

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ДЕФОРМАЦИЯ ТОНКОСТЕННЫХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Методические указания к лабораторной работе

Приводится в теоретической части обоснование широкого практического использования тонкостенных стержней в современных конструкциях транспортных средств и технологического оборудования. Также рассмотрены некоторые основные особенности работы тонкостенных стержней открытого профиля, которые необходимо учитывать инженеру при проектировании и расчете таких конструкций. Изложена методика теоретического и экспериментального определения центра изгиба. Так как использование тонкостенных стержней можно рассматривать как один из методов структурной оптимизации, то в Дополнении приводится краткий обзор других методов структурной оптимизации стержней.

Также имеются все необходимые данные и технические характеристики, правила техники безопасности, контрольные вопросы, списки рекомендуемой литературы (основной и дополнительный) необходимые и достаточные для выполнения лабораторной работы.

Предназначены для студентов всех форм обучения, изучающих курсы сопротивления материалов и расчет тонкостенных стержней. Могут быть использованы при выполнении соответствующей лабораторной работы.

Цель работы

Познакомиться с особенностями распределения напряжений и экспериментально изучить особенности деформирования тонкостенных стержней открытого профиля. Научиться определять положение центра изгиба. Получить понятие о методах структурной оптимизации стержней.

Теоретическая часть

В теоретической части рамками выделен безусловно необходимый минимум информации.

Для чего и почему нужны тонкостенные стержни

Для своей жизни и развития человек творчеством исследователей и инженеров формирует «вторую природу». При этом элементы машин, устройств, конструкций при выполнении своих функций вынуждены нести разнообразные механические, тепловые, радиационные и другие нагрузки. И при этом люди (лица принимающие решение) должны признать приемлемыми, целесообразными определенные затраты на этапах проектирования, изготовления, эксплуатации и утилизации (экономически обоснованными, оптимальными). Зачастую это сводится к условию минимального веса, минимальной материалоемкости. Кроме того, требование минимального веса становится решающим, без которого вообще не реализуется функция изделия: в случаях ракетной и авиационной техники, подвижных наземных транспортных средств, высотных сооружений и др.

В повседневной жизни мы часто встречаемся с использованием тонкостенных стержней открытого и закрытого профилей (вспомним хотя бы рамы автомобилей и других транспортных средств, опоры высоковольтных линий электропередач, решетчатые стрелы грузоподъемных кранов, металлоконструкции строительных сооружений и др.). Для чего же инженеры их используют и почему в определенных условиях эксплуатации они имеют преимущества?

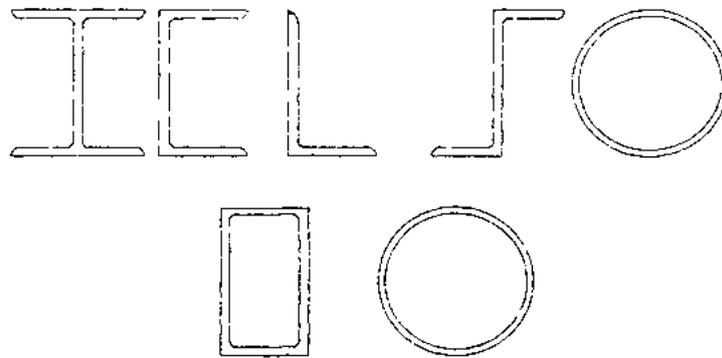


Рис. 1. Примеры сечений тонкостенных стержней открытого (верхний ряд) и закрытого, замкнутого (нижний ряд) профилей

Рассмотрим среднюю по объему максимальную с точки зрения прочности удельную энергию упругого деформирования стержней при различных простых видах сопротивления.

При осевом растяжении и сжатии стержня (*проверьте!*):

$$u_N = \frac{[\sigma]^2}{2E}. \quad (1)$$

При кручении вала круглого поперечного сечения (*проверьте!*):

$$u_{\tau} = \frac{[\tau]^2}{4G}. \quad (2)$$

Отношение

$$\frac{u_{\sigma}}{u_{\tau}} = \frac{[\sigma]^2}{2E} \cdot \frac{4G}{[\tau]^2} = 2 \cdot \left(\frac{[\sigma]}{[\tau]} \right)^2 \cdot \frac{G}{E} = \left(\frac{[\sigma]}{[\tau]} \right)^2 \cdot \frac{1}{1+\mu}. \quad (3)$$

В случае мягкой стали $[\tau]_{III} = 0,5[\sigma]$, $\mu \approx 0,25 \div 0,32$ получим (*проверьте!*) $u_{\sigma}/u_{\tau} \approx 3,2$.

