pm 46,7 \Rightarrow \sigma_{\text{макс}} = 91,45 \text{ , } \sigma_{\text{мин}} = -1,95 .$$

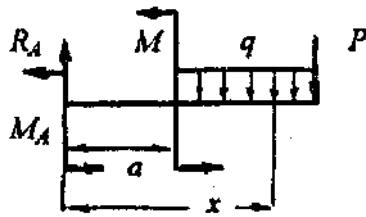
$$\sigma_1 = 91,45 \text{ МПа } , \quad \sigma_2 = 0 \quad , \quad \sigma_3 = -1,95 \text{ МПа} .$$

Проверка прочности в опасных точках. Условие прочности и для точки *A* , и для *B* имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 93,4 \text{ МПа} < [\sigma] = 100 \text{ МПа} .$$

Прочность обеспечена.

8.6		Дано: $q, a,$ $P = qa,$ $M = qa^2,$ $EI_z.$	Определить угол поворота сечения <i>B</i> и вертикальное перемещение (прогиб) сечения <i>C</i> .
-----	--	---	--



Определение реакций опоры (в заделке) из уравнений статики:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow R_A = 2qa;$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_A = 2,5qa^2$$

Поскольку начало координат расположено в заделке, начальные параметры v_0 и ϑ_0 (прогиб и угол поворота поперечного сечения балки в начале координат) равны нулю. Уравнение упругой линии будет иметь вид:

$$EI_z v = R_A \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2} \Big|_I - M \frac{(x-a)^2}{2} - q \frac{(x-a)^4}{24} \Big|_{II}$$

Дифференцированием уравнения прогибов получим соотношение, определяющее углы поворота ϑ поперечных сечений балки:

$$EI_z \vartheta = R_A \frac{x^2}{2} - M_A x \Big|_I - M(x-a) - q \frac{(x-a)^3}{6} \Big|_{II}$$

Для участка I имеем $0 \leq x \leq a$, для участка II - $a \leq x \leq 2a$.

Вычисление угла поворота сечения B и прогиба сечения C (под силой P) позволяет найти:

$$EI_z \vartheta_B = EI_z \vartheta \Big|_{x=a} = qa^3(-2,5+1) = -\frac{3}{2}qa^3 \Rightarrow \vartheta_B = -\frac{3qa^3}{2EI_z};$$

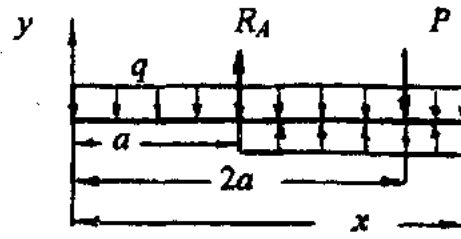
$$EI_z v_C = \frac{qa^4}{24}(64-120-12-1) = -\frac{23}{8}qa^4 \Rightarrow v_C = -\frac{23qa^4}{8EI_z}$$

8.7		<p>Дано: $q, a,$ $P = 4qa,$ $M = qa^2,$ $EI_z.$</p>	<p>Записать уравнения, определяющие прогибы и углы поворота сечений балки. Показать примерный вид упругой линии балки.</p>
-----	--	---	--

Из уравнения моментов относительно правой опоры B определим реакцию R_A :

$$q \cdot a \cdot 2,5a - R_A \cdot 2a + P \cdot a - M = 0 \Rightarrow R_A = 11qa/4.$$

Запишем уравнение упругой линии для произвольного сечения последнего правого участка балки.



$$EI_z v = EI_z v_0 + EI_z \vartheta_0 x -$$

$$- q \frac{x^4}{24} \Big|_I + R_A \frac{(x-a)^3}{6} + q \frac{(x-a)^4}{24} \Big|_{II} - P \frac{(x-2a)^3}{6} \Big|_{III}$$

Для участка I имеем $0 \leq x \leq a$, для участка II - $a \leq x \leq 2a$, для участка III - $2a \leq x \leq 3a$.

Начальные параметры v_0 и ϑ_0 (прогиб и угол поворота поперечного сечения балки в начале координат) определим из условий закрепления рассматриваемой балки: на опорах A и B прогибы v_A и v_B равны нулю, что позволяет записать уравнения

$$EI_z v_A = EI_z v \Big|_{x=a} = EI_z v_0 + EI_z \vartheta_0 a - qa^4 / 24 = 0$$

$$EI_z v_B = EI_z v \Big|_{x=3a} = EI_z v_0 + EI_z \vartheta_0 \cdot 3a + 7qa^4 / 24 = 0$$

Решение полученной системы уравнений дает

$$v_0 = 5qa^4 / 24EI_z, \quad \vartheta_0 = -qa^3 / 6EI_z.$$

Окончательно, уравнение упругого прогиба имеет вид

$$EI_z v = \frac{5}{24} qa^4 - \frac{1}{6} qa^3 x - \frac{1}{24} qx^4 \Big|_I + \frac{11}{24} qa(x-a)^3 + \frac{1}{24} q(x-a)^4 \Big|_{II} - \frac{2}{3} qa(x-2a)^3 \Big|_{III}.$$

Уравнение, определяющее углы поворота ϑ поперечных сечений балки, получим дифференцированием уравнения прогибов:

$$EI_z \vartheta = -\frac{1}{6} qa^3 - \frac{1}{6} qx^3 \Big|_I + \frac{11}{8} qa(x-a)^2 + \frac{1}{6} q(x-a)^3 \Big|_{II} - 2qa(x-2a)^2 \Big|_{III}$$

Для построения примерного вида упругой линии балки вычислим следующие прогибы и углы поворота сечений:

- угол поворота сечения над левой опорой

$$\vartheta_A = \vartheta|_{x=a} = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{1}{6} qa^3 - \frac{1}{6} qa^3 \right) = -\frac{qa^3}{3EI_z} ;$$

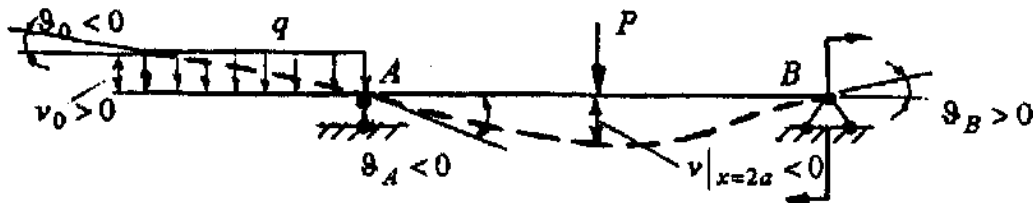
- угол поворота сечения над правой опорой

$$\vartheta_B = \vartheta|_{x=3a} = \frac{qa^3}{EI_z} \left(-\frac{1}{6} - \frac{27}{6} + \frac{44}{8} + \frac{8}{6} - 2 \right) = \frac{qa^3}{6EI_z} ;$$

- прогиб под силой P

$$v|_{x=2a} = \frac{qa^4}{EI_z} \left(\frac{5}{24} - \frac{2}{6} - \frac{16}{24} + \frac{11}{24} + \frac{1}{24} \right) = -\frac{7qa^4}{24EI_z} .$$

Ниже показан примерный вид упругой линии балки (пунктир) с учетом знаков вычисленных прогибов и углов поворота сечений.



8.8		Дано:	Определить форму балки равного сопротивления, считая ее поперечное сечение прямоугольным.
		$q, a,$ $P = qa, M = qa^2/2,$ $b = b(x), h = \text{const},$ $[\sigma], [\tau].$	

При чистом изгибе балкой равного сопротивления является балка постоянного сечения. В общем случае плоского поперечного изгиба балка равного сопротивления имеет переменное сечение, определяемое уравнением

$$W_z(x) = |M_z(x)| / [\sigma] ,$$

следующим из условия прочности по нормальным напряжениям. Если же в каком-нибудь поперечном сечении балки изгибающий момент равен нулю или имеет малую величину, а поперечная сила соответственно существенно отлична от нуля, то форма балки равного сопротивления корректируется условием прочности по касательным напряжениям.

Определим изгибающие моменты $M_z(x)$ по сечениям балки (порядок прохождения участков показан на рис.):

Сечение 1 ($0 \leq x \leq a$): $M_{z1} = Px - (qx^2 / 2) = qax - (qx^2 / 2)$.

Сечение 2 ($0 \leq x \leq a$): $M_{z2} = P(a+x) - qa(x+0,5a) = qa^2 / 2$.

Сечение 3 ($0 \leq x \leq a$): $M_{z3} = M + P(2a+x) - qa(x+1,5a) = qa^2$.

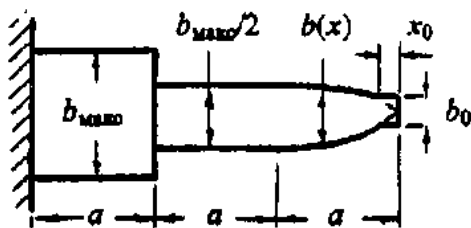
В рассматриваемой задаче уравнение, определяющее форму балки равного сопротивления, при $h = \text{const}$ имеет вид:

$$b(x) = 6 |M_z(x)| / h^2 [\sigma] .$$

Легко видеть, что для участков 3 и 2 имеем постоянную ширину сечения ($b_3 = b_{\text{макс}} = 6qa^2 / h^2 [\sigma]$ и $b_2 = b_{\text{макс}} / 2$ соответственно), а на 1-ом участке ширина меняется по нелинейному закону

$$b_1(x) = \frac{6q}{h^2 [\sigma]} \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) = \frac{b_{\text{макс}}}{2} \left[\frac{2x}{a} - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] ,$$

принимая нулевое значение при $x = 0$, поскольку изгибающий момент в этом сечении равен нулю. Однако в этом же сечении перерезывающая сила отлична от нуля ($|Q_y| = P$) и принимать нулевую ширину нельзя.



Ширину сечения b_0 определим из условия прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{xy} = \frac{3Q_y}{2F} = \frac{3P}{2b_0 h} \leq [\tau] .$$

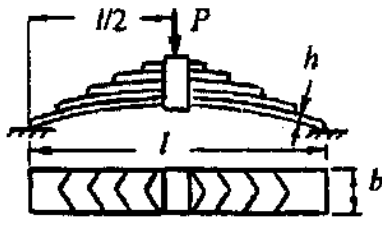
Будем иметь

$$b_0 = 3P / 2h [\tau] = 3qa / 2h [\tau] .$$

Длину x_0 конца балки с постоянной шириной b_0 оценим из условия прочности по нормальным напряжениям в сечении $x = x_0$, принимая $M_{z1} |_{x=x_0} \approx Px_0$. Получим

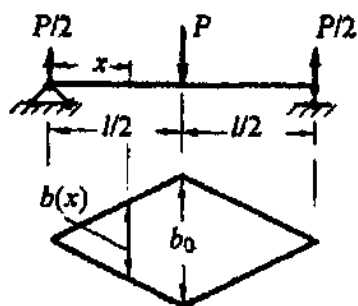
$$\frac{6Px_0}{b_0 h^2} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{4x_0 [\tau]}{h} \leq [\sigma] \Rightarrow x_0 = \frac{h [\sigma]}{4 [\tau]} .$$

Считая, например, $[\tau] = 0,5 [\sigma]$, имеем $x_0 = 0,5h$.

8.9		<p>Дано: $l = 1 \text{ м}$, $b = 60 \text{ мм}$, $h = 5 \text{ мм}$, $n = 10 \text{ полос}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.</p>	<p>Определить максимальную нагрузку на рессору и ее максимальное вертикальное перемещение.</p>
-----	---	---	--

Расчет рессор представляет собой достаточно сложную задачу. Ниже предложен приближенный метод расчета, базирующийся на представлении рессоры как балки равного сопротивления и имеющий удовлетворительную степень точности.

1. Расчет балки равного сопротивления, имеющей прямоугольное поперечное сечение с постоянной высотой h и переменной шириной $b(x)$.



Изгибающий момент в произвольном сечении x имеет значение

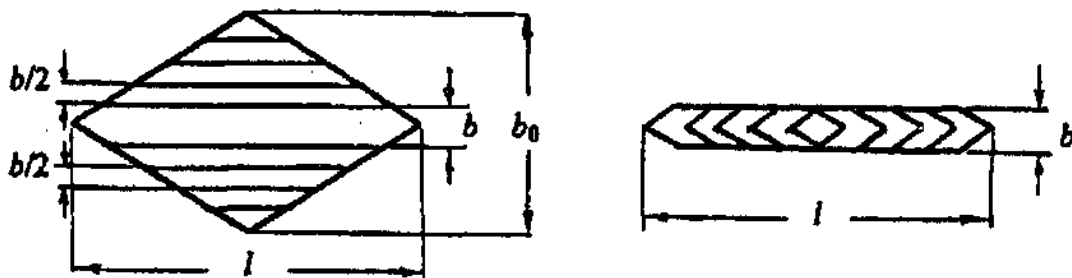
$$M_z(x) = Px / 2$$

и, соответственно, уравнение, определяющее $b(x)$, принимает вид

$$b(x) = 6 |M_z(x)| / h^2 [\sigma] = 3Px / h^2 [\sigma].$$

При $x = l/2$ имеем $b_0 = 3Pl / 2h^2 [\sigma]$.

2. Изготовление рессоры из балки равного сопротивления. Процедура изготовления показана на рис.



Легко подсчитать, что в рассматриваемой задаче $b_0 = b \cdot n = 60 \text{ см}$.

3. Определение максимальной нагрузки $P_{\text{макс}}$ на рессору.

Используя найденное значение b_0 , будем иметь

$$P_{\text{макс}} = 2b_0 h^2 [\sigma] / 3l = 16 \cdot 10^{-4} \text{ МН} = 1,6 \text{ кН}.$$

4. Определение максимального прогиба рессоры.

Прогибы рессоры, как вертикальные перемещения балки переменного сечения при изгибе, определим, интегрируя дифференциальное уравнение упругой линии

$$Ev'' = M_z(x) / I_z(x) ,$$

где $I_z(x)$ - переменный момент инерции сечений балки относительно нейтральной оси. Процедура интегрирования упрощается, если уравнение упругой линии записать в форме:

$$EI_0 v'' = M_z(x) I_0 / I_z(x) = M_{пр} .$$

В представленном уравнении имеем: $I_0 = b_0 h^3 / 12$ - момент инерции постоянного сечения, к которому условно приводится балка; $M_{пр} = M_z(x) I_0 / I_z(x)$ - приведенный изгибающий момент, в рассматриваемой задаче имеющий значение $M_{пр} = Pl / 4$.

Вводя $M_{пр}$ в уравнение прогибов и интегрируя его, получаем:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{Pl}{4EI_0} \quad \Rightarrow \quad v(x) = \frac{1}{EI_0} \left(\frac{Pl}{8} x^2 + C_1 x + C_2 \right) .$$

Постоянные интегрирования определим из граничных условий

$$v|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad \vartheta|_{x=l/2} = v'|_{x=l/2} = 0 .$$

Будем иметь

$$C_1 = -Pl^2 / 8 , \quad C_2 = 0 .$$

Окончательно, для уравнения прогибов получаем

$$v(x) = (Pl / 8EI_0) (x^2 - lx) ,$$

откуда находим значение максимального прогиба рессоры

$$v_{\text{макс}} = v|_{x=l/2} = -Pl^3 / 32EI_0 = -0,04 \text{ м} = -4 \text{ см} .$$

9. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Определение задачи сложного сопротивления прямого бруса.

Представление сложного сопротивления как суммы простейших видов (типов) деформирования:

- внутренние силовые факторы при сложном сопротивлении



- нормальные и касательные напряжения

$$N_x \Rightarrow \sigma_x = \frac{N_x}{F} \quad , \quad M_x \Rightarrow \tau_{xt} = \frac{M_x}{I_p} \rho \quad ,$$

$$Q_y \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{Q_y |S_z^*(y)|}{I_z b(y)} \quad , \quad M_y \Rightarrow \sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z \quad ,$$

$$Q_z \Rightarrow \tau_{xz} = \frac{Q_z |S_y^*(z)|}{I_y h(z)} \quad , \quad M_z \Rightarrow \sigma_x = \frac{|M_z|}{I_z} y \quad .$$

Суммирование нормальных напряжений (знаки проставляются по первой четверти принятой системы координат)

$$\sigma_x = \frac{|N_x|}{F} - \frac{|M_y|}{I_y} z + \frac{|M_z|}{I_z} y \quad .$$

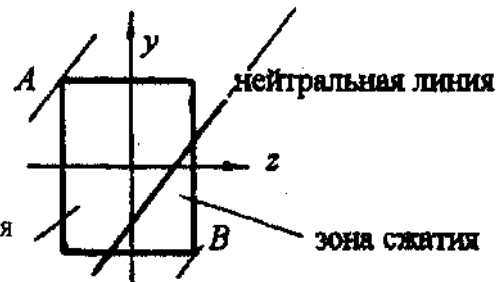
Суммирование касательных напряжений

$$\bar{\tau}_x = \bar{\tau}_{xy}(Q_y) + \bar{\tau}_{xz}(Q_z) + \bar{\tau}_{xt}(M_x) \quad .$$

Уравнение нейтральной линии и опасные точки в сечении прямого бруса

$$\frac{|N_x|}{F} - \frac{|M_y|}{I_y} z + \frac{|M_z|}{I_z} y = 0$$

зона растяжения

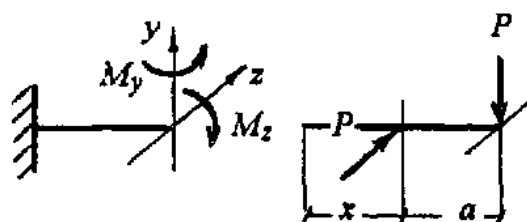


Расчет на прочность в опасных точках.

Частные случаи сложного сопротивления:

- косо́й изгиб;
- внецентренное растяжение (сжатие) или растяжение с изгибом;
- изгиб с кручением.

9.1		<p>Дано: $P = 2,4 \text{ кН}$, $a = 0,5 \text{ м}$, $b = 12 \text{ см}$, $h = 20 \text{ см}$.</p>	<p>Определить наибольшее значение нормального напряжения и положение нейтральной линии в опасном сечении.</p>
-----	--	---	---



Поскольку речь идет о нормальных напряжениях и нейтральной линии, достаточно определить в сечении бруса изгибающие моменты

M_y и M_z ($N_x = 0$). Будем иметь

$$|M_y| = Px, \quad |M_z| = P(x+a).$$

Действительные направления моментов показаны на рисунке.

Опасное сечение бруса - сечение в закреплении при $x = 2a$. Соответственно, здесь имеем

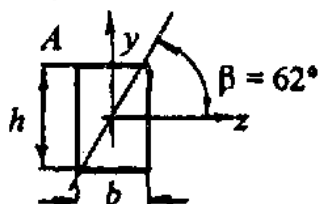
$$\sigma_x = - \frac{|(M_y)_{\text{макс}}|}{I_y} z + \frac{(M_z)_{\text{макс}}}{I_z} y = - \frac{2Pa}{I_y} z + \frac{3Pa}{I_z} y.$$

Уравнение нейтральной линии

$$- \frac{2Pa}{I_y} z + \frac{3Pa}{I_z} y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = z \operatorname{tg} \beta,$$

где $\operatorname{tg} \beta = 2I_z / 3I_y = 2h^2 / 3b^2 = 1,851$, что позволяет найти $\beta \approx 62^\circ$.

Наибольшее (наименьшее) напряжение действует в точке, наиболее удаленной от нейтральной линии:

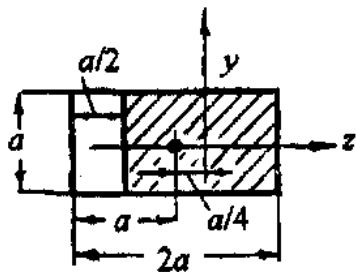


$$(\sigma_x)_{\text{макс}} = (\sigma_x)_A = \sigma_x \Big|_{y=h/2, z=-b/2};$$

$$(\sigma_x)_{\text{макс}} = 38 Pa / bh^2 = 9,5 \text{ МПа}.$$

9.2		Дано: P, a .	Сравнить наибольшие нормальные напряжения в рабочих частях образцов (толщина образцов равна a).
-----	--	-------------------	--

Линия действия силы P на первом (левом) образце проходит через центр тяжести его поперечного сечения - здесь имеем простое растяжение образца при $N_x = P$. Напряжение постоянно по сечению и равно $\sigma_x^{(1)} = P/a^2$.



Для второго образца нагружение является внецентренным - эксцентриситет силы P равен $a/4$ и дополнительно к продольной силе $N_x = P$ имеем изгибающий момент $|M_y| = Pa/4$. Нормальное напряжение для точек первой четверти сечения в этом случае определяется соотношением

$$\sigma_x^{(2)} = \frac{|N_x|}{F} - \frac{|M_y|}{I_y} z$$

Положение нейтральной линии в сечении образца следует из уравнения

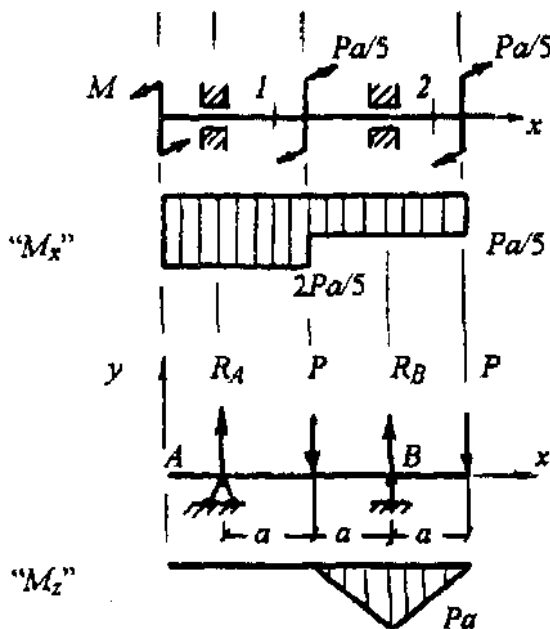
$$\frac{|N_x|}{F} - \frac{|M_y|}{I_y} z = 0 \Rightarrow z = \frac{|N_x|}{|M_y|} \cdot \frac{I_y}{F} = \text{const} \Rightarrow z = (3/4)a$$

Полученный результат показывает, что нейтральная линия проходит по правому краю сечения и все сечение находится в зоне растяжения. Наибольшее нормальное напряжение в этом случае равно

$$\left(\sigma_x^{(2)}\right)_{\text{макс}} = \sigma_x^{(2)}|_{z=-(3/4)a} = \frac{4}{3} \left(P/a^2\right)$$

Можно видеть, что внецентренное приложение нагрузки увеличивает опасность разрушения: при увеличении площади сечения на 50% напряжение не уменьшилось, а возросло на 33%.

9.3		<p>Дано: $P = 6 \text{ кН}$, $a = 1 \text{ м}$, $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.</p>	<p>Определить диаметр d сечения вала, используя III теорию прочности.</p>
-----	--	---	--



В рассматриваемой задаче имеет место совместное действие кручения и поперечного изгиба в плоскости xu .

Кручение

Из условия равновесия вала $\sum M_x = 0$ определяем значение момента $M = 2Pa/5$.

Отыскивая значения крутящих моментов в сечениях вала (M_{x1} и M_{x2}), строим эпюру " M_x ".

Поперечный изгиб

Реакции опор определяем из уравнений равновесия:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -Pa + R_B 2a - P3a = 0 \Rightarrow R_B = 2P.$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow Pa - R_A 2a - Pa = 0 \Rightarrow R_A = 0.$$

Из внутренних силовых факторов в рассматриваемой задаче достаточно определить только изгибающие моменты M_z , поскольку для круглого сечения вала касательные напряжения, отыскиваемые через перерезывающие силы Q_y , пренебрежимо малы. Для участков вала, начиная с левого, имеем:

$$M_{z1} = 0, \quad M_{z3} = -Px \quad (0 \leq x \leq a),$$

$$M_{z2} = 0, \quad M_{z4} = -P(x+a) + R_B x \quad (0 \leq x \leq a).$$

Расчет на прочность

При совместном действии кручения и поперечного изгиба опасным является сечение B, в котором $M_{кр} = Pa/5$ и $M_{изг} = |M_z| = Pa$.

В качестве расчетной формулы в подобных задачах удобно использовать следующую

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = M_{\text{ЭКВ}} / W \leq [\sigma] ,$$

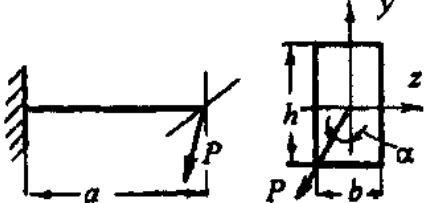
где эквивалентный момент $M_{\text{ЭКВ}}$ по третьей теории прочности определяется соотношением

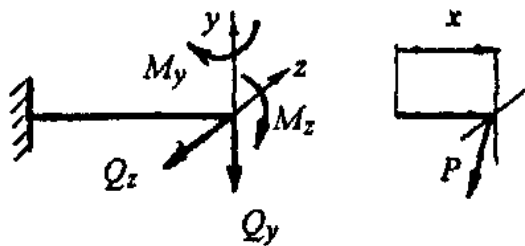
$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{ИЗГ}}^2 + M_{\text{КР}}^2} = \sqrt{(Pa)^2 + (Pa/5)^2} = 1,02 Pa .$$

Вычисляя момент сопротивления W , будем иметь

$$W = \pi d^3 / 32 = M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} / [\sigma] = 61,2 \text{ см}^3 ,$$

что позволяет найти диаметр сечения вала $d = 8,5 \text{ см}$.

9.4		<p>Дано: $P = 2,4 \text{ кН}$, $a = 1 \text{ м}$, $b = 12 \text{ см}$, $h = 20 \text{ см}$, $\alpha = 30^\circ$.</p>	<p>Определить наибольшее значение нормального напряжения и положение нейтральной линии в опасном сечении.</p>
-----	---	---	---



Из условий равновесия отсеченной части бруса определим все внутренние силовые факторы в рассматриваемой задаче. Будем иметь:

$$N_x = 0 \quad , \quad |Q_y| = P \cos \alpha \quad , \quad |Q_z| = P \sin \alpha \quad ;$$

$$M_x = 0 \quad , \quad |M_y| = (P \sin \alpha) x \quad , \quad |M_z| = (P \cos \alpha) x \quad .$$

Здесь представлены величины найденных сил и моментов, а их действительные направления показаны на рисунке.

Рассмотрение внутренних силовых факторов показывает, что поставленная задача представляется суммой двух поперечных изгибов в плоскостях xu (Q_y и M_z) и xz (Q_z и M_y). Силовая плоскость (плоскость действия нагрузки) здесь не совпадает ни с одной плоскостью симметрии балки. Задачи подобного типа носят название задач косоугольного изгиба.