То есть, для накопления одной и той же энергии упругого деформирования потребуется более чем в три раза более тяжелый элемент, работающий на кручение (например, подвески транспортного средства), чем элемент, работающий на осевое растяжение/сжатие¹. Почему это происходит и как инженеру выйти из этого положения, как, хотя бы частично, разрешить данное противоречие.

Рассмотрим распределение напряжений по сечению при осевом растяжении и сжатии и при кручении вала круглого поперечного сечения.

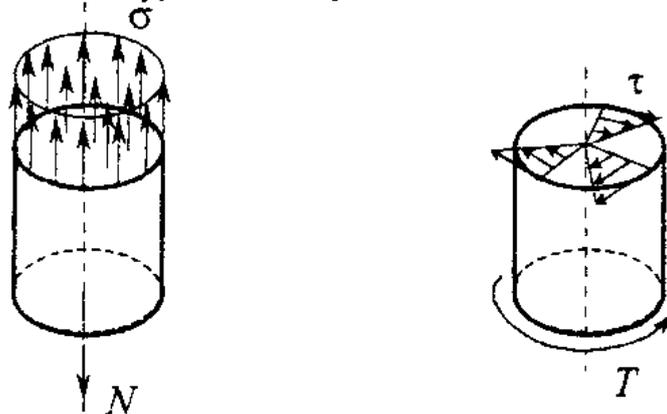


Рис. 2. Распределение напряжений по сечению при растяжении/сжатии и при кручении

На рисунке 2 видно, что при растяжении и сжатии напряжения распределяются равномерно по сечению. Каждая частица материала несет нагрузку равную допустимой. При кручении же напряжения распределены неравномерно (линейно по радиусу). И когда на наружной поверхности частицы материала несут нагрузку на пределе сопротивления, внутри материал недогружен. Вывод: для улучшения энергетической характеристики (и массогабаритных характеристик) стоит удалить недогруженную середину вала. Тогда по оставшейся части материала напряжения распределятся более равномерно и вал приближается к равнопрочному. Можно по-

казать (*проверьте!*), что в пределе $\lim_{d'/D \rightarrow 1} u_{\tau} = \frac{[\tau]^2}{2G}$ (то есть в два раза!)².

¹ Другое дело, что конструктивно в подвесках более удобно использовать из-за меньшей жесткости при меньших габаритах все-таки элементы, работающие на кручение – торсионы, или на изгиб – листовые рессоры.

² Конечно, реально толщину стенки нельзя чрезмерно уменьшать хотя бы из-за того, что начинается потеря устойчивости

Теперь рассмотрим среднюю по объему максимальную с точки зрения прочности удельную энергию упругого деформирования при изгибе на следующем примере.

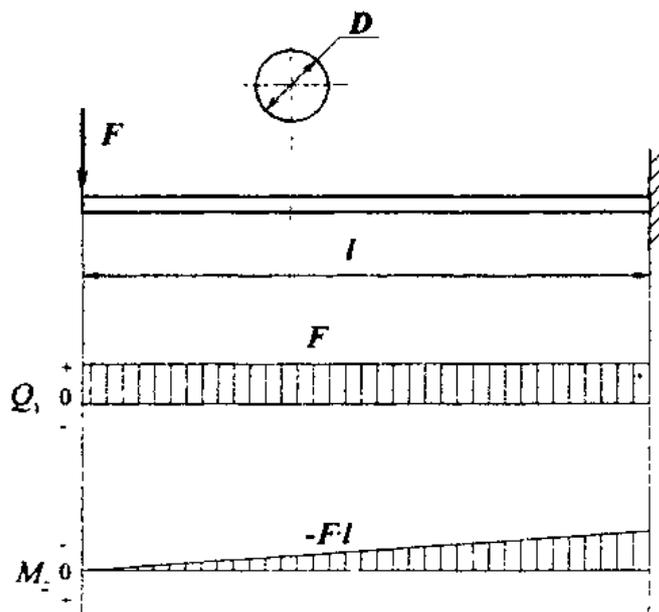


Рис. 3 Рассмотренная расчетная схема для определения u_M .

Для данной расчетной схемы получим (проверьте!)³:

$$u_M = \frac{[\sigma]^2}{24E}. \quad (4)$$

Результат еще более неприятный: $u_N/u_M = 12$! Почему, «кто виноват» и «что делать» инженеру?

Рассматривая распределение напряжений в опасных точках по длине балки, приходим к необходимости использования балок равного сопротивления⁴ (с одинаковыми по длине запасами прочности). Листовая автомобильная рессора – балка равного сопротивления.

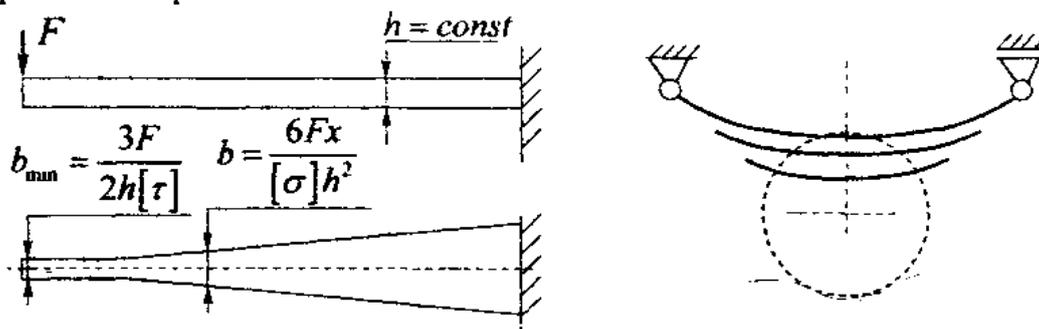


Рис. 4. Вид листовой автомобильной рессоры.

³ Для длинных балок при плоском изгибе пренебрежем частью энергии, связанной с поперечным внутренним усилием как величиной малой (хотя, безусловно, конечной) по сравнению с частью энергии, связанной с изгибающим моментом.

⁴ Балка равного сопротивления имеет наилучшую энергетическую характеристику, минимальный вес, наибольшую гибкость. наилучшим образом работает на ударную нагрузку.

Рассматривая распределение напряжений по сечению балки, приходим к необходимости (как ранее при кручении) убрать материал там, где он недогружен, и сосредоточить там, где он работает. То есть, на наибольшем, допустимом габаритам, расстоянии от нейтральной оси.

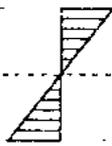
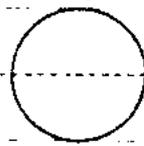
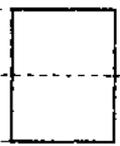
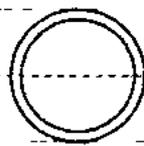
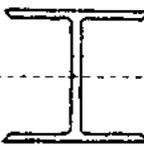
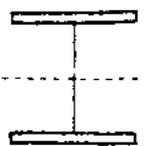
					
Эпюра σ	Сплошной круг	Сплошной прямоугольник	Тонкое кольцо	Двутавр	Идеальный двутавр
Площадь сечения A	$8 \left(\frac{W_z}{h} \right)$	$6 \left(\frac{W_z}{h} \right)$	$4 \left(\frac{W_z}{h} \right)$	$\approx 3 \left(\frac{W_z}{h} \right)$	$2 \left(\frac{W_z}{h} \right)$
Отношение площади сечения к площади идеального двутавра	4	3	2	$\approx 1,5$	1

Рис. 5. Соотношение площадей разных сечений [1] при равных отношениях моментов сопротивления к высоте.

Таким образом, расчетная схема тонкостенных стержней появляется при оптимизации балок, работающих на плоский поперечный изгиб. Получается своеобразный стержень-оболочка $\delta \ll b - h \ll L$. С одной стороны, два характерных размера b, h много меньше третьего L (условие для стержня). С другой стороны, два характерных размера b, h много больше третьего δ (условие для оболочки).

Деформирование и распределение напряжений в тонкостенных и обычных стержнях существенно отличаются [1-4]. Достаточно сказать, что перестают выполняться (полностью или частично) некоторые важнейшие для выводов формул сопротивления материалов упрощающие гипотезы – гипотеза плоских сечений Бернулли и принцип локальности действия взаимно уравновешенной системы сил Сен-Венана. Все это несколько усложняет расчет. Но за преимущества изделия в процессе эксплуатации, как правило, стоит заплатить на этапе проектирования и расчета.