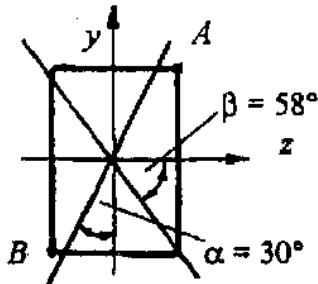
Суммирование нормальных напряжений для произвольной точки первой четверти в опасном сечении $x = a$ дает

$$\sigma_x = \frac{|(M_y)_{\max}|}{I_y} z + \frac{|(M_z)_{\max}|}{I_z} y$$

Положение нейтральной линии в сечении балки определяется уравнением

$$\frac{|(M_y)_{\max}|}{I_y} z + \frac{|(M_z)_{\max}|}{I_z} y = 0 \Rightarrow y = -\operatorname{tg} \beta \cdot z,$$

где $\operatorname{tg} \beta = (I_z / I_y) \operatorname{tg} \alpha$ (прямая проходит через 2-ю и 4-ю четверти).



Поскольку для рассматриваемого сечения $I_z > I_y$ ($I_z = bh^3 / 12$, $I_y = b^3 h / 12$), линия действия силы и нейтральная линия не перпендикулярны ($\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha$). Отыскание угла β приводит к значению $\beta = 58^\circ$.

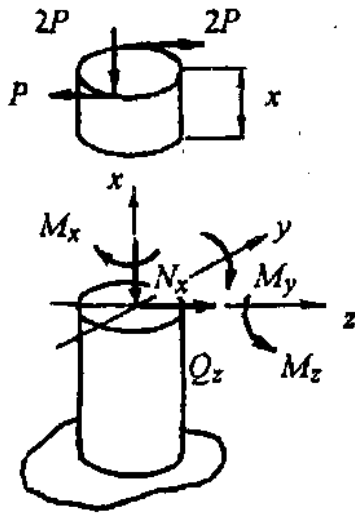
Отметим, что при $I_z = I_y$ (квадратное или круглое сечение, например), перпендикулярность линии действия нагрузки и нейтральной линии сохраняется.

Опасными являются точки A (зона растяжения) и B (зона сжатия), в которых напряжения σ_x по абсолютной величине одинаковы. Определяя наибольшее напряжение, получим

$$(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_x)_A = \sigma_x|_{y=h/2, z=b/2} \Rightarrow (\sigma_x)_{\max} = 5,1 \text{ МПа.}$$

9.5		Дано: P , d , $[\sigma]$.	Проверить прочность стержня, используя третью теории прочности.
-----	--	---	---

Для представления поставленной задачи в виде суммы простейших видов (типов) деформирования, найдем внутренние силовые факторы, рассматривая равновесие отсекаемой верхней части бруса. При этом будем определять отдельно величину силового фактора и его действительное направление, которое покажем на рисунке.



$$\begin{aligned}
 |N_x| &= 2P, \\
 Q_y &= 0, \\
 Q_z &= P, \\
 |M_x| &= 3Pd/2, \\
 |M_y| &= Px, \\
 |M_z| &= Pd.
 \end{aligned}$$

Обратим внимание, что силы $2P$ и P , лежащие в плоскости поперечного сечения, не только закручивают стержень, но и изгибают его в плоскости xz .

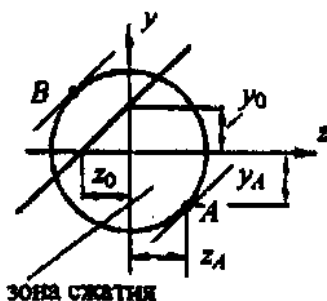
Опасным является сечение в закреплении стержня при $x = 8d$.

Нормальное напряжение в произвольной точке опасного сечения определяется следующим соотношением, знаки в котором представлены по первой четверти поперечного сечения:

$$\sigma_x = - \frac{|N_x|}{F} - \frac{|(M_y)_{\max}|}{I_y} z + \frac{|M_z|}{I_z} y.$$

Касательное напряжение в общем случае вычисляется как векторная сумма касательных напряжений от поперечных изгибов (от перерезывающих сил Q_y и Q_z) и от кручения (от крутящего момента M_x). В рассматриваемой задаче вклад перерезывающих сил пренебрежимо мал (поперечное сечение - круг) и при расчете на прочность можно ограничиться слагаемым от кручения:

$$\tau_{xt} = (M_x / I_p) \rho.$$



Для выявления опасной точки опасного сечения, в которой нужно проверить прочность, определим положение нейтральной линии. Ее уравнение имеет вид:

$$- \frac{|N_x|}{F} - \frac{|(M_y)_{\max}|}{I_y} z + \frac{|M_z|}{I_z} y = 0.$$

Нейтральная линия отсекает на осях y и z отрезки $y_0 > 0$ и $z_0 < 0$.

Опасными с точки зрения нормальных напряжений являются точки A и B (первая расположена в зоне сжатия, вторая - в зоне растяжения). Касательное напряжение τ_{xt} имеет наибольшее значение в любой точке контура поперечного сечения. Поскольку материал работает одинаково на растяжение-сжатие, проверку на прочность проводим для точки A .

При расчете напряжений в точке A необходимо знать ее координаты $z_A > 0$ и $y_A < 0$ ($\rho = d/2$). Будем принимать $z_A = d/2$ и $y_A = -d/2$, что увеличивает запас прочности. Итак, имеем

$$|\sigma_x|_A = \frac{2P}{F} + \frac{8Pd}{I_y} \cdot \frac{d}{2} + \frac{Pd}{I_z} \cdot \frac{d}{2} = \frac{296P}{\pi d^2},$$

$$\tau_{xt}|_A = \frac{3Pd}{2I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{24P}{\pi d^2}.$$

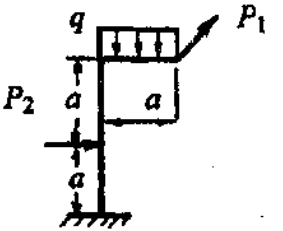
Эквивалентное напряжение по третьей теории прочности вычислим, используя соотношение

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

что позволяет получить $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = 300P/\pi d^2$.

Таким образом, условие прочности имеет вид:

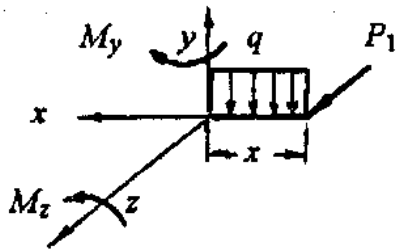
$$300P/\pi d^2 \leq [\sigma].$$

9.6		<p>Дано:</p> <p>$P_1, P_2,$</p> <p>$q,$</p> <p>$a,$</p>	<p>Построить эпюры внутренних силовых факторов по участкам ломаного бруса с выделением опасных сечений.</p>
-----	---	--	---

1. Определение внутренних силовых факторов в сечениях ломаного бруса.

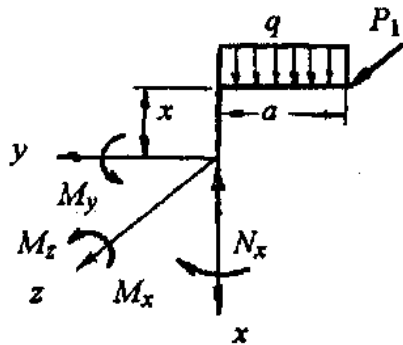
Внутренние силовые факторы определим из условий равновесия отсеченной части бруса (вкладом перерезывающих сил пренебрегаем). Как и ранее, величину и действительное направление внутреннего силового фактора будем определять отдельно. Для сохранения

индексации сил и моментов по всей длине бруса используем скользящую систему координат x, y, z , направляя ось x вдоль оси бруса.



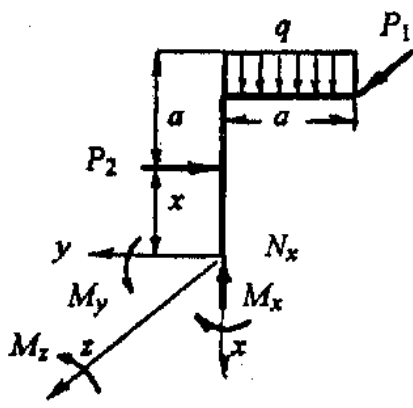
Участок 1: $0 \leq x \leq a$.

$$\begin{aligned} |M_y| &= P_1 x, \\ |M_z| &= qx^2/2. \end{aligned}$$



Участок 2: $0 \leq x \leq a$.

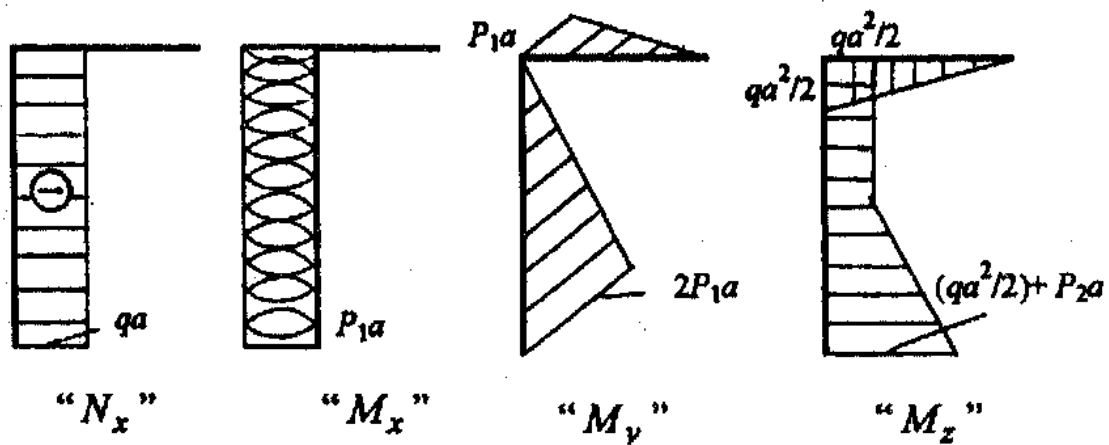
$$\begin{aligned} |N_x| &= qa, \\ |M_x| &= P_1 a, \\ |M_y| &= P_1 x, \\ |M_z| &= qa^2/2. \end{aligned}$$



Участок 3: $0 \leq x \leq a$.

$$\begin{aligned} |N_x| &= qa, \\ M_x &= P_1 a, \\ |M_y| &= P_1(a+x), \\ |M_z| &= P_2 x + qa^2/2. \end{aligned}$$

2. Построение эпюр N_x , M_x , M_y и M_z по участкам бруса.



На представленных эпюрах знак продольной силы N_x (сжатие) проставлен на эпюре, знак крутящего момента M_x не имеет значения при анализе прочности, а знаки (направления) изгибающих моментов учтены тем, что их эпюры построены на сжатых волокнах участков бруса. Эпюра момента M_y построена в плоскости xz , а эпюра M_z - в плоскости xy .

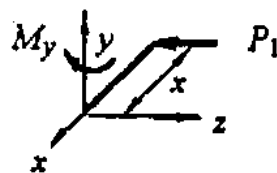
Опасными являются сечение в закреплении вертикального участка ($|N_x|=qa$, $|M_x|=P_1a$, $|M_y|=2P_1a$ и $|M_z|=(qa^2/2)+P_2a$) и сечение $x=a$ для горизонтального участка бруса ($|M_y|=P_1a$ и $|M_z|=qa^2/2$). Суммирование нормальных напряжений в произвольной точке опасного сечения ведется с учетом их знака в первой четверти используемой системы координат (см. задачу 9.5).

9.7		Дано: $P_1, P_2, P_3,$ $a.$	Построить эпюры внутренних силовых факторов по участкам ломаного бруса с выделением опасных сечений.
-----	--	-----------------------------------	--

1. Определение внутренних силовых факторов в сечениях ломаного бруса.

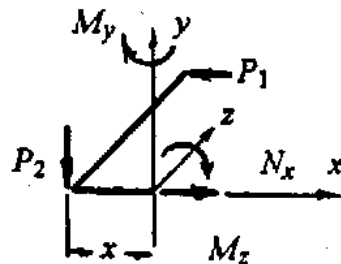
Внутренние силовые факторы определим аналогично тому, как это сделано в предыдущей задаче.

Участок 1
 $(0 \leq x \leq a)$



$$|M_y| = P_1 x.$$

Участок 2
 $(0 \leq x \leq a)$



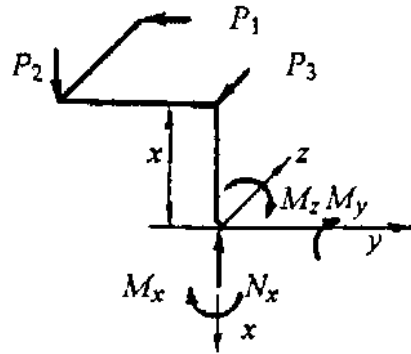
$$|N_x| = P_1,$$

$$M_x = 0,$$

$$|M_y| = P_1 a,$$

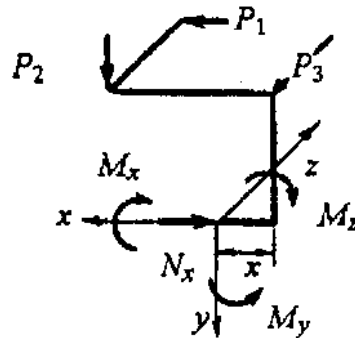
$$|M_z| = P_2 x.$$

Участок 3
($0 \leq x \leq a$)



$$\begin{aligned} |N_x| &= P_2, \\ |M_x| &= P_1 a, \\ M_y &= P_3 x, \\ |M_z| &= P_2 a + P_1 x. \end{aligned}$$

Участок 4
($0 \leq x \leq 2a$)

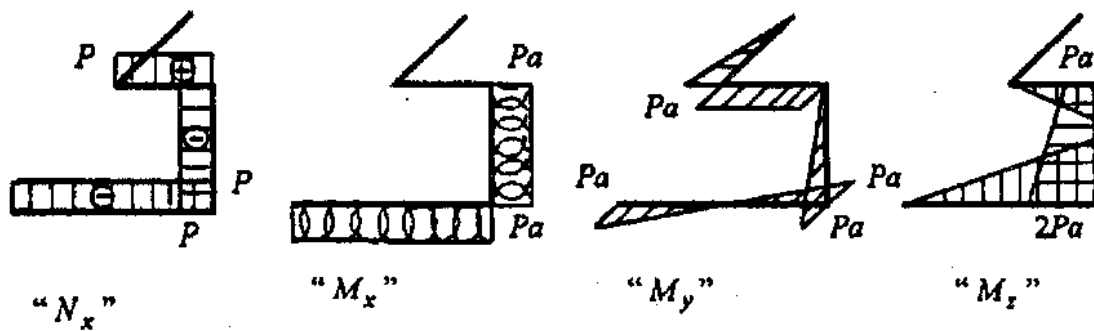


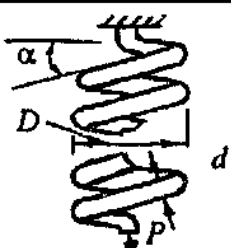
$$\begin{aligned} |N_x| &= P_1, \\ |M_x| &= P_3 a, \\ |M_y| &= P_1 a - P_3 x, \\ |M_z| &= P_2(a - x) + P_1 a. \end{aligned}$$

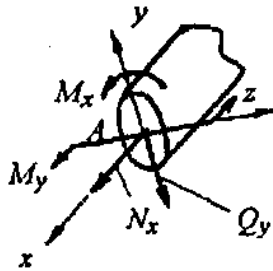
Напомним, что из уравнений статики определяем только величину внутреннего силового фактора. Например, на 3-ем участке имеем $|M_z = P_2 a + P_1 x|$, а на 4-ом - $|M_y| = P_1 a - P_3 x$. Знаки “+” или “-” показывают, что соответствующие слагаемые имеют одинаковые или разные направления. Действительные направления внутренних силовых факторов показаны на рисунках.

2. Построение эпюр N_x , M_x , M_y и M_z по участкам бруса.

Как пример, приведем эпюры для частного случая $P_1 = P_2 = P_3 = P$. Действие изгибающих моментов учтем тем, что их эпюры построим на сжатых волокнах участков бруса (эпюру момента M_y - в плоскости xz , а эпюру M_z - в плоскости xy).



9.8		<p>Дано:</p> $D = 80 \text{ мм}, d = 20 \text{ мм},$ $\alpha = 15^\circ, n = 10 \text{ витков},$ $[\sigma] = 600 \text{ МПа},$ $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа},$ $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$	<p>Определить допускаемое значение силы P и осевое перемещение (опускание) свободного конца цилиндрической пружины.</p>
-----	---	--	--



Ось x касательна к средней линии витка; плоскость xz - плоскость витка.

Если концы пружины выведены в центры витков и подвергаются действию растягивающей силы P вдоль ее оси, то в каждом поперечном сечении пружины имеют место следующие внутренние силовые факторы:

$N_x = P \sin \alpha$ - растягивающая сила; $Q_y = P \cos \alpha$ - перерезывающая сила; $M_x = P(D/2) \cos \alpha$ - крутящий момент; $M_y = P(D/2) \sin \alpha$ - изгибающий момент .

Опасной точкой является точка A , расположенная на оси z на внутренней поверхности витка, где суммируются нормальные напряжения и где касательное напряжение от кручения принимает наибольшее значение. В этой точке имеем

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{16PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4D}\right) \sin \alpha ,$$

$$\tau = \frac{Q_y}{F} + \frac{M_x}{W_p} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right) \cos \alpha .$$

Используя третью теорию прочности, расчетное уравнение получим в виде:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} = \frac{16PD}{\pi d^3} \sqrt{\left(1 + \frac{d}{4D}\right)^2 \sin^2 \alpha + \left(1 + \frac{d}{2D}\right)^2 \cos^2 \alpha} \leq [\sigma]$$

Если шаг пружины, определяемый углом наклона α плоскости витка, мал ($\alpha < 14^\circ$), а отношение диаметров достаточно велико ($D/d > 10$), то расчет проводится только на кручение по формуле

$$\tau_{\text{макс}} = 8PD / \pi d^3 \leq [\tau] , \quad [\tau] = [\sigma] / 2 .$$

При большой кривизне витка ($D/d < 10$) ее влияние удобно учитывать поправочным коэффициентом k , который вводится в условие прочности:

$$\tau_{\text{макс}} = k(8PD / \pi d^3) \leq [\tau] .$$

Значения поправочного коэффициента k приведены в таблице

D/d	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

И наконец, общее выражение, определяющее осевое перемещение δ свободного конца пружины, имеет вид:

$$\delta = \frac{8PD^3 n}{d^4 \cos \alpha} \left[2 \left(1 + \frac{d^2}{4D^2} \right) \frac{\sin^2 \alpha}{E} + \left(1 + \frac{d^2}{2D^2} \right) \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right] .$$

Для пружины малого шага перемещение δ можно определять по упрощенной формуле, учитывающей только деформацию кручения:

$$\delta = 8PD^3 n / Gd^4 .$$

Для решения поставленной задачи остается только применить полученные соотношения с учетом исходных данных: $\alpha = 15^\circ > 14^\circ$ и $D/d = 4 < 10$. Будем иметь

$$P = 10,7 \text{ кН} .$$

$$\delta = 0,0362 \text{ м} = 3,62 \text{ см} .$$

Определение осевого перемещения по упрощенной формуле дает $\delta = 3,42 \text{ см}$, что всего на 5,5% меньше действительного значения.

10. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Работа внешних сил.

Работа внутренних (упругих) сил:

- при растяжении (сжатии) стержня длиной l работа осевой силы N_x осуществляется на перемещении $\Delta(dx) = N_x dx / EF$. Соответственно, работа осевой силы N_x для стержня равна

$$W = - \int_0^l \frac{N_x^2 dx}{2EF} ;$$

- при сложном нагружении (сложном сопротивлении)

$$W = -\int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2GI_p} - \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} - \int_0^l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} - \int_0^l \frac{N_x^2 dx}{2EF}$$

Потенциальная энергия деформации:

- в соответствии с принципом сохранения энергии $U = -W$ имеем

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2GI_p} + \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \int_0^l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} + \int_0^l \frac{N_x^2 dx}{2EF}$$

Обобщенные сила и перемещение:

P - обобщенная сила (сила или момент) ;

δ - обобщенное перемещение (линейное или угловое).

Теорема (формула) Кастильяно:

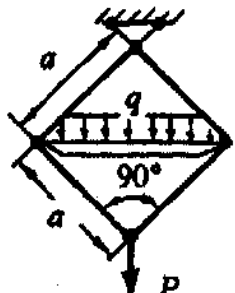
$$\partial U / \partial P = \delta_P -$$

производная потенциальной энергии деформации по обобщенной силе равна обобщенному перемещению точки приложения силы в направлении этой силы.

Интегралы Мора:

$$\delta = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_x}{GI_p} dx + \int_0^l \frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} dx + \int_0^l \frac{M_z \bar{M}_z}{EI_z} dx + \int_0^l \frac{N_x \bar{N}_x}{EF} dx ,$$

где \bar{M}_x , \bar{M}_y и т.д. - внутренние силовые факторы в сечениях бруса при приложении к нему единичной нагрузки (безразмерной единичной обобщенной силы $P = 1$) в точке (сечении), для которой отыскивается обобщенное перемещение δ , в направлении, в котором это перемещение ищется. Положительное значение искомого перемещения получаем, если его направление совпадает с направлением приложенной единичной нагрузки.

10.1		<p>Дано: F, a, E, q, P</p>	<p>Определить перемещение точки приложения силы P с помощью формулы Кастильяно.</p>
------	---	---	--

Стержни рассматриваемой шарнирной системы работают на растяжение. Потенциальная энергия деформации в этом случае определяется соотношением

$$U = \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} \frac{(N_x)_i^2}{2EF} dx ,$$

где $(N_x)_i = N_i$ - внутренние продольные силы в стержнях; $l_i = a$ - длины стержней. Продольные (осевые) силы в стержнях системы имеют следующие значения (см. задачу 3.7):

$$N_1 = N_2 = P/\sqrt{2} , \quad N_3 = N_4 = qa + (P/\sqrt{2}) .$$

Вычисляя потенциальную энергию деформации, получим

$$\begin{aligned} U &= 2 \int_0^a \frac{(P/\sqrt{2})^2}{2EF} dx + 2 \int_0^a \frac{(qa + P/\sqrt{2})^2}{2EF} dx = \\ &= \frac{a}{EF} \left[P^2 + (qa)^2 + \sqrt{2} Pqa \right] . \end{aligned}$$

Применение формулы Кастильяно приводит к результату, полученному ранее другим способом:

$$\delta = \partial U / \partial P = (2Pa + qa^2 \sqrt{2}) / EF .$$

10.2		<p>Дано: $P = 9 \text{ кН}$, $F = 2 \text{ см}^2$, $a = 1 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.</p>	<p>Определить перемещение точки приложения силы P с помощью формулы Кастильяно.</p>
------	--	--	--

Стержни рассматриваемой шарнирной системы работают на растяжение (сжатие). Потенциальная энергия деформации в этом случае определяется соотношением

$$U = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{N_i^2}{2EF} dx ,$$

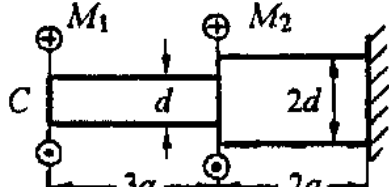
где N_i - внутренние продольные силы в стержнях; l_i - длины стержней. В рассматриваемой задаче $l_1 = l_2 = 2a$, $l_3 = a$ и $N_1 = N_2 = 8P/3$, $N_3 = -5P/3$ (см. задачу 3.8).

Вычисляя потенциальную энергию деформации, получим

$$U = 2 \int_0^{2a} \frac{(8P/3)^2}{2EF} dx + \int_0^a \frac{(-5P/3)^2}{2EF} dx = \frac{281 P^2 a}{18 EF}$$

Применение формулы Кастильяно позволяет получить

$$\delta = dU / dP = 281Pa / 9EF \Rightarrow \delta = 0,7 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

10.3		<p>Дано: $M_1 = M$, $M_2 = 2M$, d, a, G.</p>	<p>Определить угол поворота сечения С с помощью формулы Кастильяно.</p>
------	---	--	---

Рассматриваемая задача является задачей кручения и потенциальная энергия деформации здесь определяется соотношением

$$U = \sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} \frac{M_{xi}^2}{2GI_{pi}} dx = \int_0^{3a} \frac{M_{x1}^2}{2GI_{p1}} dx + \int_0^{2a} \frac{M_{x2}^2}{2GI_{p2}} dx,$$

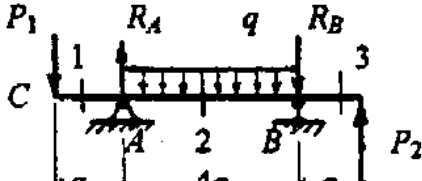
где l_i - длины участков стержня; M_{xi} - внутренние крутящие моменты в сечениях стержня на каждом участке; I_{pi} - полярные моменты инерции сечений стержня на участках.

Легко найти, что $M_{x1} = M_1$, $M_{x2} = M_1 + M_2$ и $I_{p2} = 16I_{p1}$. Подставляя полученные значения в соотношение для потенциальной энергии деформации, будем иметь

$$U = (a / 16GI_{p1}) (25M_1^2 + 2M_1M_2 + M_2^2).$$

В данной задаче отыскивается угловое перемещение (угол поворота сечения С) и роль обобщенной силы исполняет момент M_1 . Применение формулы Кастильяно приводит к результату:

$$\varphi_C = \partial U / \partial M_1 = (a / 16GI_{p1}) (50M_1^2 + 2M_2) = 34,4Ma / Gd^4.$$

10.4		<p>Дано: $P_1 = P_2 = 2qa$, q, a, EI_z.</p>	<p>Определить вертикальное перемещение точки (сечения) С с помощью формулы Кастильяно.</p>
------	---	---	--

Рассматриваемая задача является задачей изгиба балки и потенциальная энергия деформации здесь будет определяться соотношением

$$U = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{M_{zi}^2}{2EI_z} dx = \frac{1}{2EI_z} \left[\int_0^a M_{z1}^2 dx + \int_0^{4a} M_{z2}^2 dx + \int_0^a M_{z3}^2 dx \right],$$

где l_i - длины участков балки; M_{zi} - внутренние изгибающие моменты в сечениях балки на каждом участке; EI_z - жесткость балки при изгибе.