Особенности работы тонкостенных стержней

Особенности деформирования тонкостенных стержней

Кроме того, что в общем случае нагружения поперечные сечения тонкостенных стержней плоские до деформации стержня перестают быть плоскими после деформации (искривляются, *депланируют*)⁵, оказывается, что при приложении поперечной силы в центре тяжести сечения, как правило, кроме изгиба возникает еще и закручивание стержня. Чтобы разобраться от чего это происходит и как с этим бороться, рассмотрим распределение напряжений.

Особенности распределения напряжений

Можно показать, что в приповерхностном слое детали в случае свободной поверхности касательные напряжения всегда будут направлены по касательной к поверхности. А так как толщина стенки рассматриваемых стержней мала, можно сделать вывод: касательные напряжения направлены по касательной к контуру сечения и в случае плоского изгиба распределены равномерно по толщине стенки. К тому же для тонкостенных стержней (особенно открытого, незамкнутого профиля) имеют значительную величину и оказывают значительно большее влияние на деформацию и прочность этих стержней, чем при изгибе стержней сплошного и замкнутого профиля.

Нормальные и касательные напряжения при изгибе тонкостенных стержней открытого профиля могут быть определены по обычным формулам сопротивления материалов:

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad (5)$$

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_z^*}{\delta \cdot I_z} \quad (6)$$

где M_z -внутренний изгибающий момент,

I_z -осевой момент инерции сечения относительно главной центральной оси z ;

y -координата точки, в которой определяются продольные нормальные напряжения σ ;

Q_y -поперечное внутреннее усилие;

δ -толщина стенки сечения;

S_z^* -статический момент части сечения с одной стороны от места, где определяются напряжения τ .

Создается поток касательных напряжений по контуру сечения (рис. 6б). Который создает крутящий момент вокруг геометрической оси стержня и вызывает его закручивание.

⁵ То есть не выполняется гипотеза Бернулли

Понятие о центре изгиба и методика его определения

Чтобы закручивания тонкостенного стержня открытого профиля не было, линия действия поперечной силы должна проходить через специальную точку – **центр изгиба**. Таким образом, можно дать следующие (вытекающие одно из другого) определения центру изгиба⁶:

1. Точка, при приложении в которой поперечной силы не происходит закручивания тонкостенного стержня открытого профиля.
2. Точка, относительно которой момент касательных напряжений, действующих по сечению равен нулю.

Из определения следует метод теоретического определения положения центра изгиба.

Пусть мы нашли эту точку. Тогда относительно любой точки сумма моментов от касательных напряжений в сечении и от внешней силы F должна равняться нулю. При определении центра изгиба швеллера в качестве базовой точки (начала отсчета) удобно взять центр тяжести стойки. Тогда момент от касательных напряжений, действующих по стойке, взаимно уравновешивается и вывод формулы упрощается.

$$M_r = M_F, \quad (7)$$

$$M_F = F \cdot e = Q \cdot e \quad (8)$$

$$\begin{aligned} M_r &= \int K_r \cdot \tau dA = 2 \cdot \int_0^h K_r \cdot \tau \cdot \delta dl + \int_0^b K_r' \cdot \tau \cdot \delta dl = 2 \cdot \int_0^b K_r \cdot \tau \cdot \delta dl + 0 = \\ &= 2 \cdot \int_0^b \left(\frac{h}{2} - \frac{\delta}{2} \right) \cdot \left(\frac{Q \cdot S_z^*}{\delta \cdot I_z} \right) \cdot \delta dl \approx \frac{Qh}{I_z} \int_0^b S_z^* dl = \frac{Qh}{I_z} \int_0^b \delta l \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{\delta}{2} \right) dl \approx \frac{Qh^2 b^2 \delta}{4I_z} \end{aligned} \quad (9)$$

где K_r - плечо, на котором касательные напряжения создают момент относительно базовой точки.

Откуда получаем (выражая I_z через размеры сечения и пренебрегая малыми, но конечными величинами) (*проделайте вывод самостоятельно!*)

$$I_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-\delta) \cdot (h-2\delta)^3}{12} \approx \frac{h^2 \delta}{12} (6b+h). \quad (10)$$

$$e = \frac{M_r}{Q} \approx \frac{h^2 b^2 \delta}{4I_z} \approx \frac{3b^2}{6b+h} \quad (11)$$

⁶ Кроме того, можно показать, что центр изгиба совпадает с главным полюсом сечения [2].

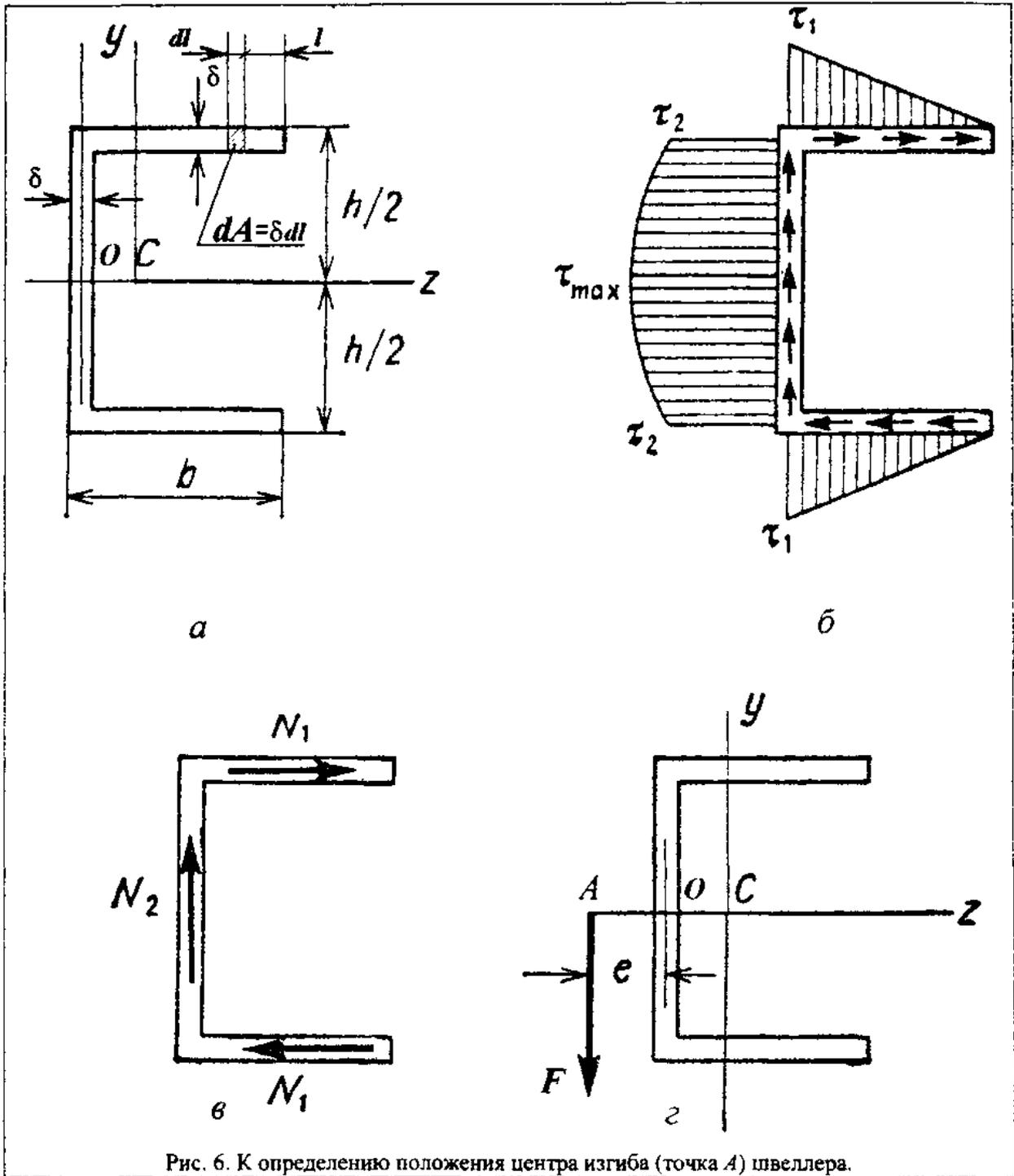


Рис. 6. К определению положения центра изгиба (точка A) швеллера.

Аналогично можно получить положение центра изгиба для разрезанной трубы.