Для определения изгибающих моментов в сечениях балки нужно знать реакции опор, которые отыщем из уравнений равновесия (уравнений моментов относительно опор A и B):

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 a - q \cdot 4a \cdot a - R_B 4a + P_2 5a = 0 .$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 5a + q \cdot 4a \cdot 2a - R_A 4a + P_2 a = 0 .$$

Решение уравнений равновесия позволяет получить

$$R_B = (P_1 + 5P_2 - 8qa) / 4 \quad , \quad R_A = (5P_1 + P_2 + 8qa) / 4 .$$

Чтобы упростить выражения для изгибающих моментов M_{zi} , при их определении пройдем участки 1 и 2 слева направо, а участок 3 - справа налево. Будем иметь:

$$M_{z1} = -P_1 x \quad , \quad M_{z2} = -P_1(x+a) + R_A x - qx^2 / 2 \quad , \quad M_{z3} = P_2 x .$$

Подставляя найденные значения изгибающих моментов в выражение для потенциальной энергии деформации и применяя формулу Кастильяно, получим

$$\begin{aligned} 2EI_z f_C &= 2EI_z \left(\partial U / \partial P_1 \right) = \\ &= 2P_1 \int_0^a x^2 dx + 2 \int_0^{4a} \left[R_A x - P_1(a+x) - (qx^2 / 2) \right] \left[(5x/4) - a \right] dx . \end{aligned}$$

После вычисления интегралов находим:

$$EI_z f_C = (56/3)R_A a^3 - (73/3)P_1 a^3 - (88/3)qa^4 .$$

Принимая во внимание, что $P_1 = 2qa$ и $R_A = 5qa$, окончательно будем иметь:

$$f_C = 46qa^4 / 3EI_z .$$

10.5		Дано: q , a , EI_z .	Определить вертикальное перемещение и угол поворота точки (сечения) A .
------	--	-------------------------------------	---

Рассматриваемая задача является задачей изгиба балки. Применить формулу Кастильяно здесь не представляется возможным, поскольку в точке A не приложены ни сила, ни момент. Для отыскания нужных нам обобщенных перемещений необходимо использовать интегралы Мора. Считая, что балка изгибается в плоскости xu , имеем

$$\delta = \int_0^a \frac{M_{z1} \bar{M}_{z1}}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{M_{z2} \bar{M}_{z2}}{EI_z} dx ,$$

Значения изгибающих моментов в сечениях 1 и 2 балки, вызванных действием заданной внешней нагрузки, равны

$$M_{z1} = -qx^2/2 , \quad M_{z2} = -qa[x + (a/2)] .$$

Отметим, что сечения 1 и 2 пройдены справа налево и начало координат в каждом случае помещено в начало участка. Такой порядок прохождения участков должен быть сохранен и в дальнейшем при определении изгибающих моментов от единичной нагрузки.

Определение вертикального перемещения (прогиба) точки A .

При определении прогиба (линейного перемещения) f_A точки A интегралы Мора перепишем в виде:

$$f_A = \int_0^a \frac{M_{z1} \bar{M}_{z1}^{(1)}}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{M_{z2} \bar{M}_{z2}^{(1)}}{EI_z} dx ,$$

где $\bar{M}_{z1}^{(1)}$ и $\bar{M}_{z2}^{(1)}$ - изгибающие моменты в сечениях 1 и 2 балки, вызванные действием вертикальной безразмерной единичной силы, приложенной в точке A . Сохраняя порядок прохождения участков при отыскании моментов, получим

$\bar{M}_{z1}^{(1)} = -1 \cdot x , \quad \bar{M}_{z2}^{(1)} = -1 \cdot (a + x) .$

Вычисление интегралов Мора приводит к нужному результату:

$$EI_z f_A = \int_0^a \left(qx^2 / 2 \right) (1 \cdot x) dx + \int_0^a \left[qa \left(x + \frac{a}{2} \right) \right] [1 \cdot (a+x)] dx = 41qa^4 / 24 .$$

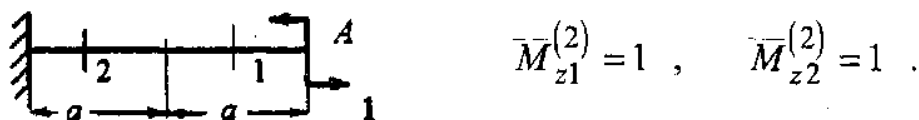
Окончательно, для прогиба в точке A балки имеем:

$$f_A = 41qa^4 / 24EI_z .$$

Определение угла поворота сечения A . При определении угла поворота ϑ_A сечения A интегралы Мора перепишем в виде:

$$\vartheta_A = \int_0^a \frac{M_{z1} \overline{M}_{z1}^{(2)}}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{M_{z2} \overline{M}_{z2}^{(2)}}{EI_z} dx ,$$

где $\overline{M}_{z1}^{(2)}$ и $\overline{M}_{z2}^{(2)}$ - изгибающие моменты в сечениях 1 и 2 балки, вызванные действием безразмерного единичного момента, приложенного в точке A . Сохраняя порядок прохождения участков при отыскании моментов, будем иметь



Вычисление интегралов Мора приводит к нужному результату:

$$EI_z \vartheta_A = - \int_0^a \frac{qx^2}{2} dx - \int_0^a qa \left(x + \frac{a}{2} \right) dx = - \frac{7qa^3}{6} \Rightarrow \vartheta_A = - \frac{7qa^3}{6EI_z} .$$

Знак “ - ” полученного результата говорит о том, что направление поворота сечения обратно направлению единичного момента.

10.6		<p>Дано:</p> $M = qa^2 / 2 ,$ $q ,$ $a ,$ $EI_z .$	<p>Определить вертикальное перемещение и угол поворота точки (сечения) C.</p>
------	--	---	--

Обобщенное перемещение будем определять с помощью интегралов Мора. Считая, что балка изгибается в плоскости xu , имеем

$$EI_z \delta = \int_0^a M_{z1} \overline{M}_{z1} dx + \int_0^{2a} M_{z2} \overline{M}_{z2} dx + \int_0^a M_{z3} \overline{M}_{z3} dx .$$

Для определения в сечениях 1 - 3 балки значений изгибающих моментов M_z , вызванных действием заданной нагрузки, нужно знать реакции опор, которые определим из уравнений равновесия

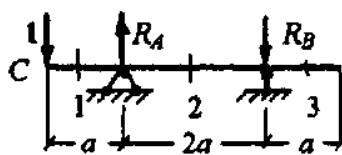
$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow M + R_B 2a - qa \cdot 2,5a = 0 \Rightarrow R_B = qa . \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow R_A + R_B - qa = 0 \Rightarrow R_A = 0 . \end{aligned}$$

Моменты $M_{zi} (i=1, 2, 3)$ соответственно будут равны

$$M_{z1} = 0 , \quad M_{z2} = -M = -qa^2 / 2 , \quad M_{z3} = -qx^2 / 2 .$$

Сечения 1 и 2 пройдены слева направо, а сечение 3 - справа налево. Такой порядок прохождения участков будем сохранять и при определении изгибающих моментов от единичной нагрузки.

Определение вертикального перемещения точки C. Для вычисления прогиба f_C необходимо найти в сечениях 1 - 3 балки изгибающие моменты $\bar{M}_{zi}^{(1)} (i=1, 2, 3)$, вызванные действием вертикальной безразмерной единичной силы, приложенной в точке C.



Реакции опор от действия единичной силы

$$R_A = 3/2 , \quad R_B = 1/2 .$$

Соответственно, для изгибающих моментов по сечениям имеем:

$$\bar{M}_{z1}^{(1)} = -1 \cdot x , \quad \bar{M}_{z2}^{(1)} = -1 \cdot (a + x) + (3/2) \cdot x , \quad \bar{M}_{z3}^{(1)} = 0 .$$

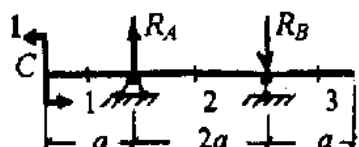
Вычисление интегралов Мора позволяет получить

$$EI_z f_C = \int_0^{2a} \left(-qa^2 / 2 \right) \left[-a + (x/2) \right] dx = qa^4 / 2 .$$

Окончательно, для прогиба в точке C балки имеем:

$$f_C = qa^4 / 2EI_z .$$

Определение угла поворота сечения C. При определении угла поворота ϑ_C необходимо знать изгибающие моменты $\bar{M}_{zi}^{(2)} (i=1, 2, 3)$, вызванные действием безразмерного единичного момента, приложенного в точке C.



Реакции опор от действия единичного момента

$$R_A = 1/2a \quad , \quad R_B = 1/2a \quad .$$

Соответственно, для изгибающих моментов по сечениям имеем:

$$\bar{M}_{z1}^{(2)} = -1 \quad , \quad \bar{M}_{z2}^{(2)} = -1 + (1/2a) \cdot x \quad , \quad \bar{M}_{z3}^{(1)} = 0 \quad .$$

Вычисление интегралов Мора позволяет получить

$$EI_z \vartheta_C = \int_0^{2a} \left(-qa^2/2 \right) \left[-1 + (1/2a)x \right] dx = qa^3/2 \quad .$$

Окончательно, для угла поворота сечения C балки имеем:

$$\vartheta_C = qa^3/2EI_z \quad .$$

10.7		<p>Дано: $P = qa$, q , a , EI_z .</p>	<p>Определить вертикальное перемещение и угол поворота точки (сечения) C, используя метод перемножения эпюр (правило Верещагина).</p>
------	--	--	---

Считая как обычно, что балка изгибается в плоскости xu , обобщенное перемещение определим с помощью интегралов Мора

$$EI_z \delta = \int_0^a M_{z1} \bar{M}_{z1} dx + \int_0^{2a} M_{z2} \bar{M}_{z2} dx \quad .$$

Метод перемножения эпюр (правило Верещагина) заменяет математическую процедуру вычисления интегралов Мора при определении обобщенного перемещения. Суть метода заключается в следующем:

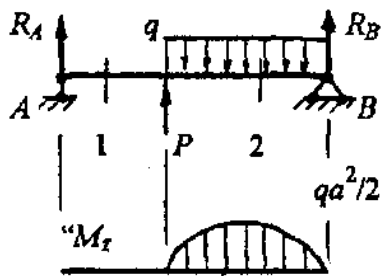
если жесткость поперечного сечения стержня на участке постоянна, то каждый интеграл Мора можно вычислить через произведение площади ω эпюры изгибающего момента от заданных сил на координату ξ эпюры изгибающего момента от безразмерной единичной обобщенной силы (обязательно прямолинейной), соответствующую центру тяжести первой эпюры.

В рассматриваемой задаче правило Верещагина представляется в форме:

$$EI_z \delta = \sum_{i=1}^2 \omega_i \xi_i ,$$

где суммирование осуществляется по участкам балки. Отметим, что для эпюр M_z и \bar{M}_z , имеющих один знак, произведение $\omega \xi > 0$, а для эпюр разных знаков - $\omega \xi < 0$. Если обе эпюры M_z и \bar{M}_z прямолинейны, то безразлично, для которой из них находить площадь ω или координату ξ .

1. Построение эпюры M_z от заданной нагрузки.



Определение реакций опор:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow Pa + R_B 3a - q \cdot 2a \cdot 2a = 0 \\ &\Rightarrow R_B = qa . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\Rightarrow -3R_A a - 2Pa + 2qa^2 = 0 \\ &\Rightarrow R_A = 0 . \end{aligned}$$

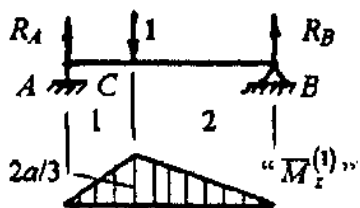
Определение изгибающих моментов в сечениях балки:

$$M_{z1} = 0 , \quad 0 \leq x \leq a ;$$

$$M_{z2} = Px - qx(x/2) = qax - (qx^2/2) , \quad 0 \leq x \leq 2a ,$$

при прохождении участков слева направо.

2. Построение эпюры $\bar{M}_z^{(1)}$ от безразмерной единичной силы, приложенной в точке C.



Определение реакций опор:

$$\sum M_A = R_B 3a - 1 \cdot a = 0 \quad \Rightarrow R_B = 1/3 .$$

$$\sum M_B = -R_A 3a + 1 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow R_A = 2/3 .$$

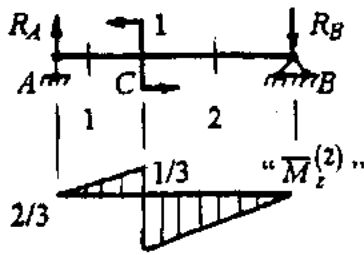
Определение изгибающих моментов в сечениях балки:

$$\bar{M}_{z1}^{(1)} = (2/3) \cdot x , \quad 0 \leq x \leq a ;$$

$$\bar{M}_{z2}^{(1)} = (2/3)(a + x) - 1 \cdot x = (2a - x)/3 , \quad 0 \leq x \leq 2a ,$$

при том же порядке прохождения участков.

3. Построение эпюры $\overline{M}_z^{(2)}$ от безразмерного единичного момента, приложенного в точке C .



Определение реакций опор:

$$\sum M_A = 1 - R_B 3a = 0 \Rightarrow R_B = 1/3a .$$

$$\sum M_B = 1 - R_A 3a = 0 \Rightarrow R_A = 1/3a .$$

Определение изгибающих моментов в сечениях балки:

$$\overline{M}_{z1}^{(2)} = (1/3a) \cdot x \quad , \quad 0 \leq x \leq a ;$$

$$\overline{M}_{z2}^{(2)} = (1/3a)(a+x) - 1 = (x/3a) - (2/3) \quad , \quad 0 \leq x \leq 2a .$$

Порядок прохождения участков сохранен прежний.

4. Определение перемещений точки C .

Поскольку на первом участке изгибающий момент $M_{z1} = 0$, определяющее уравнение принимает вид $EI_z \delta = \omega_2 \xi_2$ и соответственно, получаем

$$\text{для определения прогиба: } EI_z f_C = \omega_2 \xi_2^{(1)} ;$$

$$\text{для определения угла поворота: } EI_z \vartheta_C = \omega_2 \xi_2^{(2)} .$$

Из построенных эпюр находим:

$$\omega_2 = (2/3) \cdot 2a \cdot (qa^2/2) = 2qa^3/3 ; \quad \xi_2^{(1)} = a/3 ; \quad \xi_2^{(2)} = -1/3 ;$$

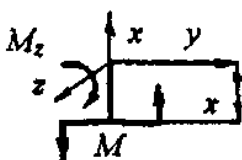
Окончательно имеем:

$$f_C = 2qa^4/9EI_z ; \quad \vartheta_C = -2qa^3/9EI_z .$$

10.8		<p>Дано:</p> $M = Pa/2 ,$ $P, a ,$ $EI_z .$	<p>Определить горизонтальное перемещение точки (сечения) A (использовать метод перемножения эпюр ; x_y - плоскость ломаного бруса).</p>
------	--	---	---

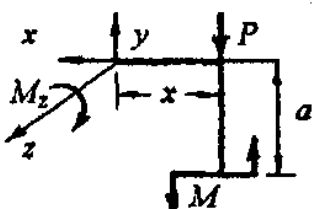
1. Определение внутренних силовых факторов в сечениях бруса (см. задачу 9.6) от заданной нагрузки и построение их эпюр (эпюра M_z строится на сжатых волокнах).

Участок 1
($0 \leq x \leq a$)



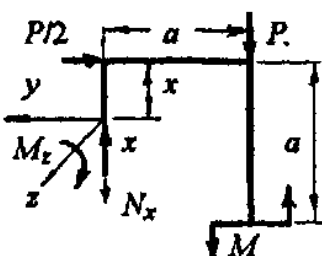
$M_z = M = Pa/2$.

Участок 2
($0 \leq x \leq a$)

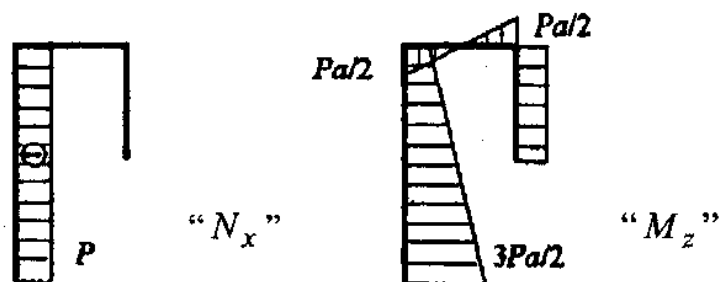


$M_z = (Pa/2) - Px$.

Участок 3
($0 \leq x \leq 2a$)

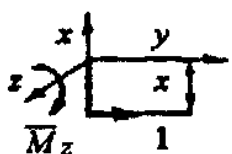


$N_x = P$,
 $M_z = (Pa/2) - Pa - (P/2)x$



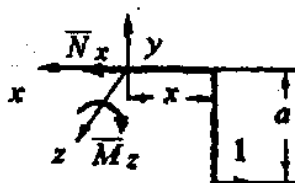
2. Определение внутренних силовых факторов в сечениях бруса от безразмерной единичной силы и построение их эпюр.

Участок 1
($0 \leq x \leq a$)



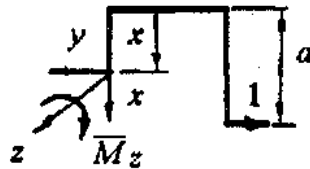
$\bar{M}_z = 1 \cdot x$.

Участок 2
($0 \leq x \leq a$)

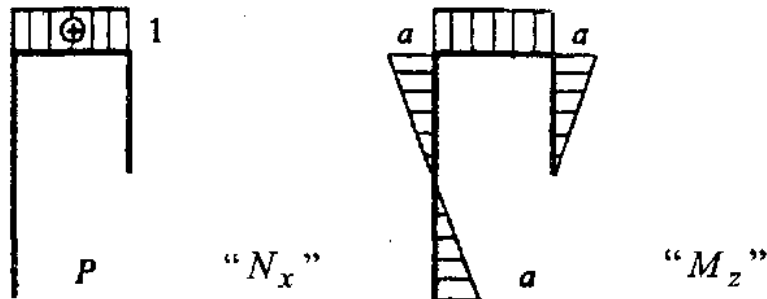


$\bar{N}_x = 1$,
 $\bar{M}_z = 1 \cdot a$.

Участок 3
($0 \leq x \leq 2a$)



$$\bar{M}_z = 1 \cdot (a - x).$$



3. Определение горизонтального перемещения точки A .

Легко видеть, что вклад продольных сил при отыскании искомого перемещения равен нулю, и оно определяется перемножением эпюр изгибающих моментов M_z и \bar{M}_z . Отметим, что в рассматриваемой задаче обе эпюры прямолинейны и здесь безразлично, для которой из них находить площадь ω или координату ξ . Примем

$$\omega_1 = (Pa/2) \cdot a, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3' = -a^2/2, \quad \omega_3'' = a^2/2, \\ \xi_1 = a/2, \quad \xi_2 = a, \quad \xi_3' = 2Pa/3, \quad \xi_3'' = 4Pa/3.$$

При рассмотрении 3-го участка площади определены на эпюре \bar{M}_z и учтены их разные знаки на каждой половине участка.

Для отыскания перемещения получаем соотношение

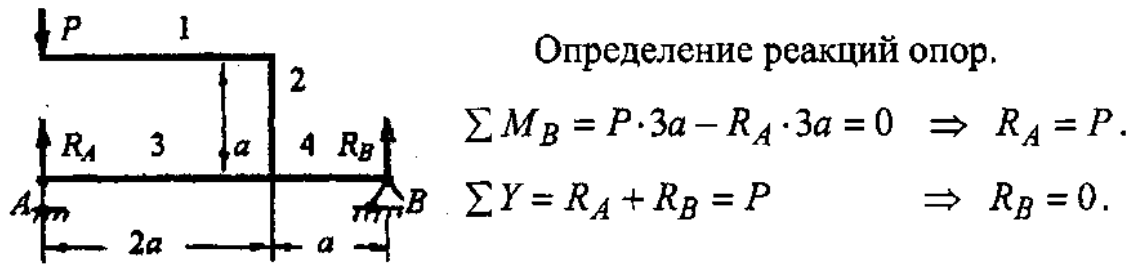
$$EI_z \delta_A = \sum_{i=1}^3 \omega_i \xi_i = \frac{Pa^2}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2Pa}{3} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{4Pa}{3} = \frac{7Pa^3}{12}.$$

Окончательно имеем

$$\delta_A = 7Pa^3 / 12EI_z.$$

10.9		<p>Дано:</p> <p>$P, a,$</p> <p>$EI_z.$</p>	<p>Определить вертикальное перемещение и угол поворота точки (сечения) C.</p>
------	--	--	--

1. Определение внутренних силовых факторов в сечениях бруса от заданной нагрузки и построение их эпюр.



Участок 1
($0 \leq x \leq 2a$)

$$M_z = Px.$$

Участок 2
($0 \leq x \leq a$)

$$N_x = P.$$

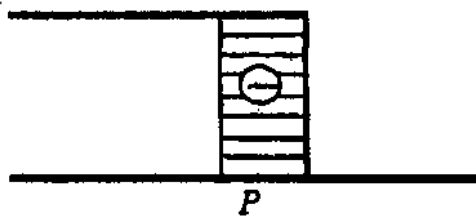
$$M_z = 2Pa.$$

Участок 3
($0 \leq x \leq 2a$)

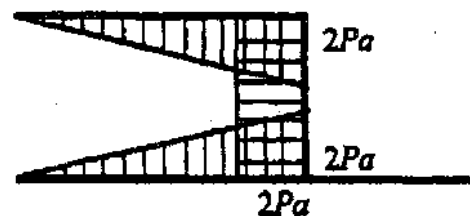
$$M_z = Px.$$

Участок 4
($0 \leq x \leq a$)

$$M_z = 0.$$



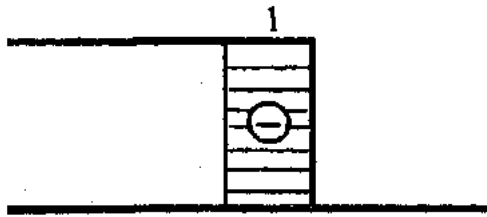
" N_x "



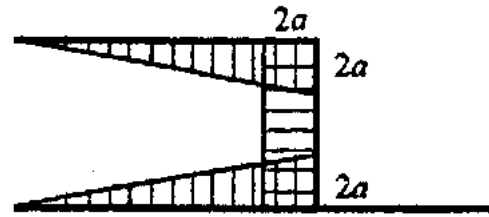
" M_z "

2. Определение внутренних силовых факторов в сечениях бруса от безразмерной единичной силы, построение их эпюр и определение вертикального перемещения точки С.

Поскольку безразмерная единичная сила прикладывается в точке С в вертикальном направлении, эпюры $\bar{N}_x^{(1)}$ и $\bar{M}_z^{(1)}$ имеют ту же форму, что и эпюры N_x и M_z , и отличаются только своими значениями: силу P нужно заменить на 1. Будем иметь



" $N_x^{(1)}$ "



" $M_z^{(1)}$ "

Правило Верещагина здесь представляется в форме

$$f_C = \frac{1}{EI_z} \sum_{i=1}^4 \omega_i \xi_i + \frac{1}{EF} \sum_{i=1}^4 \omega_i' \xi_i',$$

где величины ω' и ξ' относятся к эпюрам продольных сил. Подставляя значения площадей эпюр и соответствующие им значения координат, получим

$$f_C = \frac{1}{EI_z} \left[2 \left(\frac{2Pa}{2} \cdot 2a \right) \cdot \frac{4a}{3} + 2Pa \cdot a \cdot 2a \right] + \frac{1}{EF} Pa \cdot 1$$

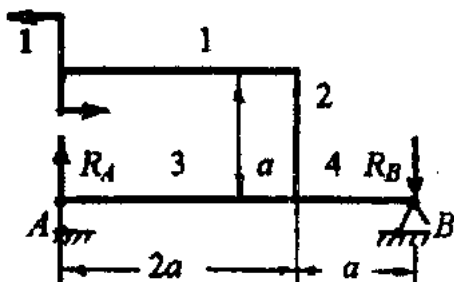
или, после некоторых преобразований,

$$f_C = \frac{Pa^3}{EI_z} \left(\frac{28}{3} + \frac{I_z}{a^2 F} \right).$$

Первое слагаемое в полученном соотношении определяет вертикальное перемещение сечения C от изгиба, а второе - от растяжения. Можно утверждать, что второе слагаемое пренебрежимо мало по сравнению с первым. Действительно, если, например, считать сечение круглым и принять $a = 5d$, то $I_z / a^2 F = d^2 / 16a^2 = 1 / 400$. Окончательно, будем иметь

$$f_C = 28Pa^3 / 3EI_z.$$

3. Определение внутренних силовых факторов от безразмерного единичного момента и определение угла поворота сечения C .



Определение реакций опор.

$$\sum M_B = 1 - R_A \cdot 3a = 0 \Rightarrow R_A = 1 / 3a.$$

$$\sum M_A = 1 - R_B \cdot 3a = 0 \Rightarrow R_B = 1 / 3a.$$

Участок 1	$0 \leq x \leq 2a$	$\overline{M_z^{(2)}} = 1$	
Участок 2	$0 \leq x \leq a$	$\overline{M_z^{(2)}} = 1$	
Участок 3	$0 \leq x \leq 2a$	$\overline{M_z^{(2)}} = x/3a$	
Участок 4	$0 \leq x \leq a$	$\overline{M_z^{(2)}} = x/3a$	

Поскольку на четвертом участке изгибающий момент M_z равен нулю, при определении угла поворота ϑ_C перемножение эпюр проводим на первых трех участках

$$EI_z \vartheta_C = \left(\frac{1}{2} \cdot 2Pa \cdot 2a \right) \cdot 1 + (2Pa \cdot a) \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2Pa \cdot 2a \right) \cdot \frac{4}{9} = \frac{44Pa^2}{9} .$$

Окончательно,

$$\vartheta_C = 44Pa^2 / 9EI_z .$$

10.10		Дано: $P, a,$ $EI_z .$	Определить горизонтальное перемещение подвижной шарнирной опоры B.
-------	--	------------------------------	--

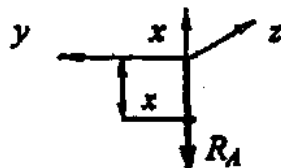
1. Определение внутренних силовых факторов в сечениях бруса от заданной нагрузки и построение их эпюр.