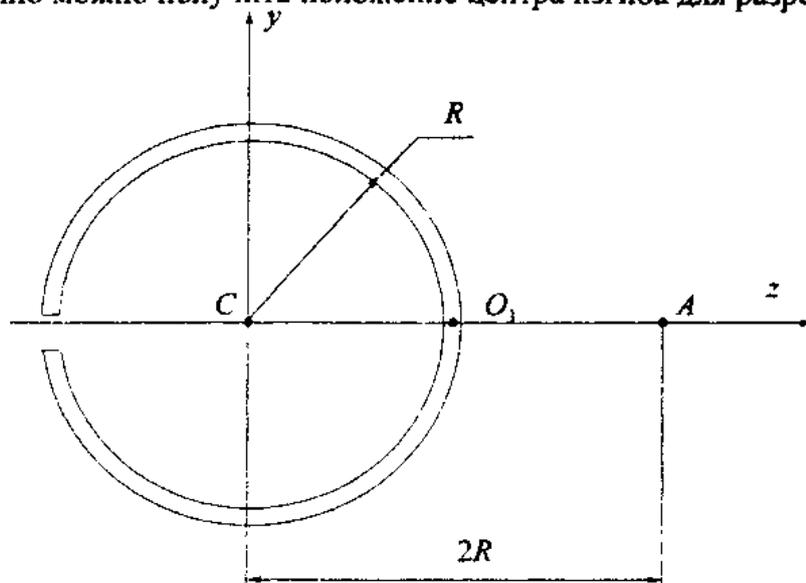


Рис 7. К определению положения центра изгиба (точка A) разрезанной трубы

Свойства симметрии позволяют упростить определение положения центра изгиба. Если сечение имеет ось симметрии (выше рассмотренные случаи) то центр изгиба располагается на ней. Если же сечение имеет две оси симметрии (например, двутавр) то центр изгиба (как и центр тяжести) будет находиться на пересечении осей симметрии.

Для сечений представляющих собой несколько ребер сходящихся в одной точке центр изгиба будет находиться на пересечении средних линий ребер.

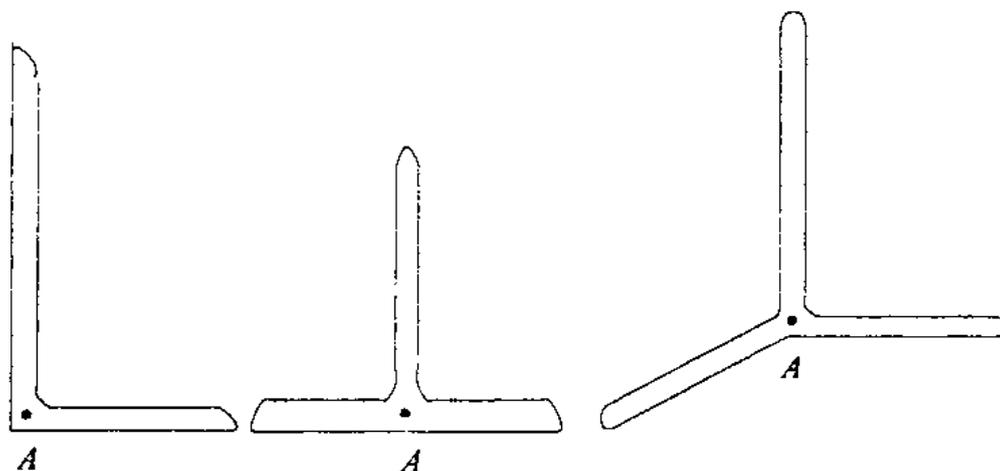


Рис 8. К определению положения центра изгиба (точка A) у сечений представляющих собой несколько ребер сходящихся в одной точке

Оборудование. Приборы. Испытуемый образец

На рис.9 представлен внешний вид лабораторной установки и схема нагружения балки. Испытуемый образец 1 представляет собой тонкостенную балку постоянного по длине сечения сечение в виде нестандартного швеллера с постоянной толщиной стенки δ заделанную одним концом. На свободном конце балка нагружается силой F посредством грузов 2, которые устанавливаются на поддон подвески 3. Положение подвески с грузом, определяемое расстоянием от центра тяжести сечения до линии действия силы, устанавливается по шкале 4. Для экспериментального определения перемещений конца стержня служат закрепленные на неподвижной раме 5 индикаторы часового типа 6, с помощью которых фиксируется поворот стержня 4, жестко связанного с концевым сечением испытуемого образца 1.

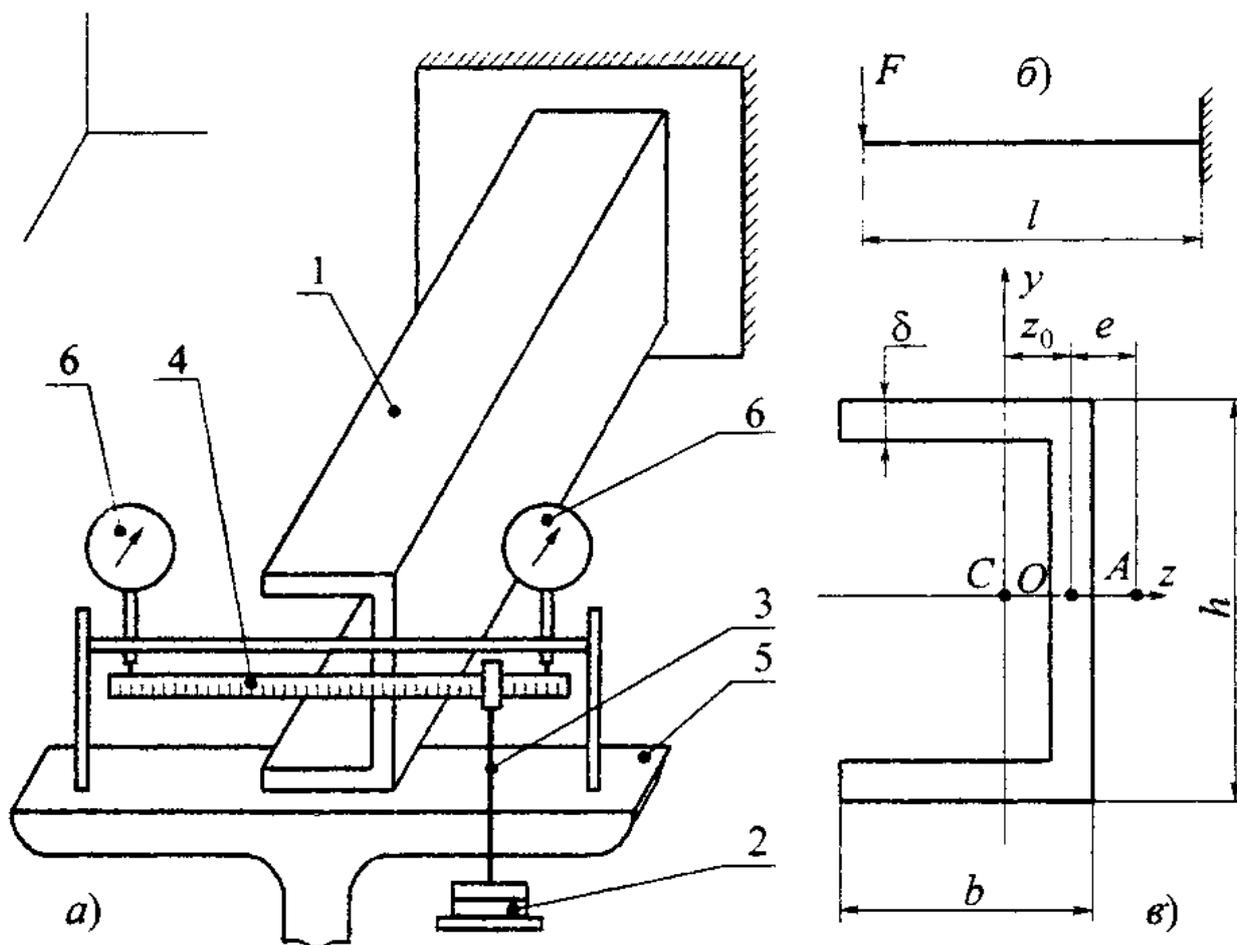


Рис. 9. Установка для исследования поперечного изгиба тонкостенных стержней: а) внешний вид установки; б) схема нагружения; в) поперечное сечение стержня.

Таблица 1

Основные данные испытываемой балки.

Длина балки	l , мм	845
Форма поперечного сечения балки		
Размеры поперечного сечения	b , мм	31,5
	h , мм	61,5
	δ , мм	1,5
Расстояние от центра тяжести сечения до центра тяжести стенки швеллера	z_0 , мм	8
Осевой момент инерции	I_z , мм ⁴	
Осевой момент сопротивления	W_z , мм ³	
Материал балки		Сталь 20
Предел текучести	$\sigma_{0,2}$, МПа	250
Расстояние между индикаторами	a , мм	230

Методика проведения эксперимента

Перед началом работы оцените величину допускаемой нагрузки на стержень хотя бы из условия прочности при плоском поперечном изгибе используя известные формулы сопротивления материалов⁷. При назначении величины допускаемого напряжения учитывается характер работы балки, предусматривается возможность случайных перегрузок, которые могут возникать при установке грузов на поддон; нужно учесть и приближенность подобного расчета.