Направляя реакцию опоры R_A вниз, а реакцию опоры R_B вверх, из уравнений статики будем иметь:

$$\sum M_A = -P \cdot 3a + R_B \cdot 2a = 0 \Rightarrow R_B = 3P/2 .$$

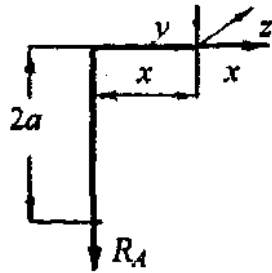
$$\sum M_B = -P \cdot a + R_A \cdot 2a = 0 \Rightarrow R_A = P/2 .$$

Участок 1
 $(0 \leq x \leq 2a)$



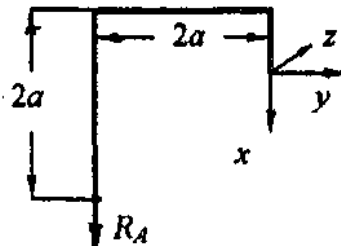
$N_x = P/2$ - растяжение.

Участок 2
($0 \leq x \leq 2a$)



$$M_z = (P/2) \cdot x .$$

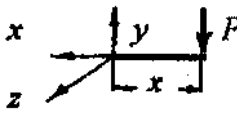
Участок 3
($0 \leq x \leq a$)



$$N_x = P/2 - \text{сжатие} .$$

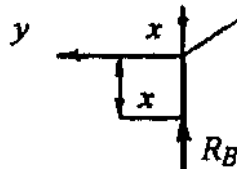
$$M_z = (P/2) \cdot 2a .$$

Участок 4
($0 \leq x \leq a$)

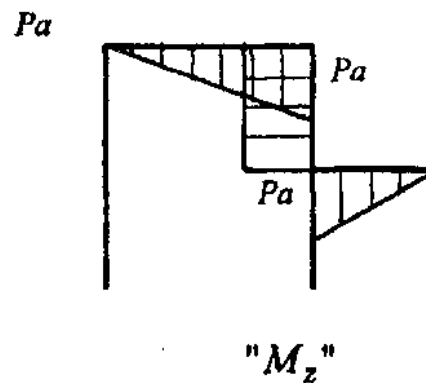
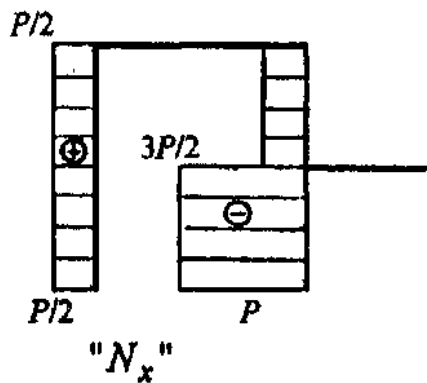


$$M_z = P \cdot x .$$

Участок 5
($0 \leq x \leq a$)



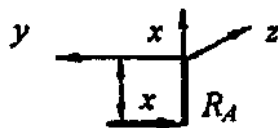
$$N_x = 3P/2 - \text{сжатие} .$$



2. Определение внутренних силовых факторов в сечениях бруса от безразмерной единичной силы и построение их эпюры.

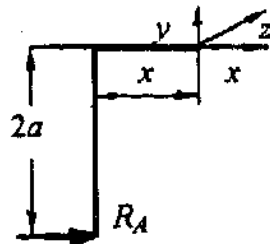
В соответствии с условием задачи в точке *B* прикладываем горизонтальную единичную безразмерную силу, направляя ее справа налево. Очевидно, что в опоре *A* будем иметь горизонтальную реакцию $R_A = 1$, направленную слева направо.

Участок 1
($0 \leq x \leq 2a$)



$$\bar{M}_z = 1 \cdot x .$$

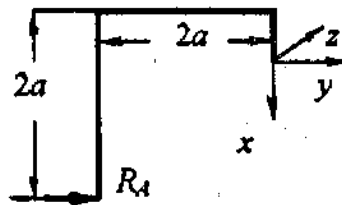
Участок 2
($0 \leq x \leq 2a$)



$$N_x = 1 - \text{сжатие.}$$

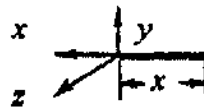
$$M_z = 1 \cdot 2a .$$

Участок 3
($0 \leq x \leq a$)



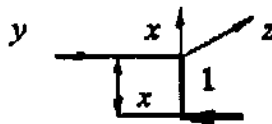
$$\bar{M}_z = 1 \cdot (2a - x) .$$

Участок 4
($0 \leq x \leq a$)

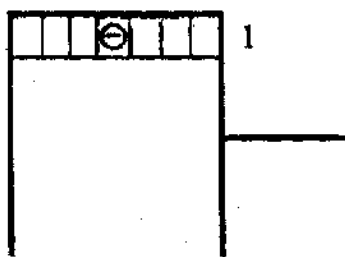


$$\bar{M}_z = 0 .$$

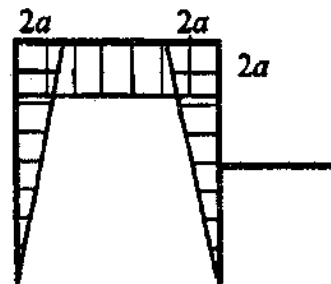
Участок 5
($0 \leq x \leq a$)



$$\bar{M}_z = 1 \cdot x .$$



" N_x "



" M_z "

3. Определение горизонтального перемещения опоры B .

Легко видеть, что вклад продольных сил при отыскании искомого перемещения равен нулю, и оно определяется перемножением эпюр изгибающих моментов M_z и \bar{M}_z только на участках 2 и 3.

Как результат этого перемножения получаем соотношение

$$EI_z \delta_B = \left(\frac{1}{2} Pa \cdot 2a \right) \cdot 2a + \left(a \cdot a + \frac{1}{2} a \cdot a \right) \cdot Pa = \frac{7Pa^3}{2} .$$

При рассмотрении 3-го участка площадь определена на эпюре \bar{M}_z .

Окончательно имеем

$$\delta_B = 7Pa^3 / 2EI_z .$$

11. РАСКРЫТИЕ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Классификация стержневых систем:

- системы статически определимые и статически неопределимые (общее определение);
- системы плоские, плоско-трехмерные, трехмерные;
- фермы, рамы.

Степень статической неопределимости системы:

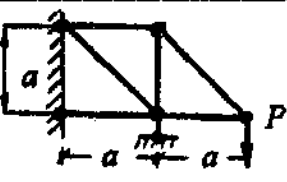
- связи необходимые (внешние), обеспечивающие геометрическую неизменяемость системы, и лишние или избыточные (внешние и внутренние);
- статическая неопределимость плоского замкнутого контура;
- снижение степени статической неопределимости при наличии шарнира; шарниры простые (одиночные), двойные, тройные и т.д.;
- определение степени статической неопределимости плоских стержневых систем по формуле $s = 3k - ш$ (k - число замкнутых контуров, $ш$ - число простых шарниров, основание рассматривается как стержень с бесконечно большой жесткостью);

Заданная статически неопределимая стержневая система; статически определимая основная система; эквивалентная система.

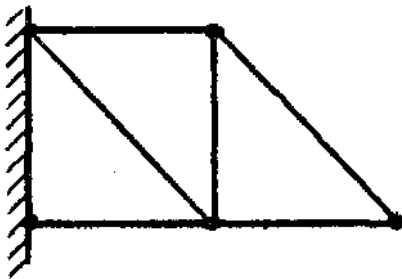
Метод перемещений при раскрытии статической неопределимости системы (см. разделы 3 и 7).

Метод сил при раскрытии статической неопределимости системы:

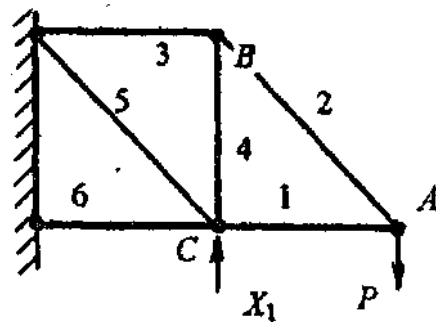
- принцип минимума потенциальной энергии упругой деформации системы (теорема *Menabréa*) или принцип минимальной работы (в прямом виде и с представлением уравнений принципа через интегралы Мора);
- метод сил в канонической форме.

11.1		<p>Дано:</p> <p>$P, a,$ $EF.$</p>	<p>Определить продольные усилия в стержнях фермы.</p>
------	---	---	---

В рассматриваемой задаче имеем одну лишнюю внешнюю связь (шарнирно подвижную опору), следовательно, степень статической неопределимости фермы равна единице.



“основная система”



“эквивалентная система”

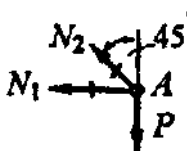
1. Определение лишней неизвестной X_1 с использованием принципа минимума потенциальной энергии непосредственно.

Поскольку все стержни работают только на растяжение-сжатие и продольные усилия постоянны по их длине, потенциальная энергия упругой деформации системы определяется соотношением

$$U = \sum_{i=1}^6 \int_0^{l_i} \frac{N_i^2 dx}{EF} = \frac{a}{2EF} (N_1^2 + N_3^2 + N_4^2 + N_6^2) + \frac{a}{\sqrt{2}EF} (N_2^2 + N_5^2).$$

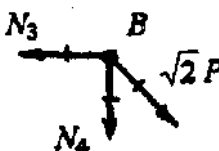
Найдем усилия в стержнях фермы:

Узел A



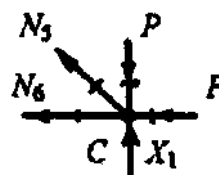
$$\begin{aligned} \sum Y &= N_2 / \sqrt{2} - P = 0 \Rightarrow N_2 = \sqrt{2}P. \\ \sum X &= N_1 + N_2 / \sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_1 = -P. \end{aligned}$$

Узел B



$$\begin{aligned} \sum Y &= N_4 + P = 0 \Rightarrow N_4 = -P. \\ \sum X &= N_3 - P = 0 \Rightarrow N_3 = P. \end{aligned}$$

Узел C



$$\begin{aligned} \sum Y &= N_5 / \sqrt{2} + X_1 - P = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_5 = \sqrt{2}(P - X_1). \end{aligned}$$

$$\sum X = N_5 / \sqrt{2} + N_6 + P = 0 \Rightarrow N_6 = X_1 - 2P.$$

Отметим, что в задаче нет необходимости вычислять потенциальную энергию деформации, поскольку определяющим является уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{a}{2EF} \left(2N_6 \frac{\partial N_6}{\partial X_1} + 2\sqrt{2}N_5 \frac{\partial N_5}{\partial X_1} \right) = 0 ,$$

где $\partial N_6 / \partial X_1 = 1$ и $\partial N_5 / \partial X_1 = -\sqrt{2}$. Для отыскания неизвестной силы X_1 получаем уравнение

$$N_6 - 2N_5 = 0 \Rightarrow X_1 - 2P - 2\sqrt{2}(P - X_1) = 0 ,$$

откуда находим

$$X_1 = 1,26P .$$

Соответственно, для продольных усилий в стержнях 5 и 6 имеем:

$$N_5 = -0,37P , \quad N_6 = -0,74P .$$

2. Определение лишней неизвестной X_1 с использованием интегралов Мора.

Принцип минимума потенциальной энергии деформации системы (принцип минимальной работы) через интегралы Мора в данной задаче представляется уравнением

$$\sum_{i=1}^6 \int_0^{l_i} \frac{N_i \bar{N}_i}{EF} dx = 0 ,$$

где N_i - продольные усилия в стержнях эквивалентной системы от действия заданной нагрузки и неизвестной силы X_1 ; \bar{N}_i - такие же усилия в основной системе от действия только силы $X_1 = 1$.


Значения сил N_i уже известны:

$$N_1 = -P, \quad N_2 = \sqrt{2}P, \quad N_3 = P, \quad N_4 = -P, \quad N_5 = \sqrt{2}(P - X_1), \\ N_6 = X_1 - 2P .$$

Для единичной силы $X_1 = 1$ находим:

$$\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \bar{N}_3 = \bar{N}_4 = 0 ,$$

Узел C



$$\sum Y = \bar{N}_5 / \sqrt{2} + 1 = 0 \Rightarrow \bar{N}_5 = -\sqrt{2} .$$

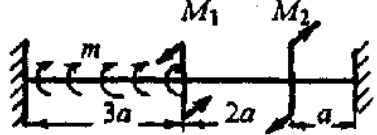
$$\sum X = \bar{N}_5 / \sqrt{2} + \bar{N}_6 = 0 \Rightarrow \bar{N}_6 = 1 .$$

Подставляя значения сил N_i и \bar{N}_i в интегралы Мора, получим

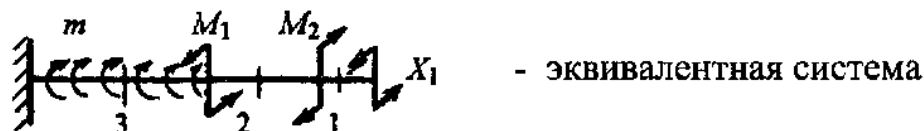
$$\int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{2}(P - X_1)(-\sqrt{2}) dx + \int_0^a (X_1 - 2P) \cdot 1 dx = 0 ,$$

откуда следует то же самое уравнение для определения X_1 :

$$X_1 - 2P - 2\sqrt{2}(P - X_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 1,26P .$$

11.2		Дано: $m, a,$ $M_1 = 3ma$ $M_2 = 3ma/2.$	Определить моменты в закреплении концов вала при известной жесткости на кручение GI_p .
------	---	---	---

Степень статической неопределимости вала равна единице.



1. Определение лишней неизвестной X_1 с использованием принципа минимума потенциальной энергии.

В сечениях вала от заданных нагрузок и неизвестного момента X_1 действуют крутящие моменты

$$M_{x1} = X_1, \quad M_{x2} = X_1 - M_1, \quad M_{x3} = X_1 - M_1 + M_2 - mx$$

и соответственно, потенциальная энергия деформации имеет вид

$$U = \frac{1}{GI_p} \left[\int_0^a X_1^2 dx + \int_0^{2a} (X_1 - M_1)^2 dx + \int_0^{3a} (X_1 - M_1 + M_2 - mx)^2 dx \right].$$

Реализация принципа минимума потенциальной энергии приводит к уравнению для определения лишней неизвестной X_1 :

$$2X_1a + 2(X_1 - M_1)2a + 2(X_1 - M_1 + M_2)3a - 2m(9a^2/2) = 0 .$$

После некоторых преобразований получим:

$$6X_1 - 5M_1 + 3M_2 - (9ma/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = ma/2 .$$

Момент в закреплении A найдем из уравнения равновесия вала в целом. Будем иметь

$$M_A = ma .$$

2. Определение лишней неизвестной X_1 с использованием интегралов Мора.

Значения крутящих моментов M_{xi} в сечениях вала от заданных нагрузок и неизвестного момента X_1 (в эквивалентной системе) уже

известны. Значения моментов \bar{M}_{xi} в основной системе от единичной нагрузки $X_1 = 1$ отыскиваются без особых затруднений. Здесь имеем

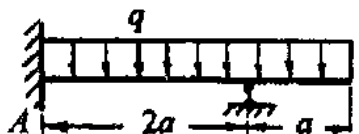
$$\bar{M}_{x1} = \bar{M}_{x2} = \bar{M}_{x3} = 1 .$$

Определяющее уравнение через интегралы Мора в данной задаче представляется уравнением

$$\sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{M_{xi} \bar{M}_{xi}}{GI_p} dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^a X_1 dx + \int_0^{2a} (X_1 - M_1) dx + \int_0^{3a} (X_1 - M_1 + M_2 - mx) dx = 0 .$$

Вычисление интегралов приводит к уравнению относительно момента X_1 , откуда следует уже известное его значение $X_1 = ma / 2$.

11.3		<p>Дано: $q, a,$ $EI_z.$</p>	<p>Определить реакции в жестком закреплении А балки (использовать интегралы Мора).</p>
------	--	--	--

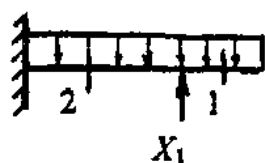
Степень статической неопределимости балки равна единице.

Определяющее уравнение через интегралы Мора в данной задаче представляется уравнением

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} \frac{M_{zi} \bar{M}_{zi}}{EI_z} dx = 0$$

где M_{zi} - значения изгибающих моментов в эквивалентной системе; \bar{M}_{zi} - их значения в основной системе от единичной нагрузки $X_1 = 1$. Влиянием перерезывающих сил пренебрегаем.

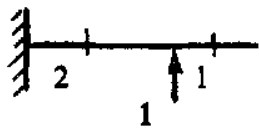
Определение изгибающих моментов в эквивалентной системе:



$$M_{z1} = -qx^2 / 2 \quad (0 \leq x \leq a) ,$$

$$M_{z2} = X_1 \cdot x - q(x + a)^2 / 2 \quad (0 \leq x \leq 2a) .$$

Определение изгибающих моментов в основной системе от единичной силы:



$$\bar{M}_{z1} = 0 \quad (0 \leq x \leq a) ,$$

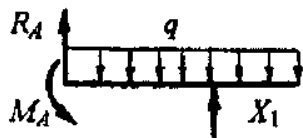
$$\bar{M}_{z2} = 1 \cdot x \quad (0 \leq x \leq 2a) .$$

Для отыскания лишней неизвестной X_1 получаем уравнение

$$\int_0^{2a} \left[X_1 \cdot x - \frac{q(x+a)^2}{2} \right] x dx = 0 ,$$

откуда следует $X_1 = 17qa/8$.

Реакции в жестком закреплении A вычисляем из уравнений равновесия балки:



$$\sum Y = R_A + (17qa/8) - 3qa = 0$$

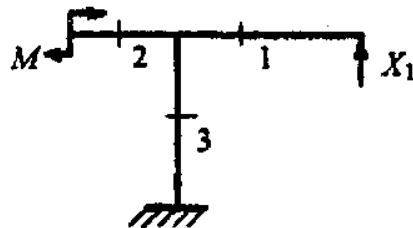
$$\Rightarrow R_A = 7qa/8 .$$

$$\sum M_A = M_A + (17qa/8) \cdot x - 3qa \cdot 1,5a = 0 \Rightarrow M_A = qa^2/4 .$$

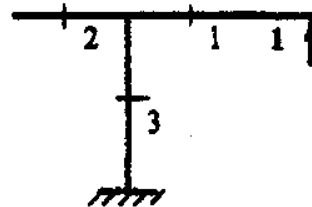
11.4		<p>Дано: $M, a,$ $EI_z.$</p>	<p>Раскрыть статическую неопределимость системы (использовать интегралы Мора).</p>
------	--	--	--

Степень статической неопределимости балки равна единице (имеем лишнюю неизвестную X_1 в шарнирно подвижной опоре).

Для раскрытия статической неопределимости с помощью интегралов Мора определим внутренние силовые факторы в сечениях эквивалентной системы и в сечениях основной системы от единичной нагрузки $X_1 = 1$.



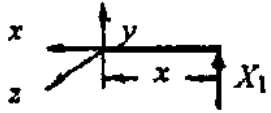
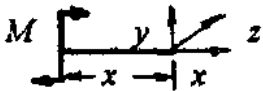
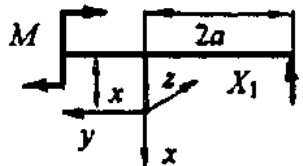
Эквивалентная система



Основная система при единичном нагружении

Эквивалентная система

Основная система при единичном нагружении

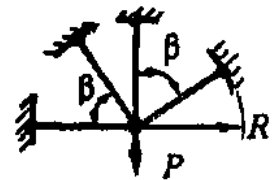
	Участок 1 ($0 \leq x \leq 2a$)	
	$M_{z1} = X_1 \cdot x$	$\bar{M}_{z1} = 1 \cdot x$
	Участок 2 ($0 \leq x \leq a$)	
	$M_{z2} = M$	$\bar{M}_{z2} = 0$
	Участок 3 ($0 \leq x \leq 2a$)	
	$N_{x3} = X_1$ $M_{z3} = M - X_1 \cdot 2a$	$\bar{N}_{x3} = 1$ $\bar{M}_{z3} = -1 \cdot 2a$

Принимая в рассмотрение только изгибающие моменты, для определения неизвестной X_1 получаем уравнение

$$\int_0^{2a} X_1 \cdot x \cdot x dx + \int_0^{2a} (M - X_1 \cdot 2a)(-2a) dx = 0 ,$$

откуда после вычисления интегралов находим

$$X_1 \cdot (8a^3/3) - M \cdot 4a^2 + X_1 \cdot 4a^2 \cdot 2a = 0 \Rightarrow X_1 = 3M/8a .$$

11.5		Дано: P , R, β , EF .	Определить продольные усилия в стержнях системы (использовать принцип минимума потенциальной энергии).
------	---	--	--

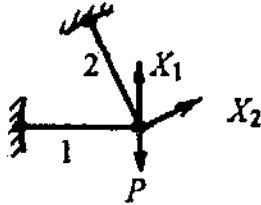
1. Определение продольных усилий в стержнях с использованием принципа минимума потенциальной энергии.

В рассматриваемой задаче степень статической неопределимости равна двум и, соответственно, потенциальная энергия упругой деформации эквивалентной системы приводится к виду

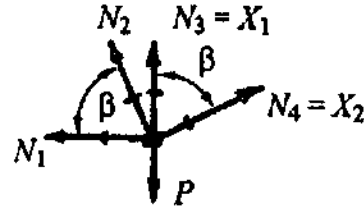
$$U = U(X_1, X_2, P),$$

где X_1 и X_2 - две лишних неизвестных. Условиями ее минимума являются уже два уравнения $\partial U / \partial X_1 = 0$ и $\partial U / \partial X_2 = 0$, решение которых и позволяет найти величины X_1 и X_2 .

Определим усилия в стержнях 1 и 2 эквивалентной системы.



Эквивалентная система



$$\sum Y = X_1 + N_2 \sin \beta + X_2 \cos \beta - P = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{P - X_1 - X_2 \cos \beta}{\sin \beta};$$

$$\sum X = N_1 + N_2 \cos \beta - X_2 \sin \beta = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{X_2 + (X_1 - P) \cos \beta}{\sin \beta}.$$

Потенциальная энергия деформации эквивалентной системы через внутренние силы представляется соотношением

$$U = \sum_{i=1}^4 \int_0^R \frac{N_i^2 dx}{2EF} = \frac{R}{2EF} (N_1^2 + N_2^2 + X_1^2 + X_2^2)$$

и уравнения, определяющие ее минимум, имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{R}{2EF} \left(2N_1 \frac{\partial N_1}{\partial X_1} + 2N_2 \frac{\partial N_2}{\partial X_1} + 2X_1 \right) = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_2} = \frac{R}{2EF} \left(2N_1 \frac{\partial N_1}{\partial X_2} + 2N_2 \frac{\partial N_2}{\partial X_2} + 2X_2 \right) = 0.$$

Подставив в полученные соотношения значения сил N_1 и N_2 и их производные, после несложных преобразований получим

$$X_1 + X_2 \cos \beta = P (\cos^2 \beta + 1) / 2,$$

$$X_1 \cos \beta + X_2 = P \cos \beta,$$

откуда следует

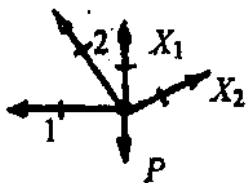
$$X_1 = P/2, \quad X_2 = P \cos \beta / 2.$$

Окончательно, для продольных сил в стержнях системы имеем:

$$N_1 = 0, \quad N_2 = P \sin \beta / 2, \quad N_3 = P/2, \quad N_4 = P \cos \beta / 2.$$

2. Определение продольных усилий в стержнях с использованием интегралов Мора.

Напомним, что для решения задачи с применением интегралов Мора необходимо предварительно отыскать значения внутренних силовых факторов в сечениях эквивалентной системы и в сечениях основной системы при действии только одной неизвестной $X_i = 1$ из всех имеющихся. Таким образом, для n раз статически неопределимой системы нужно ее рассмотреть в $(n+1)$ состояниях: в эквивалентном и в n "единичных". Под единичным состоянием дальше будем понимать основную систему, нагруженную неизвестной силой $X_i = 1$.



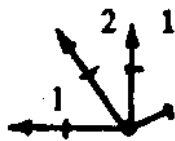
Эквивалентное состояние

$$N_1 = [X_2 + (X_1 - P) \cos \beta] / \sin \beta ,$$

$$N_2 = (P - X_1 - X_2 \cos \beta) / \sin \beta ,$$

$$N_3 = X_1 ,$$

$$N_4 = X_2 .$$



Первое единичное состояние ($X_1 = 1$)

$$\bar{N}_1^{(1)} = \cos \beta / \sin \beta ,$$

$$\bar{N}_2^{(1)} = -1 / \sin \beta ,$$

$$\bar{N}_3^{(1)} = 1 ,$$

$$\bar{N}_4^{(1)} = 0 .$$



Второе единичное состояние ($X_2 = 1$)

$$\bar{N}_1^{(2)} = 1 / \sin \beta ,$$

$$\bar{N}_2^{(2)} = -\cos \beta / \sin \beta ,$$

$$\bar{N}_3^{(2)} = 0 ,$$

$$\bar{N}_4^{(2)} = 1 .$$

Уравнения, определяющие неизвестные X_1 и X_2 с применением интегралов Мора, имеют вид

$$\sum_{i=1}^4 \int_0^R \frac{N_i \bar{N}_i^{(1)}}{EF} dx = \frac{R}{EF} (N_1 \bar{N}_1^{(1)} + N_2 \bar{N}_2^{(1)} + X_1) = 0 ,$$

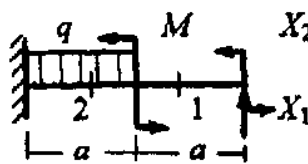
$$\sum_{i=1}^2 \int_0^a \frac{N_i \bar{N}_i^{(2)}}{EF} dx = \frac{R}{EF} \left(N_1 \bar{N}_1^{(2)} + N_2 \bar{N}_2^{(2)} + X_2 \right) = 0 .$$

Подставив в полученные соотношения значения продольных сил N_i , $\bar{N}_i^{(1)}$ и $\bar{N}_i^{(2)}$ ($i=1,2$) и проведя некоторые преобразования, получим те же уравнения для определения X_1 и X_2 , что в п. 1.

11.6		Дано: $q, a,$ $M = qa^2,$ $EI_z.$	Раскрыть статическую неопределимость балки (применить интегралы Мора).
------	--	--	--

Степень статической неопределимости балки равна двум.

Определим значения изгибающих моментов в сечениях балки, рассматривая ее эквивалентное состояние и два единичных, понимая под единичным состоянием основную систему, нагруженную неизвестной силой $X_i = 1$ ($i=1,2$).



Эквивалентное состояние

$$M_{z1} = X_1 \cdot x + X_2 \quad (0 \leq x \leq a),$$

$$M_{z2} = X_1(x+a) + X_2 + M - (qx^2/2) \quad (0 \leq x \leq a).$$



Первое единичное состояние ($X_1 = 1$)

$$\bar{M}_{z1}^{(1)} = 1 \cdot x \quad (0 \leq x \leq a),$$

$$\bar{M}_{z2}^{(1)} = 1 \cdot (x+a) \quad (0 \leq x \leq a).$$



Второе единичное состояние ($X_2 = 1$)

$$\bar{M}_{z1}^{(2)} = 1 \quad (0 \leq x \leq a),$$

$$\bar{M}_{z2}^{(2)} = 1 \quad (0 \leq x \leq a).$$

Уравнения, определяющие неизвестные X_1 и X_2 с применением интегралов Мора, имеют вид

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^a \frac{M_{zi} \bar{M}_{zi}^{(1)}}{EI_z} dx = 0, \quad \sum_{i=1}^2 \int_0^a \frac{M_{zi} \bar{M}_{zi}^{(2)}}{EI_z} dx = 0$$

или, с подстановкой значений изгибающих моментов,

$$\int_0^a (X_1 x + X_2) x dx + \int_0^a \left[X_1(x+a) + X_2 + M - (qx^2/2) \right] (x+a) dx = 0 ,$$

$$\int_0^a (X_1 x + X_2) dx + \int_0^a \left[X_1(x+a) + X_2 + M - (qx^2/2) \right] dx = 0 .$$

После вычисления интегралов и проведения некоторых простых преобразований уравнения принимают вид

$$X_1 \cdot 8a + 6X_2 = -29qa^2 / 8 ,$$

$$X_1 \cdot a + X_2 = -5qa^2 / 12 .$$

Решение представленных соотношений относительно разыскиваемых неизвестных X_1 и X_2 позволяет получить

$$X_1 = -27qa / 48 , \quad X_2 = 7qa^2 / 48 .$$

Реакции в левом закреплении балки при необходимости могут быть найдены из уравнений статики.

11.7		<p>Дано:</p> <p>$P,$ $R, \beta,$ $EF.$</p>	<p>Определить продольные усилия в стержнях системы (использовать метод сил в канонической форме).</p>
------	--	---	---

Рассматриваемая задача уже решена методом сил с использованием принципа минимума упругой потенциальной энергии деформации системы непосредственно и с его представлением через интегралы Мора (см. задачу 11.5).

Раскрытие статической неопределимости упругой системы методом сил в канонической форме подразумевает решение системы уравнений вида:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0 ,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} = 0 ,$$

$$\dots$$

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0 .$$

Каждое из этих уравнений выражает условие равенства нулю обобщенного перемещения в n раз статически неопределимой системе, соответствующего каждой лишней неизвестной обобщенной силе X_i ($i=1, 2, \dots, n$).

Свободные члены уравнений Δ_{iP} и все коэффициенты δ_{ii} и $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ ($k=1, 2, \dots, n$) являются обобщенными перемещениями в основной системе в направлении силы X_i (указанной первым индексом): Δ_{iP} - от действия всех заданных сил; δ_{ii} и δ_{ik} - от действия каждой единичной силы $X_i = 1$ или $X_k = 1$ (указанной вторым индексом). Таким образом, для n раз статически неопределимой системы нужно ее рассмотреть в $(n+1)$ состояниях: в основном при действии заданных сил (в дальнейшем - состояние "P") и в n "единичных". Под единичным состоянием, как и ранее, понимаем основную систему, нагруженную неизвестной силой $X_i = 1$.

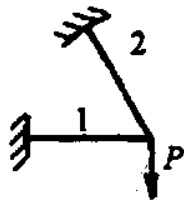
Для определения обобщенных перемещений в дальнейшем, как правило, будем использовать энергетический метод с применением интегралов Мора (непосредственно или в форме процедуры перемножения эпюр Верещагина).

Степень статической неопределимости рассматриваемой задачи равна двум и, соответственно, канонические уравнения метода сил имеют вид:

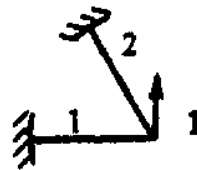
$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned}$$

Для определения коэффициентов уравнений (перемещений) с применением интегралов Мора необходимо определить продольные усилия в стержнях, рассматривая систему в следующих трех состояниях:

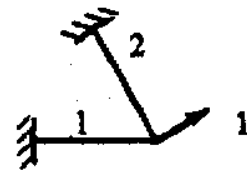
Состояние "P"
(основное состояние при действии силы P)



Состояние "1"
(основное состояние при действии силы $X_1 = 1$)



Состояние "2"
(основное состояние при действии силы $X_2 = 1$)



$$\begin{aligned}
N_1^{(P)} &= -P \cos \beta / \sin \beta, & \bar{N}_1^{(1)} &= \cos \beta / \sin \beta, & \bar{N}_1^{(2)} &= 1 / \sin \beta, \\
N_2^{(P)} &= P / \sin \beta, & \bar{N}_2^{(1)} &= -1 / \sin \beta, & \bar{N}_2^{(2)} &= -\cos \beta / \sin \beta, \\
N_3^{(P)} &= 0, & \bar{N}_3^{(1)} &= 1, & \bar{N}_3^{(2)} &= 0, \\
N_4^{(P)} &= 0, & \bar{N}_4^{(1)} &= 0, & \bar{N}_4^{(2)} &= 1.
\end{aligned}$$

Для коэффициентов канонических уравнений имеем:

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^4 \int_0^R \frac{N_i^{(P)} \bar{N}_i^{(1)}}{EF} dx = -\frac{R}{EF} \cdot \frac{P(1 + \cos^2 \beta)}{\sin^2 \beta},$$

$$\Delta_{2P} = \sum_{i=1}^4 \int_0^R \frac{N_i^{(P)} \bar{N}_i^{(2)}}{EF} dx = -\frac{R}{EF} \cdot \frac{2P \cos \beta}{\sin^2 \beta},$$

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^4 \int_0^R \frac{\bar{N}_i^{(1)} \bar{N}_i^{(1)}}{EF} dx = \frac{R}{EF} \cdot \frac{2}{\sin^2 \beta},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{i=1}^4 \int_0^R \frac{\bar{N}_i^{(1)} \bar{N}_i^{(2)}}{EF} dx = \frac{R}{EF} \cdot \frac{2 \cos \beta}{\sin^2 \beta},$$

$$\delta_{22} = \sum_{i=1}^4 \int_0^R \frac{\bar{N}_i^{(2)} \bar{N}_i^{(2)}}{EF} dx = \frac{R}{EF} \cdot \frac{2}{\sin^2 \beta}.$$

Подставляя значения коэффициентов в канонические уравнения, получим

$$X_1 + X_2 \cos \beta = P(\cos^2 \beta + 1) / 2,$$

$$X_1 \cos \beta + X_2 = P \cos \beta.$$

Легко видеть, что это те же уравнения, которые получены в задаче 11.5 другими методами. Решение этих уравнений известно

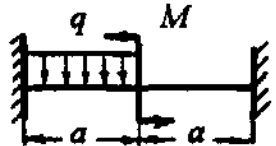
$$X_1 = P / 2, \quad X_2 = P \cos \beta / 2.$$

Для определения продольных усилий в стержнях системы при заданном нагружении проще всего воспользоваться принципом наложения (принципом независимости действия сил)

$$N_i = N_i^{(P)} + \bar{N}_i^{(1)} X_1 + \bar{N}_i^{(2)} X_2.$$

Окончательно, для продольных сил в стержнях имеем:

$$N_1 = 0, \quad N_2 = P \sin \beta / 2, \quad N_3 = P / 2, \quad N_4 = P \cos \beta / 2.$$

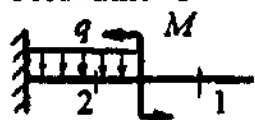
11.8		<p>Дано: $q, a,$ $M = qa^2,$ $EI_z.$</p>	<p>Раскрыть статическую неопределимость балки (применить метод сил в канонической форме).</p>
------	---	--	---

Рассматриваемая задача уже решена методом сил с представлением принципа минимума потенциальной энергии деформации через интегралы Мора (см. задачу 11.6).

Степень статической неопределимости балки равна двум.

Для определения коэффициентов канонических уравнений с применением интегралов Мора необходимо определить изгибающие моменты в сечениях балки, рассматривая ее в трех состояниях:

Состояние "P"

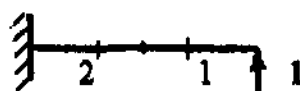


$$M_{z1}^{(P)} = 0,$$

$$M_{z2}^{(P)} = M - (qx^2 / 2),$$

$$(0 \leq x \leq a)$$

Состояние "1"

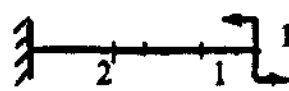


$$\bar{M}_{z1}^{(1)} = 1 \cdot x,$$

$$\bar{M}_{z2}^{(1)} = 1 \cdot (a + x),$$

$$(0 \leq x \leq a)$$

Состояние "2"



$$\bar{M}_{z1}^{(2)} = 1,$$

$$\bar{M}_{z2}^{(2)} = 1,$$

$$(0 \leq x \leq a)$$

Отметим, что поскольку изгибная жесткость EI_z участков балки одинакова, множитель $1/EI_z$ войдет в каждое слагаемое канонических уравнений и далее будет сокращен. Учитывая данное обстоятельство, определение коэффициентов этих уравнений с применением интегралов Мора сразу проведем без этого множителя.

$$\Delta_{1P} = \int_0^a \left[M - (qx^2 / 2) \right] (a + x) dx = 29qa^4 / 24,$$

$$\Delta_{2P} = \int_0^a \left[M - (qx^2 / 2) \right] dx = 5qa^3 / 6,$$

$$\delta_{11} = \int_0^a x^2 dx + \int_0^a (a + x)^2 dx = 8a^3 / 3,$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_0^a x dx + \int_0^a (a+x) dx = 2a^2 ,$$

$$\delta_{22} = 2 \int_0^a dx = 2a .$$

Подставляя значения коэффициентов в канонические уравнения, получим

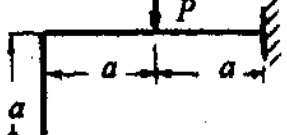
$$X_1 \cdot 8a + 6X_2 = -29qa^2 / 8 ,$$

$$X_1 \cdot a + X_2 = -5qa^2 / 12 .$$

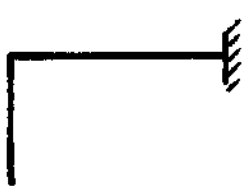
Это те же уравнения, которые получены в задаче 11.6 другим методом. Решение этих уравнений известно

$$X_1 = -27qa / 48 , \quad X_2 = 7qa^2 / 48$$

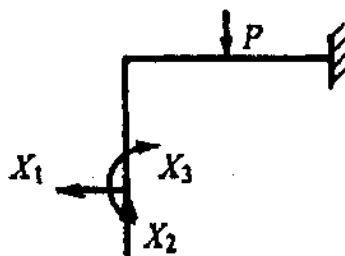
и, тем самым, статическая неопределимость балки раскрыта.

11.9		Дано: P , a , EI_z .	Построить эпюру изгибающих моментов M_z .
------	--	-------------------------------------	---

Степень статической неопределимости ломаного бруса равна трем: система имеет три внешние дополнительные связи.



Основная система



Эквивалентная система

Канонические уравнения соответственно имеют вид:

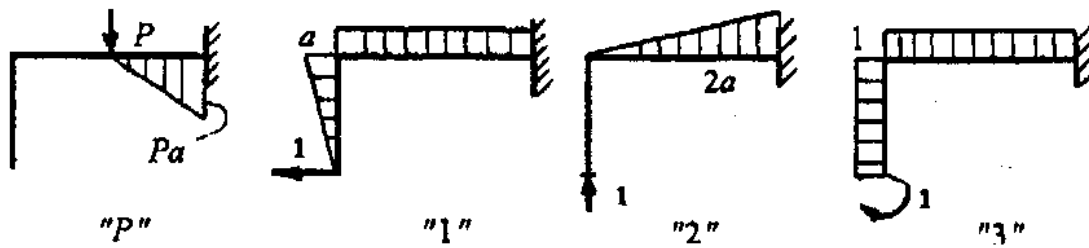
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0 ,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0 ,$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 .$$

Поскольку для плоской системы рассматриваемого типа при отыскании перемещений влиянием продольных и перерезывающих сил можно пренебречь, коэффициенты канонических уравнений найдем, учитывая только изгибающие моменты.

Определение изгибающих моментов M_z в сечениях бруса не представляет особых трудностей и здесь ограничимся приведением их эпюр, построенных на сжатых волокнах, во всех 4-х состояниях.



Вычисление коэффициентов канонических уравнений с применением интегралов Мора проведем без множителя $1/EI_z$ (см. задачу 11.8), используя метод перемножения эпюр Верещагина. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= -Pa^3/2, & \Delta_{2P} &= -5Pa^3/6, & \Delta_{3P} &= -Pa^2, \\ \delta_{11} &= 7a^3/3, & \delta_{22} &= 8a^3/3, & \delta_{33} &= 3a, \\ \delta_{12} &= 2a^3, & \delta_{13} &= 5a^2/2, & \delta_{23} &= 2a^2. \end{aligned}$$

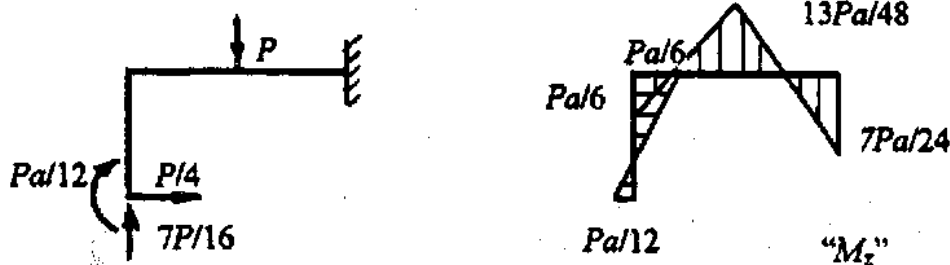
Подставим значения коэффициентов в уравнения. После некоторых преобразований получим

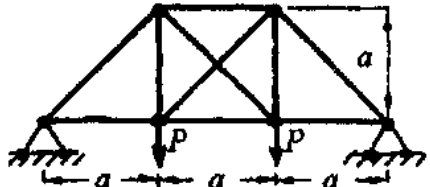
$$\begin{aligned} (7a/3)X_1 + 2a \cdot X_2 + (5/2)X_3 &= Pa/2, \\ 2a \cdot X_1 + (8a/3)X_2 + 2X_3 &= 5Pa/6, \\ (5a/2)X_1 + 2a \cdot X_2 + X_3 &= Pa/2. \end{aligned}$$

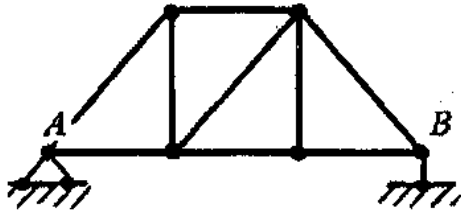
Решение уравнений относительно неизвестных X_1 , X_2 , и X_3 позволяет найти их следующие значения:

$$X_1 = -P/4, \quad X_2 = 7P/16, \quad X_3 = Pa/12.$$

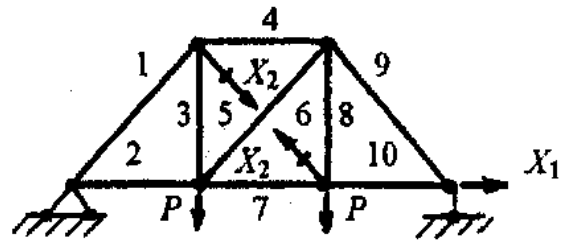
Построение суммарной эпюры изгибающих моментов M_z проведем, используя принцип независимости действия сил.



11.10		Дано: P , a , EF .	Определить продольные усилия в стержнях фермы.
-------	---	-----------------------------------	--



Основная система



Эквивалентная система

Степень статической неопределимости фермы равна двум: система имеет одну внешнюю (X_1) и одну внутреннюю (X_2) дополнительные связи.

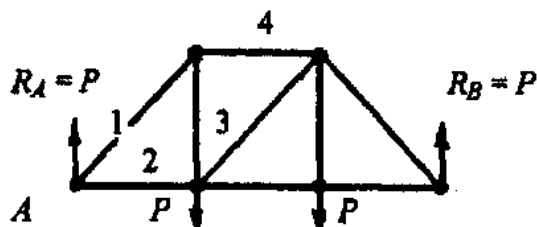
Канонические уравнения метода сил соответственно представляются в форме:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \quad ,$$

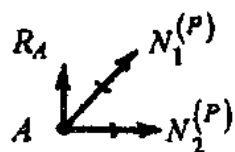
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \quad .$$

Продольные усилия N_i ($i=1, 2, \dots, 10$) в стержнях фермы определим, рассматривая ее три состояния: "P", "1" (при $X_1 = 1$) и "2" (при $X_2 = 1$). Отыскание сил не представляет особых трудностей, поэтому ниже ограничимся приведением только некоторых примеров.

Состояние "P".

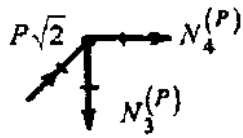


Очевидно, что реакции опор равны P .



$$\sum Y = P + N_1^{(P)} / \sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1^{(P)} = -P\sqrt{2} .$$

$$\sum X = N_2^{(P)} + N_1^{(P)} / \sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2^{(P)} = P .$$



$$\sum Y = -N_3^{(P)} + P\sqrt{2} / \sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_3^{(P)} = P.$$

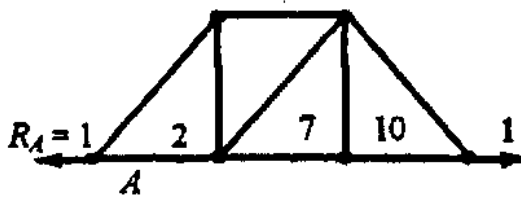
$$\sum X = N_4^{(P)} + P\sqrt{2} / \sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_4^{(P)} = -P.$$

Все остальные значения $N_i^{(P)}$ приведены в табл. 1.

Таблица 1.
Усилия в стержнях фермы в ее разных состояниях

Номер стержня	Длина стержня	Усилия в стержнях в разных состояниях фермы		
		"P"	"1"	"2"
i	l_i	$N_i^{(P)}$	$\bar{N}_i^{(1)}$	$\bar{N}_i^{(2)}$
1	$a\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	0	0
2	a	P	1	0
3	a	P	0	$-1/\sqrt{2}$
4	a	$-P$	0	$-1/\sqrt{2}$
5	$a\sqrt{2}$	0	0	1
6	$a\sqrt{2}$	0	0	1
7	a	P	1	$-1/\sqrt{2}$
8	a	P	0	$-1/\sqrt{2}$
9	$a\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	0	0
10	a	P	1	0

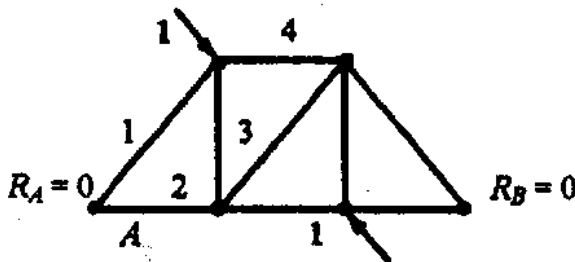
Состояние "1".



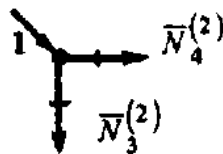
$$\bar{N}_2^{(1)} = \bar{N}_7^{(1)} = \bar{N}_{10}^{(1)} = 1.$$

Все остальные продольные усилия равны нулю.

Состояние "2".



Поскольку реакции опор равны нулю, равны нулю и усилия в стержнях 1, 2, 9 и 10.



$$\begin{aligned} \sum Y &= -N_3^{(2)} - 1/\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \bar{N}_3^{(2)} = -1/\sqrt{2} . \\ \sum X &= N_4^{(2)} + 1/\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \bar{N}_4^{(2)} = -1/\sqrt{2} . \end{aligned}$$

Все остальные значения $\bar{N}_i^{(2)}$ показаны в табл. 1.

Для упрощения процедуры определения коэффициентов канонических уравнений с применением интегралов Мора построим табл. 2, в которой на основе данных табл. 1 для каждого i -го стержня приведем произведения $N_i^{(P)} \bar{N}_i^{(1)} l_i$, $N_i^{(P)} \bar{N}_i^{(2)} l_i$ и т.д.

Таблица 2
Данные к определению коэффициентов канонических уравнений

i	$N_i^{(P)} \bar{N}_i^{(1)} l_i$	$N_i^{(P)} \bar{N}_i^{(2)} l_i$	$\bar{N}_i^{(1)} \bar{N}_i^{(1)} l_i$	$\bar{N}_i^{(1)} \bar{N}_i^{(2)} l_i$	$\bar{N}_i^{(2)} \bar{N}_i^{(2)} l_i$
1	0	0	0	0	0
2	Pa	0	a	0	0
3	0	$-Pa/\sqrt{2}$	0	0	$a/2$
4	0	$Pa/\sqrt{2}$	0	0	$a/2$
5	0	0	0	0	$a\sqrt{2}$
6	0	0	0	0	$a\sqrt{2}$
7	Pa	$-Pa/\sqrt{2}$	a	$-a/\sqrt{2}$	$a/2$
8	0	$-Pa/\sqrt{2}$	0	0	$a/2$
9	0	0	0	0	0
10	Pa	0	a	0	0

Суммируя данные 2-го столбца, определяем значение коэффициента Δ_{1P} :

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EF} \sum_{i=1}^{10} N_i^{(P)} \bar{N}_i^{(1)} l_i = 3Pa / EF .$$

Остальные коэффициенты определяем аналогичным образом. Будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} &= -\sqrt{2}Pa / EF , & \delta_{11} &= 3a / EF , \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= -a / \sqrt{2}EF , & \delta_{22} &= (2 + 2\sqrt{2})a / EF . \end{aligned}$$

С учетом найденных значений коэффициентов канонические уравнения, определяющие неизвестные X_1 и X_2 , принимают вид:

$$3X_1 - X_2 = -3P ,$$

$$-(X_1 / \sqrt{2}) + 2(1 + \sqrt{2})X_2 = \sqrt{2}P ,$$

откуда следует

$$X_1 = 0,964P , \quad X_2 = 0,152P .$$

Для определения продольных усилий в стержнях системы при заданном нагружении воспользуемся принципом наложения (принципом независимости действия сил)

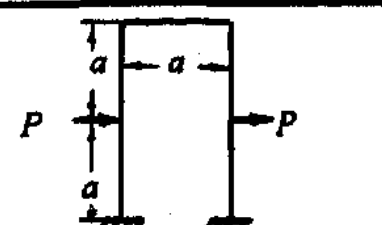
$$N_i = N_i^{(P)} + \bar{N}_i^{(1)} X_1 + \bar{N}_i^{(2)} X_2 .$$

Окончательно, для продольных сил в стержнях имеем (табл.3):

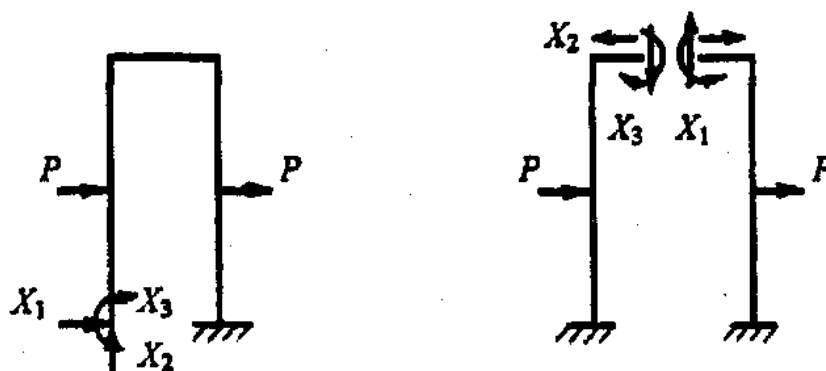
Таблица 3
Значения продольных усилий N_i в стержнях фермы

	Номера стержней				
	1	2	3	4	5
N_i	$-1,414P$	$0,036P$	$0,893P$	$-1,107P$	$0,152P$

	Номера стержней				
	6	7	8	9	10
N_i	$0,152P$	$0,027P$	$0,893P$	$-1,414P$	$0,036P$

11.11		<p>Дано:</p> <p>P,</p> <p>a,</p> <p>EI_z.</p>	<p>Построить эпюру изгибающих моментов M_z в сечениях рамы.</p>
-------	---	--	--

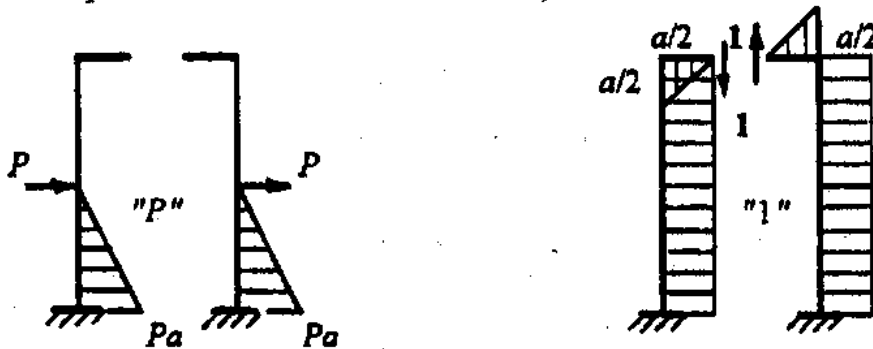
Степень статической неопределимости рамы равна трем. Можно предложить, например, два варианта эквивалентной системы:



Отметим, что геометрически симметричные системы с прямо симметричной и косо или обратно симметричной нагрузкой целесообразно раскреплять путем их рассечения по плоскости симметрии. Это приводит к снижению числа определяемых лишних неизвестных и позволяет рассматривать только одну отсеченную часть системы. Например, в сечении, совпадающем с плоскостью симметрии, при прямо симметричной нагрузке обращаются в нуль косо симметричные усилия, а при косо симметричной нагрузке - прямо симметричные усилия.

В рассматриваемой задаче второй вариант эквивалентной системы предпочтительнее, так как в этом случае $X_2 = X_3 = 0$, и решение сводится к отысканию только одной неизвестной X_1 из уравнения $X_1 = -\Delta_{1P} / \delta_{11}$.

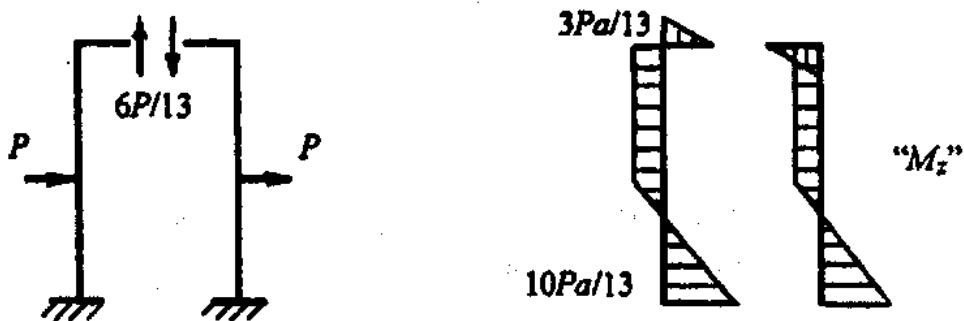
Коэффициенты Δ_{1P} и δ_{11} определим, перемножая эпюры изгибающих моментов M_z , построенные для состояний "P" и "1" (эпюры построены на сжатых волокнах).

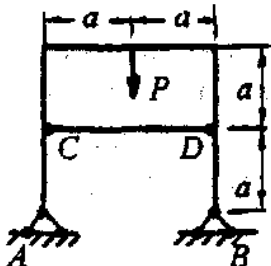


Легко получить, что

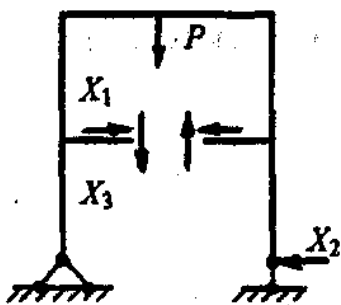
$$EI_z \Delta_{1P} = Pa^3 / 2, \quad EI_z \delta_{11} = 13a^3 / 12 \quad \text{и} \quad X_1 = -6P / 13.$$

Суммарную эпюру изгибающих моментов M_z построим, используя принцип наложения: $M_z = M_z^{(P)} + \bar{M}_z^{(1)} X_1$.



11.12		Дано: P , a , EI_z .	Определить реакции в опорах рамы.
-------	---	-------------------------------------	-----------------------------------

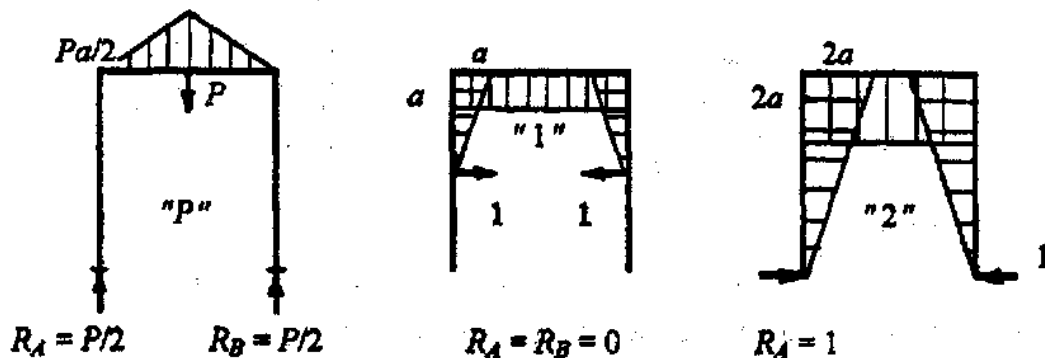
В рассматриваемой задаче стержень CD крепится к раме шарнирами в точках C и D . Поскольку шарнир не передает изгибающий момент и, тем самым, снижает степень статической неопределенности на единицу, эквивалентную систему представим в форме:



Однако данная рама является геометрически симметричной и нагружена симметрично. Следовательно, $X_3 = 0$.

Коэффициенты канонических уравнений определим, перемножая эпюры

изгибающих моментов M_z , построенные для состояний "P", "1" и "2" (эпюры строим на сжатых волокнах).



Вычисление коэффициентов канонических уравнений проведем без множителя $1/EI_z$. Будем иметь

$$\Delta_{1P} = -Pa^3/2, \quad \Delta_{2P} = -Pa^3, \quad \delta_{11} = 8a^3/3,$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 17a^3/3, \quad \delta_{22} = 40a^3/3.$$

Подставим значения коэффициентов в уравнения. После некоторых преобразований получим

$$8X_1 + 17X_2 = 3P/2 ,$$


$$17X_1 + 40X_2 = 3P .$$

Решение уравнений относительно неизвестных X_1 и X_2 позволяет найти их следующие значения:

$$X_1 \approx -0,05P , \quad X_2 = 0,29P .$$

Поскольку и рама, и приложенная нагрузка симметричны, для каждой из опор имеем

$$R_{\text{верт}} = 0,5P , \quad R_{\text{гориз}} = 0,29P .$$

11.13		Дано: $\Delta T, \alpha,$ $a, h,$ $E.$	Определить нормальное наибольшее напряжение в сечениях бруса при его нагревании (I_z - момент инерции сечения, h - его высота).
-------	---	---	--

Особенностью рассматриваемой задачи является ее температурное нагружение.

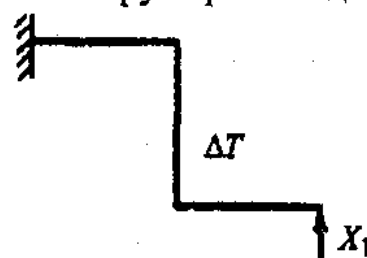
Если статически неопределимая система подвергается воздействию только температуры (как и имеем в рассматриваемой задаче), то свободный член канонического уравнения Δ_{iT} представляет собой обобщенное перемещение в основной системе, вызванное изменением температуры, в направлении действия обобщенной силы X_i . При одновременном приложении нагрузки и изменении температуры свободные члены канонических уравнений представляются суммой $\Delta_{iT} + \Delta_{iP}$ в соответствии с принципом независимости действия сил.

Значение коэффициента Δ_{iT} считают положительным, если температурное перемещение совпадает с принятым направлением силы X_i .

Степень статической неопределимости бруса равна единице.

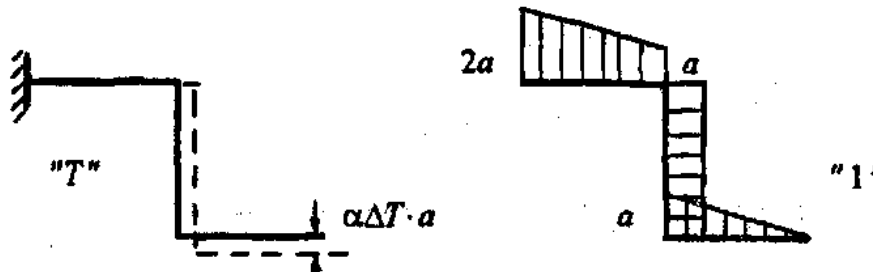


Основная система



Эквивалентная система

Для определения коэффициентов Δ_{1T} и δ_{11} рассмотрим состояния "Т" и "1". Поскольку для плоской системы рассматриваемого типа при отыскании перемещений влиянием продольных и перерезывающих сил можно пренебречь, для состояния "1" на сжатых волокнах строим только эпюру изгибающих моментов $\overline{M}_z^{(1)}$.



Определение коэффициентов канонического уравнения дает

$$\Delta_{1T} = -\alpha \Delta T \cdot a, \quad EI_z \delta_{11} = 11a^3 / 3.$$

Здесь коэффициент Δ_{1T} имеет отрицательное значение, поскольку направления температурного перемещения и силы X_1 противоположны. Коэффициент δ_{11} получен умножением эпюры $\overline{M}_z^{(1)}$ саму на себя.

Решение канонического уравнения $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1T} = 0$ с учетом найденных значений Δ_{1T} и δ_{11} позволяет получить

$$X_1 = 3EI_z \alpha \Delta T / 11a^2.$$

Наибольший изгибающий момент имеет место в закреплённом сечении

$$(M_z)_{\text{макс}} = 2a \cdot X_1 = 6EI_z \alpha \Delta T / 11a.$$

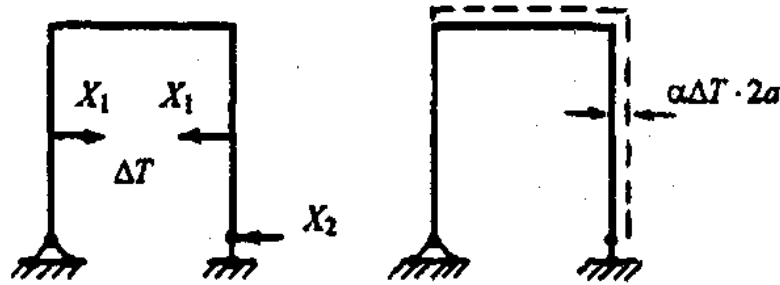
Соответствующее этому моменту нормальное напряжение найдем по известной формуле

$$(\sigma_x)_{\text{макс}} = \frac{(M_z)_{\text{макс}}}{I_z} \cdot \frac{h}{2} = 0,273 \cdot E \alpha \Delta T (h/a).$$

11.14		<p>Дано: $\Delta T, \alpha,$ $a, h,$ $E.$</p>	<p>Определить наибольшее нормальное напряжение в сечениях рамы при ее нагревании (I_z - момент инерции сечения, h - его высота).</p>
-------	--	---	--

См. задачу 11.12. Поскольку в рассматриваемой задаче нагружающим фактором является изменение температуры, необходимо заново найти свободные члены канонических уравнений Δ_{1T} и Δ_{2T} , а остальные коэффициенты будут иметь те же значения.

Для определения значений Δ_{1T} и Δ_{2T} приведем эквивалентную систему и основную систему в состоянии "Т".



Эквивалентная система Основная система в состоянии "Т"

Можно утверждать, что

$$\Delta_{1T} = 0 \quad , \quad \Delta_{2T} = -\alpha \Delta T \cdot 2a \quad .$$

Остальные коэффициенты канонических уравнений берем из решения задачи 11.12 без изменений:

$$\delta_{11} = 8a^3 / 3 \quad , \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 17a^3 / 3 \quad , \quad \delta_{22} = 40a^3 / 3 \quad .$$

Уравнения, определяющие силы X_1 и X_2 , теперь имеют вид:

$$8X_1 + 17X_2 = 0 \quad ,$$

$$17X_1 + 40X_2 = 6EI_z \alpha \Delta T / a^2 \quad .$$

Решение этих уравнений дает

$$X_1 = -3,29 EI_z \alpha \Delta T / a^2 \quad , \quad X_2 = 1,55 EI_z \alpha \Delta T / a^2 \quad .$$

Значения изгибающих моментов в сечениях рамы получим, используя принцип наложения

$$M_z = \overline{M}_z^{(1)} X_1 + \overline{M}_z^{(2)} X_2 \quad ,$$

что позволяет найти

$$(M_z)_{\max} = a \cdot X_2 = 1,55 EI_z \alpha \Delta T / a \quad .$$

Соответствующее этому моменту наибольшее нормальное напряжение определим по формуле

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{(M_z)_{\max}}{I_z} \cdot \frac{h}{2} = 0,775 \cdot E \alpha \Delta T (h / a) \quad .$$

12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

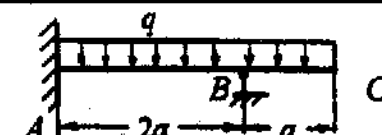
После определения лишних неизвестных и построения эпюр M_x, M_y, M_z, N_x внутренних силовых факторов перемещения в статически неопределимых системах определяют стандартными методами.

Рекомендуется определять прогибы и углы поворота сечений статически неопределимых балок *методом начальных параметров* (с применением уравнения упругой линии).

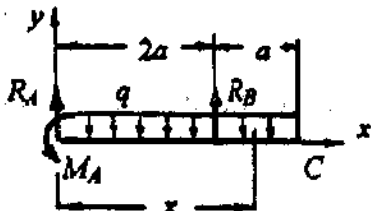
Для определения перемещений в ломаных брусках, рамах, фермах рекомендуется использовать *энергетический метод с применением интегралов Мора*

$$\delta = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_x}{GI_p} dx + \int_0^l \frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} dx + \int_0^l \frac{M_z \bar{M}_z}{EI_z} dx + \int_0^l \frac{N_x \bar{N}_x}{EF} dx,$$

где \bar{M}_x, \bar{M}_y и т.д. - внутренние силовые факторы в сечениях основной системы при приложении единичной обобщенной силы в точке (сечении), для которой отыскивается обобщенное перемещение, в направлении, в котором это перемещение ищется.

12.1		Дано: $q, a,$ $EI_z.$	Определить вертикальное перемещение и угол поворота сечения C.
------	---	-----------------------------	--

Рассматриваемая балка - статически неопределимая (степень статической неопределимости равна единице), но реакции опор уже определены ранее (см. задачу 11.3) и здесь имеем:



$$R_A = 7qa/8, \quad M_A = qa^2/4, \\ R_B = 17qa/8.$$

Для определения требуемых перемещений v_C и ϑ_C используем метод начальных параметров (см. задачи 8.6 и 8.7).

Универсальное уравнение упругой линии запишем в форме:

$$EI_z v = R_A \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2} - q \frac{x^4}{24} \Big|_I + R_B \frac{(x-2a)^3}{6} \Big|_II,$$

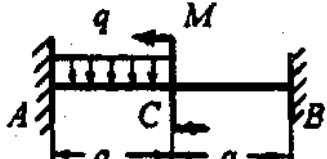
где для участка I имеем $0 \leq x \leq 2a$, а для участка II - $2a \leq x \leq 3a$. Дифференцированием получим уравнение для определения углов поворота сечений

$$EI_z \vartheta = R_A \frac{x^2}{2} - M_A x - q \frac{x^3}{6} \Big|_I + R_B \frac{(x-2a)^2}{2} \Big|_II.$$

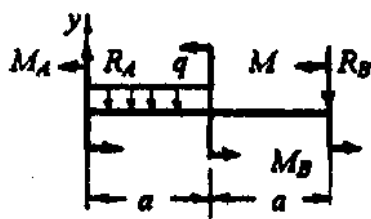
Вычисление искомых неизвестных дает

$$EI_z v_C = EI_z v \Big|_{x=3a} = -(5/24)qa^4 \Rightarrow v_C = -\frac{5 qa^4}{24 EI_z}.$$

$$EI_z \vartheta_C = EI_z \vartheta \Big|_{x=3a} = -(1/4)qa^3 \Rightarrow \vartheta_C = -\frac{1 qa^3}{4 EI_z}.$$

12.2		<p>Дано: $q, a,$ $M = qa^2,$ $EI_z.$</p>	<p>Определить вертикальное перемещение и угол поворота сечения C.</p>
------	--	--	---

Здесь мы имеем ту же ситуацию, что и в предыдущей задаче: рассматриваемая балка является статически неопределимой (степень статической неопределимости равна двум), но реакции в опоре B определены ранее (см. задачу 11.8):

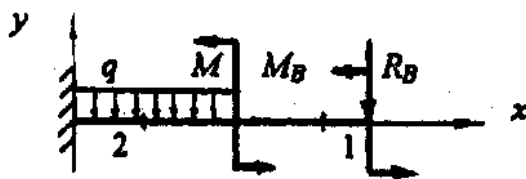


$$R_B = 27qa/16, \quad M_B = 7qa^2/48.$$

Реакции в опоре A определим из уравнений статики. Получим

$$R_A = 25qa/16, \quad M_A = 23qa^2/48.$$

Теперь для расчета перемещений можем использовать два варианта статически определимой балки



1. Определение перемещений v_C и ϑ_C с применением уравнения упругой линии.

Используя первый (левый) вариант статически определимой балки, уравнения упругой линии и углов поворота сечений запишем в форме:

$$EI_z v = -R_B \frac{x^3}{6} + M_B \frac{x^2}{2} \Big|_I, \quad EI_z \vartheta = -R_B \frac{x^2}{2} + M_B x \Big|_I,$$

где для участка I имеем $0 \leq x \leq a$. Отметим, что для вычисления искомым неизвестных v_C и ϑ_C достаточно записать уравнения для первого участка, поскольку сечение C является его границей.

Для определяемых величин имеем

$$EI_z v_C = EI_z v \Big|_{x=a} = -(1/48)qa^4 \Rightarrow v_C = -qa^4 / 48EI_z.$$

$$EI_z \vartheta_C = EI_z \vartheta \Big|_{x=a} = (13/96)qa^3 \Rightarrow \vartheta_C = 13qa^3 / 96EI_z.$$

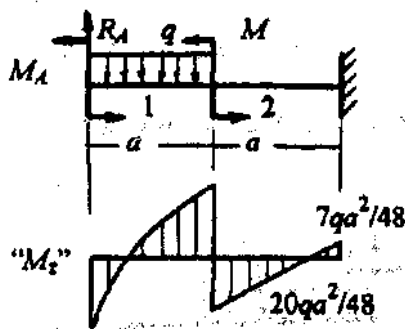
Напомним, что прогиб считается положительным, если его направление совпадает с положительным направлением оси y , а угол поворота - если поворот сечения происходит против часовой стрелки.

2. Определение перемещений v_C и ϑ_C с применением интегралов Мора.

При отыскании обобщенного перемещения

$$\delta = \int_0^a \frac{M_{z1} \bar{M}_{z1}}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{M_{z2} \bar{M}_{z2}}{EI_z} dx$$

будем использовать второй (правый) вариант статически определимой балки. Вычисления интегралов Мора проведем, предварительно построив эпюры изгибающих моментов и применяя далее правило их перемножения.

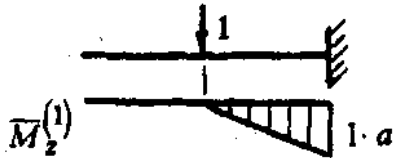


Изгибающие моменты от действия заданной нагрузки.

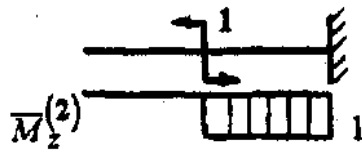
Эпюру строим, используя решение задачи 11.8 (принцип наложения):

$$M_z = M_z^{(P)} + \bar{M}_z^{(1)} X_1 + \bar{M}_z^{(2)} X_2$$

(эпюра на 1-м участке не понадобится)



Изгибающие моменты от действия единичной силы.



Изгибающие моменты от действия единичного момента.

Исходя из вида построенных эпюр, запишем соотношения, определяющие перемещения v_C и ϑ_C . Будем иметь

$$EI_z v_C = \int_0^a M_{z2} \bar{M}_{z2}^{(1)} dx, \quad EI_z \vartheta_C = \int_0^a M_{z2} \bar{M}_{z2}^{(2)} dx.$$

Перемножение эпюр изгибающих моментов позволяет получить

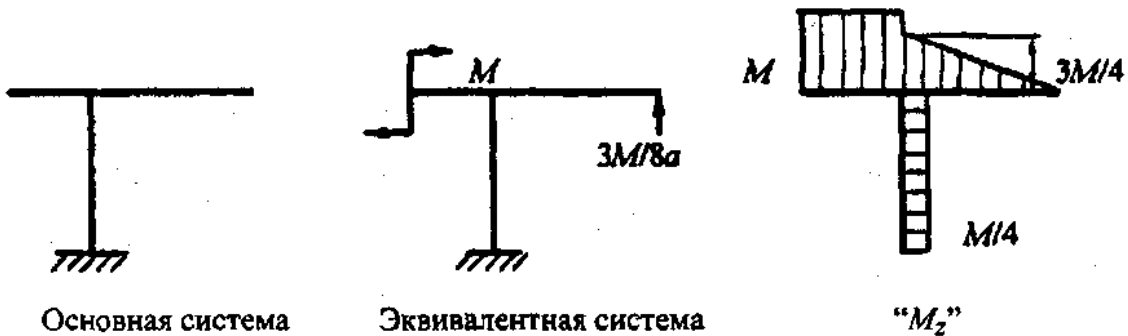
$$EI_z v_C = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{7qa^2}{48} + \frac{1}{2} \cdot \frac{27qa^2}{48} \cdot a \cdot \frac{a}{3} = \frac{qa^4}{48EI_z} \Rightarrow v_C = \frac{qa^4}{48EI_z}$$

$$EI_z \vartheta_C = -1 \cdot a \cdot \frac{7qa^2}{48} + \frac{1}{2} \cdot \frac{27qa^2}{48} \cdot a \cdot 1 = \frac{13qa^3}{96} \Rightarrow \vartheta_C = \frac{13qa^3}{96EI_z}$$

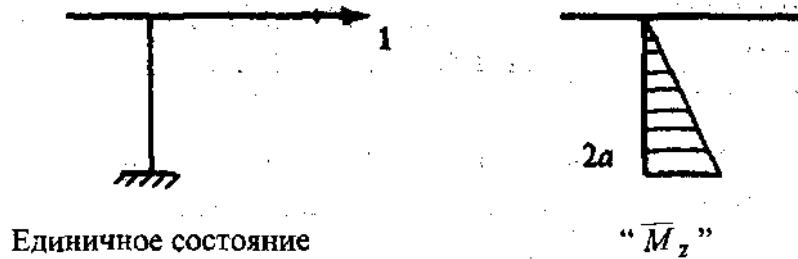
Напомним, что при применении интегралов Мора положительное значение перемещения имеет место при совпадении его направления с направлением приложенной единичной силы (момента).

12.3		<p>Дано: $M, a,$ $EI_z.$</p>	<p>Определить горизонтальное перемещение подвижной шарнирной опоры C.</p>
------	--	--	--

Используя решение задачи 11.4, имеем



Для определения горизонтального перемещения $\delta_C^{\text{гор}}$ шарнирной опоры C нужно построить эпюру изгибающих моментов для основной системы, нагруженной единичной силой, приложенной к опоре и действующей в горизонтальном направлении.

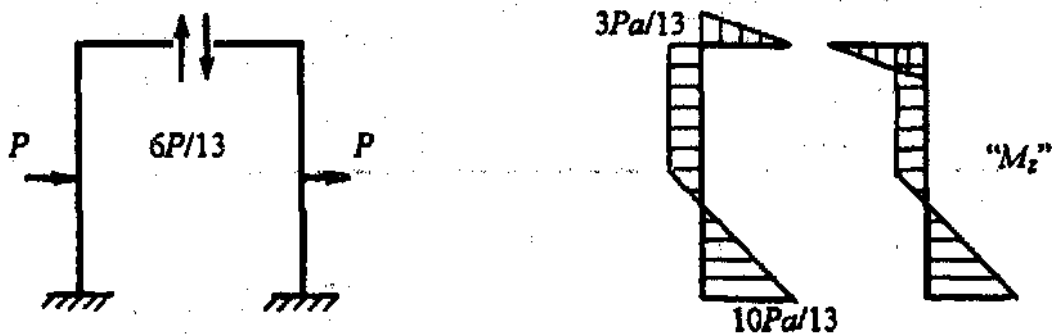


Перемножением эпюр M_z и \bar{M}_z получаем искомое перемещение шарнирной опоры

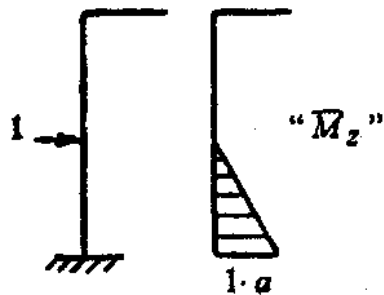
$$EI_z \delta_C^{\text{гор}} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{M}{4} = \frac{Ma^2}{2} \Rightarrow \delta_C^{\text{гор}} = \frac{Ma^2}{2EI_z}$$

12.4		<p>Дано: P, a, EI_z.</p>	<p>Определить горизонтальное перемещение точки A (точки приложения левой силы P).</p>
------	--	---	---

Используя решение задачи 11.11, имеем



Так же, как и в предыдущей задаче, для определения горизонтального перемещения $\delta_A^{\text{гор}}$ точки A нужно построить эпюру изгибающих моментов для основной системы, нагруженной единичной силой, приложенной в этой точке и действующей в горизонтальном направлении.



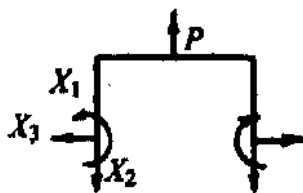
Перемножением эпюр M_z и \bar{M}_z получаем искомое перемещение точки A

$$EI_z \delta_A^{\text{гор}} = -\frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{3Pa}{13} + \frac{Pa}{2} \cdot a \cdot \frac{2a}{3}$$

$$\Rightarrow \delta_A^{\text{гор}} = 17Pa^3 / 78EI_z .$$

12.5		<p>Дано:</p> <p>P,</p> <p>a,</p> <p>EI_z.</p>	<p>Определить взаимное перемещение точек A, расположенных на горизонтальной оси симметрии замкнутого контура.</p>
------	--	--	--

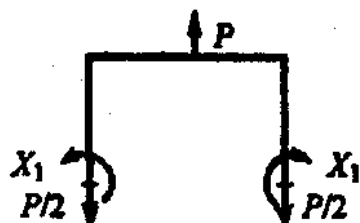
Степень внутренней статической неопределимости данной системы равна трем, но она имеет оси симметрии и нагружена симметрично (см. задачу 11.11).



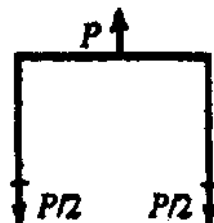
Разрезая систему по оси симметрии, получаем возможность рассматривать только одну ее отсеченную часть, показанную на рисунке.

Учитывая симметричный характер нагружения, можем утверждать, что кососимметричные усилия равны нулю: $X_3 = 0$. Далее, анализ равновесия оставленной части позволяет определить $X_2 = P/2$ и решение задачи сводится к отысканию только одной неизвестной X_1 из канонического уравнения $X_1 = -\Delta_{1P} / \delta_{11}$.

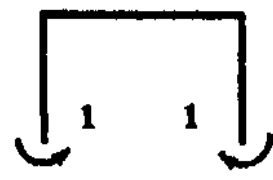
Коэффициенты Δ_{1P} и δ_{11} определим, перемножая эпюры изгибающих моментов M_z , которые нужно построить для состояний "P" и "1" основной системы.



Эквивалентная система

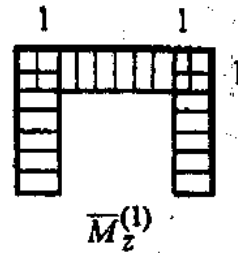
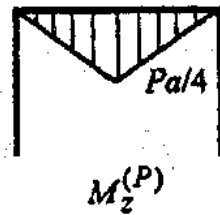


"P"



"1"

Эпюры изгибающих моментов, построенные на сжатых волокнах, имеют вид:

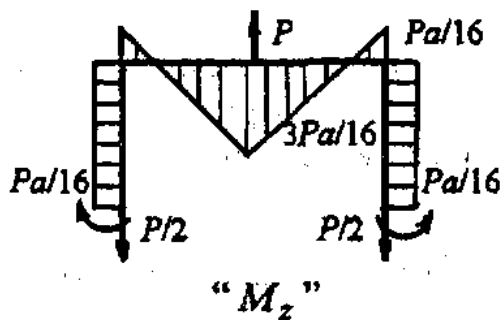


Используя процедуру Верещагина, вычисляем значения коэффициентов канонического уравнения (множитель $1/EI_z$ опускаем)

$$\Delta_{1P} = \frac{Pa}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot 1 = \frac{Pa^2}{8}, \quad \delta_{11} = 2a$$

Решение канонического уравнения с учетом найденных значений коэффициентов позволяет получить

$$2a \cdot X_1 = -Pa^2/8 \Rightarrow X_1 = -Pa/16$$



Эпюру изгибающих моментов в основной системе от действия заданной нагрузки строим, используя принцип независимости действия сил

$$M_z = M_z^{(P)} + \bar{M}_z^{(1)} X_1$$

Для определения взаимного перемещения (сближения) точек A в этих точках основной системы прикладываем горизонтальные единичные силы и строим эпюру изгибающих моментов \bar{M}_z от этой нагрузки. Будем иметь



Перемножая эпюры M_z и \bar{M}_z , для сближения точек A получим

$$EI_z \delta_{A-A} = -2 \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{Pa}{16} - \frac{Pa}{16} \cdot a \cdot \frac{a}{2} + \frac{Pa}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{Pa^3}{64} \Rightarrow$$

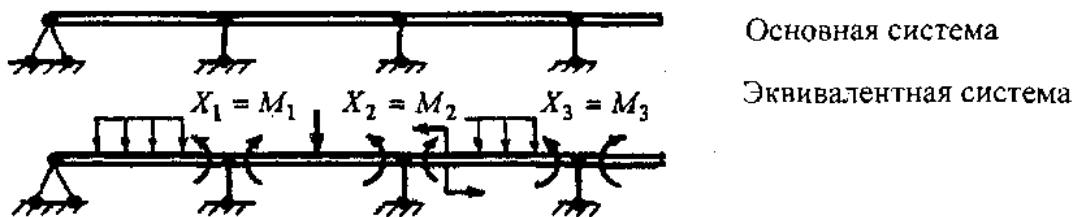
$$\Rightarrow \delta_{A-A} = Pa^3 / 64EI_z .$$

13. МНОГОПРОЛЕТНЫЕ НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ НА ШАРНИРНЫХ ОПОРАХ

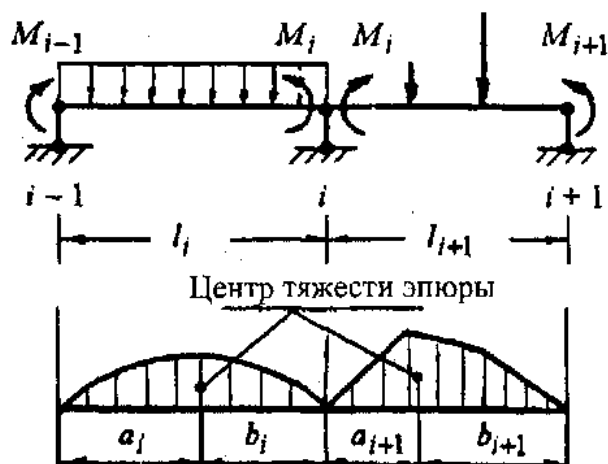
Определение:



Выбор основной и эквивалентной систем:



Расчетная схема для раскрытия статической неопределенности (составления уравнения трех моментов):



Уравнение трех моментов в каноническом виде:

$$M_{i-1}l_i + 2M_i(l_i + l_{i+1}) + M_{i+1}l_{i+1} = -6EI_z \left(\vartheta_i^{\text{лев}} + \vartheta_i^{\text{пр}} \right) ,$$

где M_{i-1} , M_i и M_{i+1} - неизвестные три момента в сечениях над опорами $(i-1)$, i и $(i+1)$; $\vartheta_i^{\text{лев}}$ и $\vartheta_i^{\text{пр}}$ - углы поворота сечений над i -й опорой левой и правой балок только от нагрузок в их пролетах. Значения $\vartheta_i^{\text{лев}}$ и $\vartheta_i^{\text{пр}}$ могут быть определены любым методом который окажется целесообразным. В частности, с использованием

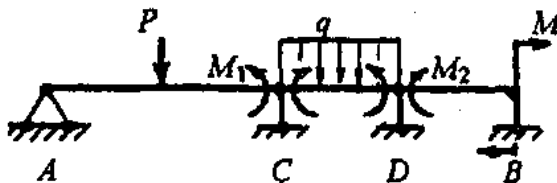
процедуры перемножения эпюр (метода Верещагина), уравнение трех моментов преобразуется к виду:

$$M_{i-1} l_i + 2M_i(l_i + l_{i+1}) + M_{i+1} l_{i+1} = -6 \left(\frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right),$$

где ω_i и ω_{i+1} - площади эпюр изгибающих моментов для левой и правой балок, вызванных действием только заданных нагрузок, приложенных соответственно на i -м и $(i+1)$ -м пролетах. Размеры a_i и b_{i+1} показаны на рисунке.

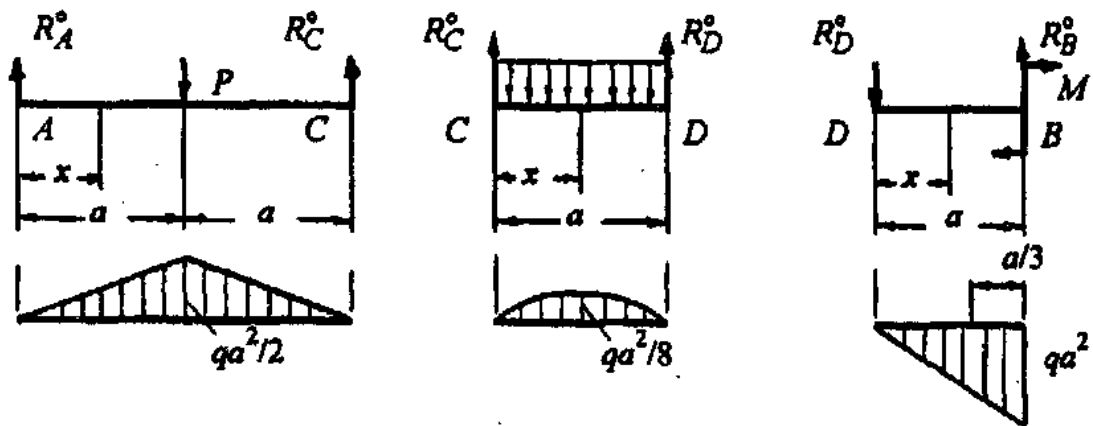
13.1		<p>Дано: $q, a,$ $P = qa,$ $M = qa^2.$</p>	<p>Раскрыть статическую неопределенность балки и построить эпюру изгибающих моментов.</p>
------	--	--	---

Степень статической неопределенности балки равна двум.



Эквивалентная система

Для составления уравнений трех моментов необходимо построить эпюры изгибающих моментов от действия заданной нагрузки для каждого пролета как для статически определенной балки:



$$R_A^o = R_C^o = P/2$$

$$M_z^o = (P/2) \cdot x$$

$$(0 \leq x \leq a)$$

$$R_C^o = R_D^o = qa/2$$

$$M_z^o = (qa/2)x - qx^2/2$$

$$(0 \leq x \leq a)$$

$$R_D^o = R_B^o = M/a$$

$$M_z^o = (-M/a)x$$

$$(0 \leq x \leq a)$$

Два уравнения трех моментов для рассматриваемой статически неопределимой балки имеют вид:

$$2M_1(2a+a) + M_2 a = -6 \left[\frac{(qa^2/2) \cdot a \cdot a}{2a} + \frac{(2/3)(qa^2/8) \cdot a \cdot (a/2)}{a} \right],$$

$$M_1 a + 2M_2(a+a) = -\frac{6}{a} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot a \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{2} qa^2 \cdot a \cdot \frac{a}{3} \right).$$

Отметим, что в уравнения входят только по два момента. В общем случае эта ситуация имеет место для второй и предпоследней опор.

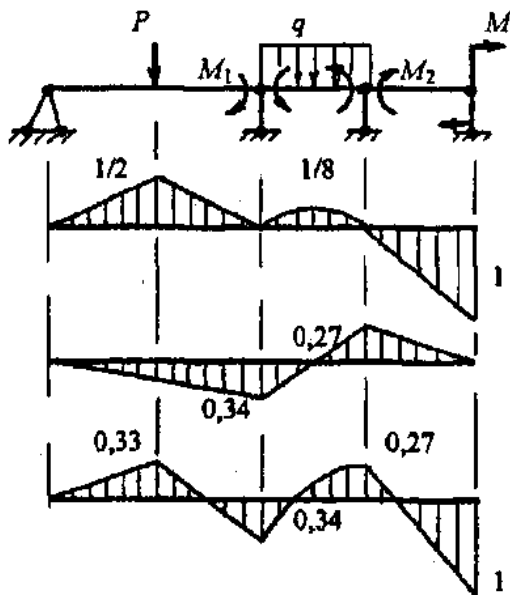
После преобразований для определения моментов M_1 и M_2 получим уравнения

$$6M_1 + M_2 = -7qa^2/4,$$

$$M_1 + 4M_2 = 3qa^2/4,$$

решение которых дает

$$M_1 = -31qa^2/92, \quad M_2 = 25qa^2/92.$$



Построение эпюры изгибающих моментов проведем методом наложения (в qa^2):

- эпюра от заданной нагрузки

- эпюра от найденных моментов

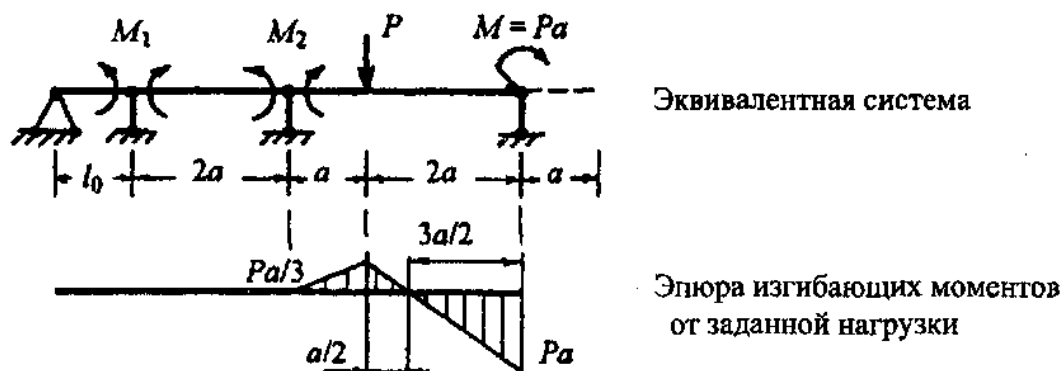
- суммарная эпюра

13.2		Дано: $P, a.$	Раскрыть статическую неопределимость балки.
------	--	------------------	---

Степень статической неопределимости рассматриваемой балки равна двум, однако здесь имеют место две особенности, которые необходимо принять во внимание:

- левое концевое сечение балки заделано и это жесткое закрепление заменяется фиктивным пролетом нулевой длины $l_0 = 0$;
- балка справа оканчивается нагруженной консолью и ее, как пролет, в уравнения трех моментов не включают. Консоль заменяют моментом от приложенной к ней нагрузки, вычисленным относительно ближайшей опоры и приложенным на ней с соответствующим знаком.

С учетом сказанного эквивалентная система и эпюра изгибающих моментов, построенная от действия заданной нагрузки для каждого пролета как для статически определимой балки, имеют вид



Два уравнения трех моментов запишем в форме:

$$2M_1 \cdot 2a + M_2 \cdot 2a = 0 ,$$

$$M_1 \cdot 2a + 2M_2(2a + 3a) = -\frac{6}{3a} \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{Pa}{3} \cdot \frac{7a}{3} + \frac{Pa}{3} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{11a}{6} - \frac{Pa}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \right) .$$

После преобразований получим уравнения

$$2M_1 + M_2 = 0 ,$$

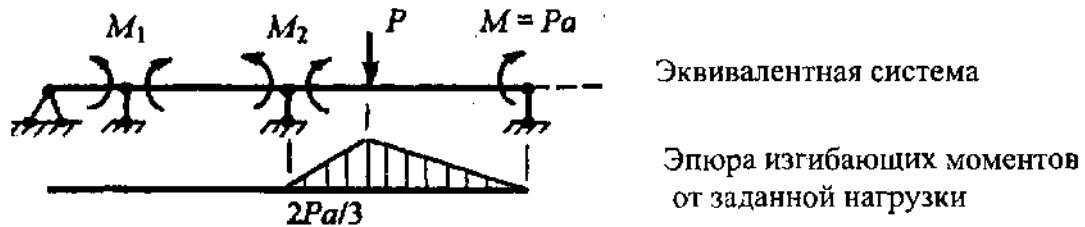
$$2M_1 + 10M_2 = -Pa / 3 ,$$

решение которых дает

$$M_1 = Pa / 54, \quad M_2 = -Pa / 27 .$$

Напомним, что при составлении уравнений трех моментов правая консоль представлена изгибающим моментом $M = Pa$, прило-

женным к правой опоре, рассматриваемым как заданная нагрузка и, соответственно, входящим в правую часть уравнения. Целесообразнее этот момент считать моментом на опоре и включать его в левую часть уравнения, что позволяет несколько упростить процедуру отыскания неизвестных величин M_1 и M_2 . Действительно, в этом случае эквивалентная система и эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки будут иметь вид



Первое уравнение трех моментов остается без изменений, а второе запишем в форме:

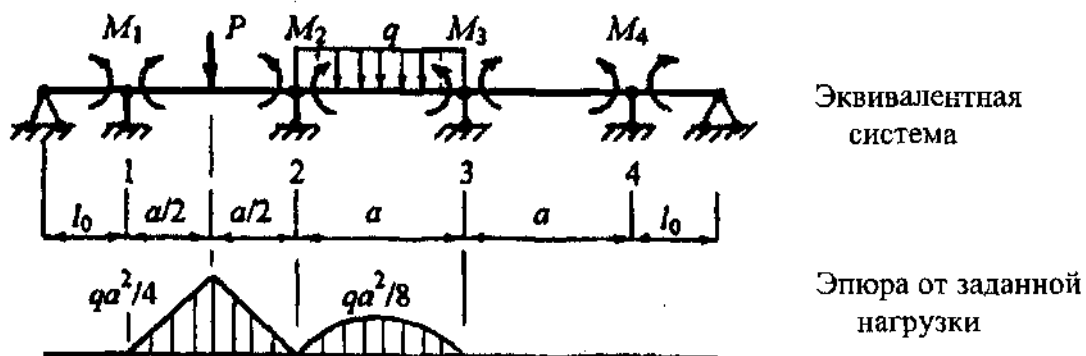
$$M_1 \cdot 2a + 2M_2(2a + 3a) - Pa \cdot 3a = -\frac{6}{3a} \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{2Pa}{3} \cdot \frac{7a}{3} + \frac{2Pa}{3} \cdot \frac{2a}{2} \cdot \frac{4a}{3} \right).$$

После преобразований получаем то же самое уравнение

$$2M_1 + 10M_2 = -Pa/3.$$

13.3		<p>Дано: $a = 2\text{ м}$, $P = qa$, № 10, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.</p>	<p>Определить допускаемое значение нагрузки, приложенной к балке (поперечное сечение балки - двутавр).</p>
------	--	---	--

Степень статической неопределимости рассматриваемой балки равна четырем. Эквивалентная система и эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки имеют вид



Уравнения трех моментов для данной балки запишем в форме:

$$2M_1 \cdot a + M_2 \cdot a = -\frac{6}{a} \left(\frac{qa^2}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \right) = -\frac{3qa^3}{8},$$

$$M_1 \cdot a + 2M_2 \cdot 2a + M_3 \cdot a = -\frac{6}{a} \left(\frac{qa^2}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \right) = -\frac{5qa^3}{8},$$

$$M_2 \cdot a + 2M_3 \cdot 2a + M_4 \cdot a = -\frac{6}{a} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \right) = -\frac{qa^3}{4},$$

$$M_3 \cdot a + 2M_4 \cdot a = 0.$$

Совместное решение полученных уравнений позволяет найти

$$M_1 = -\frac{47qa^2}{360}, \quad M_2 = -\frac{41qa^2}{360}, \quad M_3 = -\frac{14qa^2}{360}, \quad M_4 = \frac{7qa^2}{360}.$$

Реакцию R_i на i -й опоре неразрезной балки можно найти как сумму реакций на i -тых опорах двух смежных балочек, каждую из которых определяют из условий статики. Общая формула для определения реакции на i -й опоре имеет вид

$$R_i = R_i^\circ + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_{i-1}} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_i},$$

где R_i° - суммарная реакция на i -тых опорах двух смежных балочек только от заданных нагрузок в пролетах. Второе слагаемое определяет реакцию на i -й опоре левой балочки только от моментов M_{i-1} и M_i , а третье - реакцию на i -й опоре правой балочки только от моментов M_{i+1} и M_i . При определении реакции в заделке фиктивный (нулевой) пролет не учитывается. Если отыскивается реакция опоры, за которой следует нагруженная консоль, то в величину R_i° включают результирующую всех внешних сил, действующих на консоль.

Для рассматриваемой задачи имеем

$$R_1 = \frac{qa}{2} + \frac{1}{a} \left(-\frac{41qa^2}{360} + \frac{47qa^2}{360} \right) = \frac{31qa}{60},$$

$$R_2 = qa + (1/360a)(-47 + 41 - 14 + 41)qa^2 = 127qa/120,$$

$$R_3 = (qa/2) + (1/360a)(-41+14+7+14)qa^2 = 29qa/60 ,$$

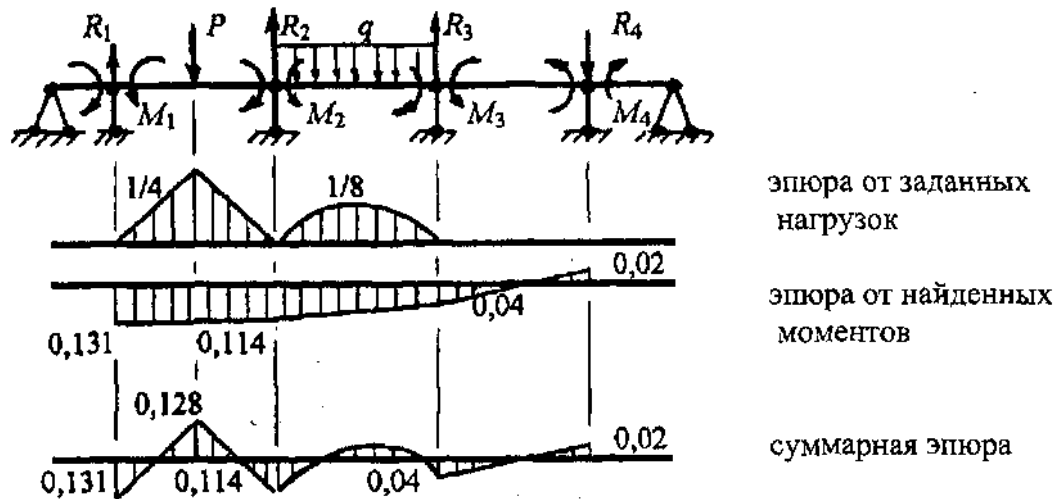
$$R_4 = (1/360a)(-14-7)qa^2 = -7qa/120 .$$

Проектируя все силы на вертикальное направление, получим

$$\sum Y = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - P - qa \equiv 0 ,$$

что подтверждает правильность вычислений.

Окончательную эпюру изгибающих моментов (в единицах qa^2) построим методом наложения:



Из суммарной эпюры изгибающих моментов следует, что $(M_z)_{\max} = 0,131qa^2$, и условие прочности принимает вид

$$(M_z)_{\max} / W_z \leq [\sigma] \Rightarrow 0,131qa^2 / W_z \leq [\sigma] .$$

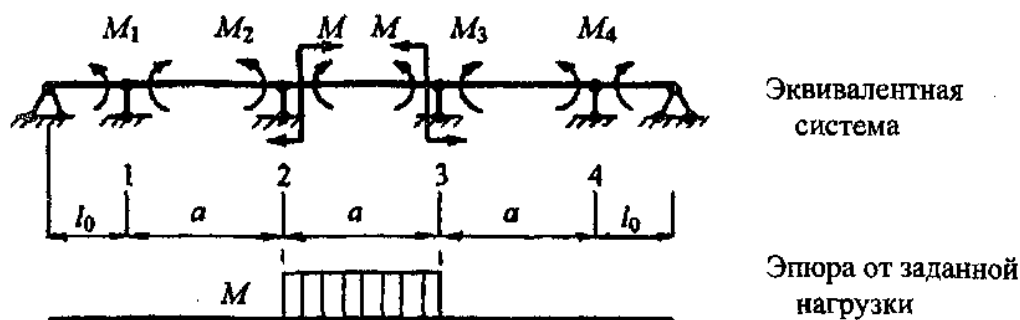
Поскольку для двутавра № 10 имеем $W_z = 39,7 \text{ см}^3 = 39,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$, допустимая нагрузка следует из соотношения

$$q = W_z [\sigma] / 0,131a^2 = 12,13 \text{ кН/м} \Rightarrow P = qa = 24,26 \text{ кН} .$$

13.4		<p>Дано: $a = 1 \text{ м}$, № 14, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.</p>	<p>Определить допустимое значение нагрузки, приложенной к балке.</p>
------	--	---	--

Как и в задаче 13.3, степень статической неопределимости рассматриваемой балки равна четырем.

Заданные сосредоточенные моменты, приложенные в сечениях над промежуточными опорами неразрезной балки, целесообразно относить к внутрипролетной нагрузке. Момент можно отнести либо к одному из пролетов (желательно к пролету, который меньше нагружен), либо к обоим, разделив его в произвольном отношении. В данной задаче моменты M отнесем к среднему пролету.



Уравнения трех моментов для данной балки имеют вид:

$$\begin{aligned}
 2M_1 \cdot a + M_2 \cdot a &= 0, \\
 M_1 \cdot a + 2M_2 \cdot 2a + M_3 \cdot a &= -(6/a)(M \cdot a \cdot a/2) = -3Ma, \\
 M_2 \cdot a + 2M_3 \cdot 2a + M_4 \cdot a &= -3Ma, \\
 M_3 \cdot a + 2M_4 \cdot a &= 0.
 \end{aligned}$$

Совместное решение полученных уравнений позволяет найти

$$M_1 = M_4 = M/3, \quad M_2 = M_3 = -2M/3.$$

Вычисление опорных реакций (см. задачу 13.3) приводит к следующим результатам:

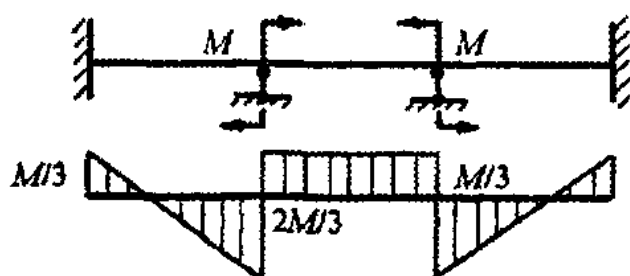
$$\begin{aligned}
 R_1 &= (M/3a)(-2-1) = -M/a, \\
 R_2 &= (M/3a)(1+2-2+2) = M/a, \\
 R_3 &= (M/3a)(-2+2+1+2) = M/a, \\
 R_4 &= (M/3a)(-2-1) = -M/a.
 \end{aligned}$$

Проектируя все силы на вертикальное направление, получим

$$\sum Y = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \equiv 0,$$

что подтверждает правильность вычислений.

Опуская процедуру построения суммарной эпюры изгибающих моментов M_z методом наложения, приведем ее окончательный вид:



Суммарная эпюра изгибающих моментов

Можно видеть, что $(M_z)_{\max} = 2M/3$, и условие прочности принимает вид

$$(M_z)_{\max} / W_z \leq [\sigma] \Rightarrow (2M/3) / W_z \leq [\sigma] .$$

Для двутавра № 14 имеем $W_z = 81,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ и допускаемый момент равен

$$M = 3W_z[\sigma] / 2 = 19,6 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

14. ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Основные определения и исходные положения безмоментной теории оболочек.

Равновесие элемента оболочки. Уравнение Лапласа:

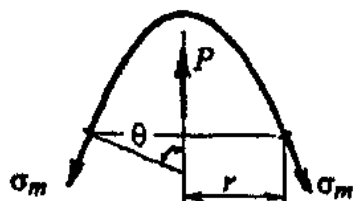
$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} .$$

Здесь σ_m , σ_t - меридиональное и окружное (кольцевое) напряжения; ρ_m , ρ_t - меридиональный и окружной радиусы кривизны; δ - толщина стенки оболочки. Давление p от действия газа и/или жидкости определяется соотношением

$$p = p_0 + \gamma z ,$$

где p_0 - давление газа над поверхность жидкости; γ - удельный вес жидкости; z - расстояние от поверхности жидкости до сечения.

Условие равновесия отсеченной части оболочки:



$$\sigma_m \cdot 2\pi r \cdot \delta \cdot \cos \theta = P ,$$

где P - равнодействующая внешних сил, приложенных к рассматриваемой отсеченной части оболочки.

Прочность тонкостенных оболочек вращения.

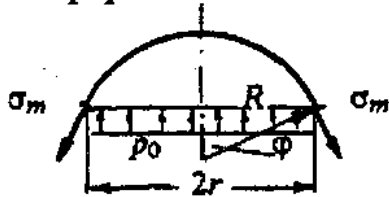
Нормальные напряжения $\sigma_m \geq 0$, $\sigma_t \geq 0$ - главные; напряженное состояние - двухосное (плоское).

14.1		<p>Дано: $R = 0,5 \text{ м}$, $l = 1 \text{ м}$, $\alpha = 45^\circ$, $p_0 = 2 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.</p>	<p>Определить толщину стенки оболочки из условия прочности (использовать III теорию), считая емкость невесомой.</p>
------	--	--	---

По условию задачи собственным весом оболочки пренебрегаем и, соответственно, реакция опоры равна нулю.

Нормальные напряжения σ_m и σ_t будем определять, рассекая оболочку в ее сферической, цилиндрической и конической частях.

Сферическая часть.



Условие равновесия рассматриваемой отсеченной части оболочки имеет вид:

$$(\sigma_m \cdot 2\pi r \cdot \delta) \sin \varphi = p_0 \cdot \pi r^2$$

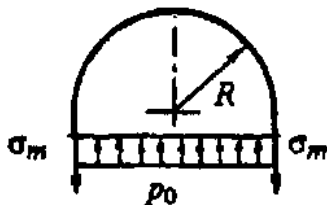
Учитывая, что $r = R \sin \varphi$, и решая уравнение относительно σ_m , получим

$$\sigma_m = p_0 R / 2\delta$$

Для определения σ_t используем уравнение Лапласа при $\rho_m = \rho_t = R$ и найденном значении σ_m . Будем иметь

$$\sigma_t = p_0 R / 2\delta$$

Цилиндрическая часть.



Условие равновесия оставленной части оболочки запишем в форме

$$\sigma_m \cdot 2\pi R \cdot \delta = p_0 \cdot \pi R^2$$

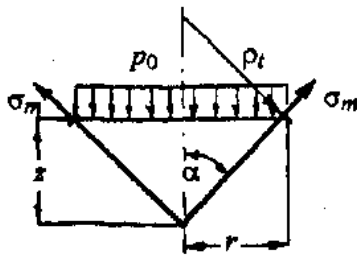
откуда находим

$$\sigma_m = p_0 R / 2\delta$$

Из уравнения Лапласа при $\rho_m = \infty$, $\rho_t = R$ получаем

$$\sigma_t = p_0 R / \delta$$

Коническая часть.



Условие равновесия оставленной части оболочки имеет вид:

$$(\sigma_m 2\pi r \delta) \cos \alpha = \pi r^2 p_0 .$$

Определяя из уравнения σ_m и учитывая, что $r = z \operatorname{tg} \alpha$ ($0 \leq z \leq R$), получим

$$\sigma_m = p_0 z \operatorname{tg} \alpha / 2\delta \cos \alpha .$$

Решая уравнение Лапласа относительно σ_t при $\rho_m = \infty$, $\rho_t = r / \cos \alpha$, будем иметь

$$\sigma_t = p_0 z \operatorname{tg} \alpha / \delta \cos \alpha .$$

Расчет на прочность.

Результаты определения напряжений в сечениях рассматриваемого резервуара сведем в таблицу.

Напряжения	Сфера	Цилиндр	Конус	
			напряжения в произвольном сечении	наибольшие напряжения
σ_m	$p_0 R / 2\delta$	$p_0 R / 2\delta$	$p_0 z \operatorname{tg} \alpha / 2\delta \cos \alpha$	$p_0 R / \sqrt{2} \delta$
σ_t	$p_0 R / 2\delta$	$p_0 R / \delta$	$p_0 z \operatorname{tg} \alpha / \delta \cos \alpha$	$\sqrt{2} p_0 R / \delta$

Опасным является сечение в конической части резервуара при $z = R$. Напряженное состояние - двухосное: $\sigma_1 = \sqrt{2} p_0 R / \delta$, $\sigma_2 = p_0 R / \sqrt{2} \delta$, $\sigma_3 = 0$. Поскольку условие задачи требует использовать III теорию прочности, имеем

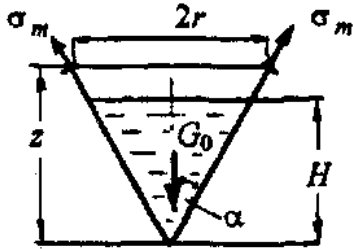
$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{2} p_0 R / \delta \leq [\sigma] .$$

Определение толщины стенки емкости приводит к результату $\delta = 7,1$ мм.

14.2		<p>Дано:</p> <p>$R_0 = 4,5$ м,</p> <p>$H_0 = 9$ м,</p> <p>$\delta = 4$ мм,</p> <p>$[\sigma] = 50$ МПа .</p>	<p>До какого уровня H можно заполнить емкость жидкостью с удельным весом $\gamma = 1,4 \cdot 10^4$ Н/м³ (использовать III теорию прочности).</p>
------	--	---	---

При определении напряжений σ_m и σ_t рассмотрим два участка: выше уровня жидкости (верхний участок) и ниже этого уровня (нижний). Делая сечения на участках, отбрасывать будем верхнюю часть емкости, что позволяет не учитывать реакцию опоры.

Верхний участок.



Уравнение равновесия рассматриваемой части резервуара имеет вид:

$$(\sigma_m 2\pi r \delta) \cos \alpha = G_0 ,$$

где $G_0 = \pi R^2 (H/3) \gamma$ - вес всей жидкости, залитой в резервуар. Учитывая, что

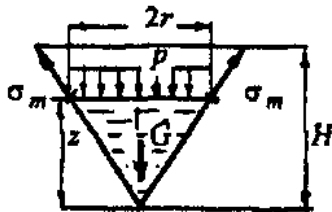
$r = z \operatorname{tg} \alpha$ ($H \leq z \leq H_0$) и $R = H \operatorname{tg} \alpha$, для напряжения σ_m окончательно получаем

$$\sigma_m = \frac{\gamma H^3 \operatorname{tg} \alpha}{6z \delta \cos \alpha} .$$

Поскольку на уровне сделанного сечения нет давления, из уравнения Лапласа следует

$$\sigma_t = 0 .$$

Нижний участок.



Уравнение равновесия нижней части резервуара имеет вид

$$(\sigma_m 2\pi r \delta) \cos \alpha = p \pi r^2 + G ,$$

где $p = \gamma (H - z)$ - давление на уровне сечения, определяемое высотой $(H - z)$ столба жидкости, находящейся выше этого сечения; $G = \pi r^2 (z/3) \gamma$ - вес жидкости в рассматриваемой части резервуара; $r = z \operatorname{tg} \alpha$ ($0 \leq z \leq H$). Решая уравнение равновесия относительно σ_m , находим

$$\sigma_m = \frac{z \operatorname{tg} \alpha \gamma (3H - 2z)}{6\delta \cos \alpha} .$$

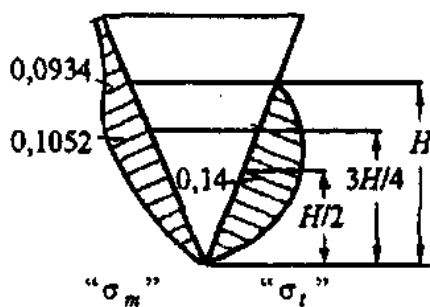
Окружное напряжение σ_t получим из уравнения Лапласа, полагая в нем $\rho_m = \infty$, $\rho_t = r / \cos \alpha$ и $p = \gamma (H - z)$. Будем иметь

$$\sigma_t = \frac{z \operatorname{tg} \alpha \gamma (H - z)}{\delta \cos \alpha}$$

Эпюры напряжений и расчет на прочность.

С учетом значений $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$ и $\cos \alpha = 0,892$ полученные соотношения для напряжений σ_m и σ_t представим в виде

Напряжения	Верхний участок ($H \leq z \leq H_0$)	Нижний участок ($0 \leq z \leq H$)
σ_m	$0,0934 \gamma H^3 / z \delta$	$0,0934 \gamma z (3H - 2z) / \delta$
σ_t	0	$0,561 \gamma z (H - z) / \delta$



Для построения эпюр напряжений на нижнем участке необходимо определить точки экстремумов и максимальные значения соответствующих функций:

для напряжения σ_m -

$$d\sigma_m / dz = 0,0934 \gamma (3H - 4z) / \delta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 3H / 4 \Rightarrow (\sigma_m)_{\max} = 0,1052 \gamma H^2 / \delta ;$$

для напряжения σ_t -

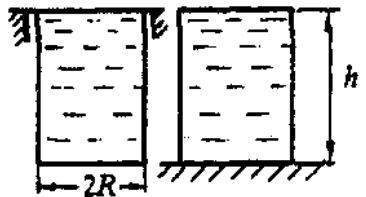
$$d\sigma_t / dz = 0,561 \gamma (H - 2z) / \delta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = H / 2 \Rightarrow (\sigma_t)_{\max} = 0,14 \gamma H^2 / \delta .$$

Эпюры напряжений σ_m и σ_t в единицах $\gamma H^2 / \delta$ показаны на рисунке. Опасным является сечение в нижней части резервуара при $z = H / 2$. Напряженное состояние - двухосное: $\sigma_1 = 0,14 \gamma H^2 / \delta$, $\sigma_2 = 0,0934 \gamma H^2 / \delta$, $\sigma_3 = 0$. Поскольку условие задачи требует использовать III теорию прочности, имеем

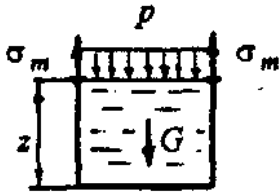
$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0,14 \gamma H^2 / \delta \leq [\sigma] .$$

Определение уровня заливки жидкости приводит к результату $H = 10,1$ м. Полученный результат, хотя формально и лишен смысла, практически означает, что резервуар можно залить полностью и при этом он будет работать с недогрузкой.

14.3		Дано: R , h , δ , γ .	Сравнить прочность двух полностью заполненных жидкостью цилиндрических резервуаров, отличающимися только условиями закрепления (использовать III теорию прочности).
------	---	---	---

Определим напряжения σ_m и σ_t в каждом резервуаре.

Левый резервуар.



Делая сечение на уровне z ($0 \leq z \leq h$) от дна резервуара, удобно оставить нижнюю часть. Уравнение равновесия оставленной части имеет вид:

$$\sigma_m 2\pi R \delta = p \pi R^2 + G,$$

где $p = \gamma(h - z)$ - гидростатическое давление на данном уровне;

$G = \pi R^2 z \gamma$ - вес жидкости в оставленной части резервуара. Решение уравнения равновесия относительно σ_m позволяет получить

$$\sigma_m = \gamma h R / 2\delta.$$

Окружное напряжение σ_t находим из уравнения Лапласа, полагая в нем $\rho_m = \infty$, $\rho_t = R$ и $p = \gamma(h - z)$. Будем иметь

$$\sigma_t = \gamma R (h - z) / \delta.$$

Правый резервуар.



Здесь также делаем сечение на уровне z от дна резервуара, но удобнее оставить верхнюю часть. Составляя уравнение равновесия для оставленной части, имеем:

$$\sigma_m 2\pi R \delta = p \pi R^2 - G,$$

где $p = \gamma(h - z)$ как и для левого резервуара, но $G = \pi R^2 (h - z) \gamma$.

Из уравнения равновесия следует

$$\sigma_m = 0.$$

Окружное напряжение σ_t определяется тем же соотношением

$$\sigma_t = \gamma R (h - z) / \delta.$$

Сопоставление прочности резервуаров.

Различные результаты, полученные при определении напряжения σ_m , связаны с тем, что для правого резервуара вес жидкости передается на опору непосредственно, а для левого эта передача осуществляется через стенку емкости. Соответственно, в стенке левого резервуара всюду (за исключением верхней кромки) имеет место плоское напряженное состояние, а в стенке правого - одноосное. Опасными в обоих случаях являются точки, примыкающие к днищам ($z = 0$), где напряжения имеют следующие значения:

Напряжения	Левый резервуар	Правый резервуар
σ_m	$\gamma h R / 2\delta$	0
σ_t	$\gamma h R / \delta$	$\gamma h R / \delta$

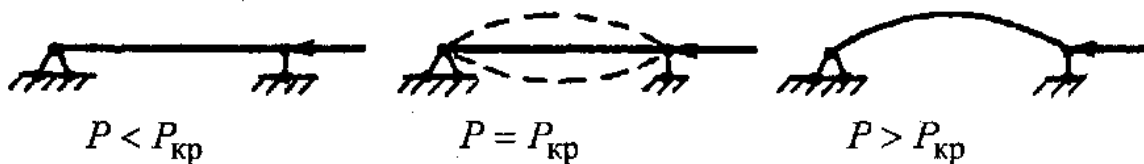
Поскольку условие задачи требует использовать III теорию прочности, легко получить, что эквивалентные напряжения в опасных точках равны. Действительно,

Напряжения	Левый резервуар	Правый резервуар
σ_1	$\gamma h R / \delta$	$\gamma h R / \delta$
σ_2	$\gamma h R / 2\delta$	0
σ_3	0	0

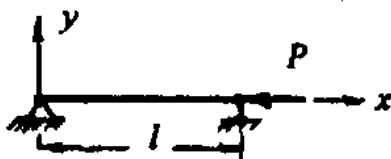
$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \gamma h R / \delta - \text{резервуары равнопрочны.}$$

15. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Упругое равновесие, устойчивое и неустойчивое.

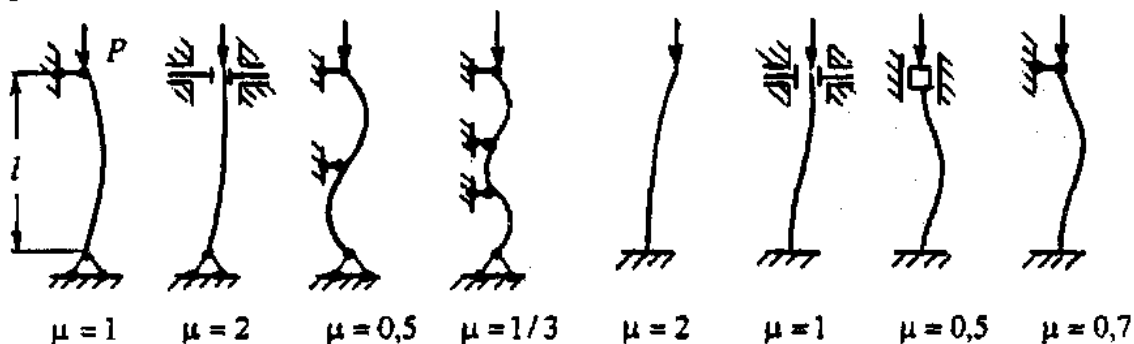


Формула Эйлера.



$$P_{\text{кр}} = \pi^2 EI_{\text{мин}} / l^2 .$$

Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы.



$$P_{кр} = \pi^2 EI_{мин} / (\mu l)^2 \quad - \text{ обобщенная формула Эйлера .}$$

Гибкость стержня при сжатии и условие применимости обобщенной формулы Эйлера:

- критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = P_{кр} / F = \pi^2 E / \lambda^2 \quad ,$$

где $\lambda = \mu l / i_{мин}$ - гибкость стержня; $i_{мин}$ ($i_{мин}^2 = I_{мин} / F$) - минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня;

- условие применимости формулы Эйлера и предельная гибкость

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц} \Rightarrow \lambda \geq \lambda_{пред} = \pi \sqrt{E / \sigma_{пц}} \quad ,$$

где $\lambda_{пред}$ - предельная гибкость.

Расчет на устойчивость за пределом пропорциональности:

- эмпирические зависимости

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda \quad - \text{ линейная зависимость Ф. Ясинского,}$$

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2 \quad - \text{ параболическая зависимость для чугуна.}$$

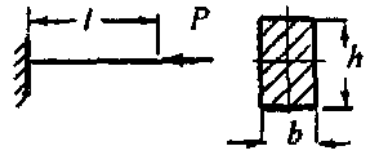
Значения параметров a , b и c приводятся в таблицах;

- расчет с помощью коэффициента ϕ снижения допускаемого напряжения (коэффициента продольного изгиба)

$$[P] = \phi [\sigma]_{сж} F \quad ,$$

где $[\sigma]_{сж}$ - допускаемое напряжение на сжатие. Величину $[\sigma]_{уст} = \phi [\sigma]_{сж}$ называют допускаемым напряжением на устойчивость.

Значения коэффициента ϕ приводятся в таблицах.

15.1		Дано: $l = 1 \text{ м}$, $b = 0,7 \text{ см}$, $h = 3 \text{ см}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{пл}} = 240 \text{ МПа}$.	Определить значения критической силы и критического напряжения для стального стержня.
------	---	--	---

Вычислим предельную гибкость, определяющую границу применимости формулы Эйлера. Для используемой стали

$$\lambda_{\text{пред}} = \pi \sqrt{E / \sigma_{\text{пл}}} \approx 91 .$$

Гибкость рассматриваемого стержня найдем, учитывая, что

$$I_{\text{мин}} = hb^3 / 12 = 8,6 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4 , \quad F = bh = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \quad \Rightarrow \quad i_{\text{мин}} = \sqrt{I_{\text{мин}} / F} = \sqrt{b^2 / 12} = 2,02 \cdot 10^{-3} \text{ м} , \quad \mu = 2 .$$

Будем иметь

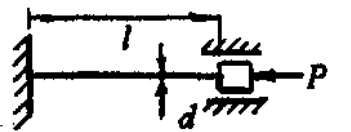
$$\lambda = \mu l / i_{\text{мин}} \approx 10^3 .$$

Поскольку $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$, критическая сила может быть найдена по обобщенной формуле Эйлера

$$P_{\text{кр}} = \pi^2 EI_{\text{мин}} / (\mu l)^2 = 4,24 \cdot 10^{-4} \text{ МН} = 424 \text{ Н}.$$

Критическое напряжение соответственно равно

$$\sigma_{\text{кр}} = P_{\text{кр}} / F = 2,02 \text{ МПа} .$$

15.2		Дано: $l = 2 \text{ м}$, $d = 8 \text{ см}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{пл}} = 240 \text{ МПа}$.	Определить значения критической силы и критического напряжения для круглого стального стержня.
------	---	--	--

Предельная гибкость, определяющая границу применимости формулы Эйлера, для используемой стали (см задачу 15.1) равна $\lambda_{\text{пред}} \approx 91$.

Найдем гибкость рассматриваемого стержня, вычисляя предварительно радиус инерции

$$i = \sqrt{I / F} = d / 4 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

и принимая во внимание условия закрепления концов стержня, в соответствии с которыми $\mu = 0,5$. Будем иметь

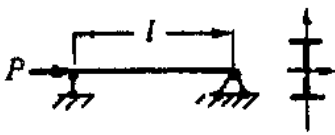
$$\lambda = \mu l / i = 50 .$$

Поскольку $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$, для расчета критической силы нельзя применить формулу Эйлера. Воспользуемся здесь эмпирической зависимостью Ф. Ясинского $\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda$. Для рассматриваемой стали по таблицам имеем $a = 464$ МПа, $b = 3,62$ МПа, что позволяет получить следующее значение критического напряжения:

$$\sigma_{\text{кр}} = 283 \text{ МПа} .$$

Значение критической силы равно

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = 1,42 \text{ МН} .$$

15.3		<p>Дано: $l = 2 \text{ м} ,$ $i_{\text{мин}} = 2,95 \text{ см} ,$ $F = 49,9 \text{ см}^2 ,$ $[\sigma]_{\text{сж}} = 200 \text{ МПа} .$</p>	<p>Определить допускаемую силу, используя коэффициент φ (материал - малоуглеродистая сталь) .</p>
------	---	--	--

Вычислим гибкость рассматриваемого стержня. Получим

$$\lambda = \mu l / i = 67,8 .$$

В соответствии с таблицей коэффициента снижения допускаемого напряжения φ (коэффициента продольного изгиба) для малоуглеродистых сталей имеем:

λ	φ
60	0,86
70	0,81

Для рассматриваемого стержня

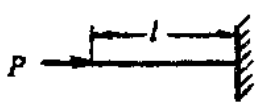
$$\lambda = 67,8 \Rightarrow \varphi = 0,82 .$$

Допускаемую силу определим, используя соотношение

$$[P] = \varphi [\sigma]_{\text{сж}} F .$$

Окончательно получим

$$[P] = 0,82 \text{ МН} .$$

15.4		<p>Дано: $l = 1 \text{ м} ,$ $P = 20 \text{ кН} .$ $[\sigma]_{\text{сж}} = 20 \text{ МПа} .$</p>	<p>Определить необходимые размеры квадратного ($a \times a$) поперечного сечения деревянного бруса.</p>
------	---	--	--

В рассматриваемой задаче не можем напрямую использовать условие устойчивости стержня

$$[P] = \varphi [\sigma]_{\text{сж}} F,$$

имея в нем две неизвестные величины, так как при неизвестных размерах поперечного сечения и, соответственно, неизвестной площади F , не можем найти гибкость стержня λ и, следовательно, коэффициент снижения допускаемого напряжения φ .

В данном случае будем применять следующую процедуру. Определим размеры поперечного сечения из расчета на обычное сжатие:

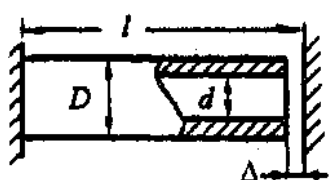
$$P / a_0^2 = [\sigma]_{\text{сж}} \Rightarrow a_0 = \sqrt{P / [\sigma]_{\text{сж}}} = 3,16 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Задаваясь несколькими значениями $a > a_0$, вычислим гибкость $\lambda = \mu l \sqrt{12 / a^2} = 6,93 / a$ ($\mu = 2$), коэффициент φ (по таблице) и допускаемую силу $[P] = \varphi [\sigma]_{\text{сж}} F$, помещая результаты расчетов в таблицу.

$a, \text{ м}$	λ	φ	$[P], \text{ кН}$
$4 \cdot 10^{-2}$	173	0,107	3,42
$5 \cdot 10^{-2}$	138	0,164	8,2
$6 \cdot 10^{-2}$	115	0,235	16,9
$7 \cdot 10^{-2}$	99	0,317	31,0

По построенной таблице можно найти, что силе $P = 20 \text{ кН}$ соответствует следующее значение размера сечения:

$$a = 6,22 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 6,22 \text{ см} .$$

15.5		<p>Дано: $l = 6 \text{ м},$ $D = 2d = 0,1 \text{ м},$ $\Delta = 0,05 \text{ см},$ $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}.$</p>	<p>Определить, при каком изменении температуры стержень из малоуглеродистой стали потеряет устойчивость.</p>
------	---	--	--

После того, как зазор Δ перекроется за счет температурного расширения, рассматриваемый стержень будет находиться в состоянии сжатия. Сила сжатия R (реакция опоры) определяется из решения задачи, как статически неопределимой, из условия, что

перемещение правого конца бруса (сечения B) равно величине зазора (см. задачу 3.5). Реализуя это условие, запишем

$$\Delta_B = \Delta \Rightarrow (\Delta_B)_t + (\Delta_B)_R = \Delta .$$

Учитывая, что $(\Delta_B)_t = \alpha \Delta t l$ (Δt - искомое изменение температуры) и $(\Delta_B)_R = -Rl / EF$, из полученного уравнения находим реакцию опоры

$$R = EF(\alpha \Delta t l - \Delta) / l .$$

Очевидно, что величину Δt нужно отыскивать из условия потери устойчивости стержня

$$P_{кр} = R = EF(\alpha \Delta t l - \Delta) / l .$$

Предельная гибкость, определяющая границу применимости формулы Эйлера, для малоуглеродистых сталей ограничена значением

$$\lambda_{пред} \approx 100 .$$

Гибкость рассматриваемого стержня найдем по формуле

$$\lambda = \mu l / i = \mu l \sqrt{F / I} .$$

Учитывая, что для рассматриваемого кольцевого сечения $\sqrt{F / I} = 8 / D \sqrt{5}$. Коэффициент приведения длины μ примем равным 0,5, считая, что после перекрытия зазора расчетная схема эквивалентна следующей



Окончательно, для гибкости стержня получаем $\lambda = 107,1$, что больше, чем $\lambda_{пред} \approx 100$. Для расчета критической силы здесь можем применить обобщенную формулу Эйлера, переписывая условие потери устойчивости стержня в виде:

$$\pi^2 EI / (\mu l)^2 = EF(\alpha \Delta t l - \Delta) / l .$$

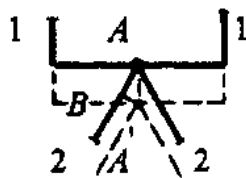
Решение представленного уравнения относительно отыскиваемой величины Δt позволяет получить

$$\Delta t = \left[(\Delta / l) + 5(\pi D / 8 \mu l)^2 \right] / \alpha = 75,1^\circ .$$

15.6		<p>Дано:</p> <p>$a = 1 \text{ м},$ $d = 1 \text{ см},$ $\theta = 30^\circ,$ $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}.$</p>	<p>Определить, при каком изменении температуры Δt_1 верхних стержней система теряет устойчивость (диаметр всех стержней d; материал - малоуглеродистая сталь).</p>
------	--	---	--

Рассматриваемая шарнирная стержневая система - статически неопределимая (см. задачу 3.9). Степень ее статической неопределимости равна единице. При раскрытии статической неопределимости системы учтем ее симметрию (усилия в стержнях попарно равны).

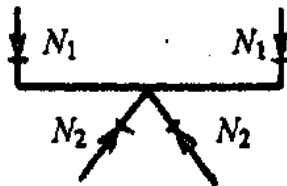
Уравнение совместности перемещений точек системы запишем, принимая следующую схему деформирования.



$$AA' = \Delta l_1 \quad , \quad AB = \Delta l_2 \quad .$$

$$\Delta l_2 / \Delta l_1 = \cos 30^\circ \Rightarrow \Delta l_2 = (\sqrt{3} / 2) \Delta l_1 \quad .$$

Уравнение равновесия следует из схемы сил, соответствующей схеме деформирования.



$$\sum Y = 0 \Rightarrow 2N_1 = 2N_2 \cos 30^\circ \quad .$$

$$N_1 = (\sqrt{3} / 2) N_2 \quad .$$

Представляя удлинения (укорочения) стержней системы через определяемые усилия и учитывая, что длины всех стержней равны a , получим

$$\Delta l_1 = \alpha \Delta t_1 a - \frac{N_1 a}{EF} \quad , \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 a}{EF} \quad .$$

Подставляя найденные значения Δl_1 и Δl_2 в уравнение совместности перемещений точек системы и решая его совместно с уравнением равновесия, будем иметь

$$N_1 = 3\alpha \Delta t_1 EF / 7 \quad , \quad N_2 = 2\sqrt{3} \alpha \Delta t_1 EF / 7 \quad .$$

Поскольку геометрические размеры стержней одинаковы, а $N_1 < N_2$, потеря устойчивости стержневой системы определяется потерей устойчивости стержней 2 и имеет вид:

$$P_{кр} = N_2 .$$

Гибкость стержней равна

$$\lambda = \mu a / i = 4\mu a / d = 400 ,$$

что больше, чем $\lambda_{пред} \approx 100$. Для расчета критической силы здесь можем применить обобщенную формулу Эйлера, переписывая условие потери устойчивости стержня в виде:

$$\pi^2 EI / (\mu a)^2 = (2\sqrt{3}/7)\alpha \Delta t_1 EF .$$

При решении представленного уравнения относительно отыскиваемой величины Δt_1 примем во внимание, что концы стержней 2 шарнирно закреплены и $\mu = 1$. Окончательно имеем

$$\Delta t_1 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{7\pi^2}{32\sqrt{3}} \left(\frac{d}{a}\right)^2 \approx 10^\circ .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1974, 1979 и др.
2. Беляев Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1968 и др.
3. Миролубов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. М.: Высшая школа, 1969 и др.