Рекомендуется следующий порядок проведения эксперимента.

1. Установите подвеску в положение, соответствующее совпадению плоскости действия силы с главной центральной плоскостью инерции поперечного сечения; снимите показания индикаторов при отсутствии внешних сил и занесите их в таблицу 2.
2. Произведите нагружение силой F (стараться прикладывать силу статически, плавно) и запишите новые показания в таблицу 2
3. Повторите эксперимент (пункты 1 и 2) при нескольких других положениях подвески, соответствующих различным значениям координаты z_p ; снимите показания и занесите в таблицу 2.

Таблица 2

Координаты точки приложения силы z_p	Показания индикаторов, мм						Приращение показаний $A_{лев}$, $A_{прав}$, мм	Угол закручивания	
	Левый			Правый				$\tan \varphi$	φ
	Без нагрузки	Под нагрузкой	Приращение $A_{лев}$	Без нагрузки	Под нагрузкой	Приращение $A_{прав}$			

⁷ Из практических соображений рекомендуется брать величину нагрузки 1 кг (≈ 10 Н)

Обработка результатов эксперимента

Последующую обработку результатов эксперимента рекомендуется проводить по следующему плану.

1. Угол закручивания балки для каждого из положений груза определяется по величине тангенса этого угла, подсчитываемого по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_{\text{лев}} - A_{\text{прав}}}{a} \quad (12)$$

где a – расстояние между индикаторами.

Расстояние e , определяющее положение центра изгиба, можно установить, например, графически⁸. Для чего построим график изменения угла закручивания испытуемого стержня в зависимости от координаты точки приложения силы, примерный вид которого приведен на рис. 11. Точка пересечения полученной кривой $\varphi = \varphi(z_p)$ с осью абсцисс определяет положение центра изгиба.

Определите аналитически положение центра изгиба, используя формулу (11). Оцените расхождение между результатами теоретического и опытного положения центра изгиба.

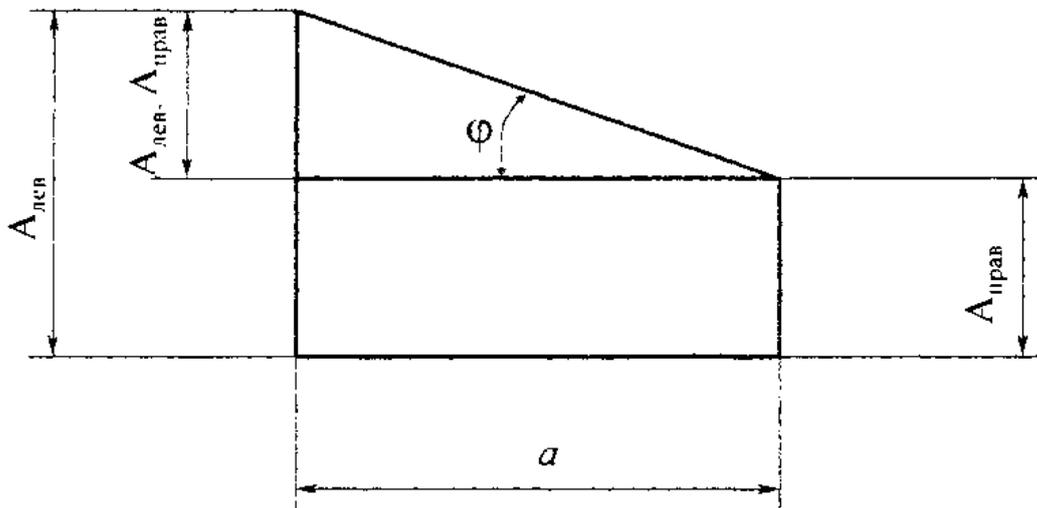


Рис. 10 К определению угла закручивания φ .

⁸ Конечно, можно использовать и другой метод, например наименьших квадратов (что сложнее и требует использования вычислительной техники). Пример с использованием системы MathCAD рассмотрен в приложении.

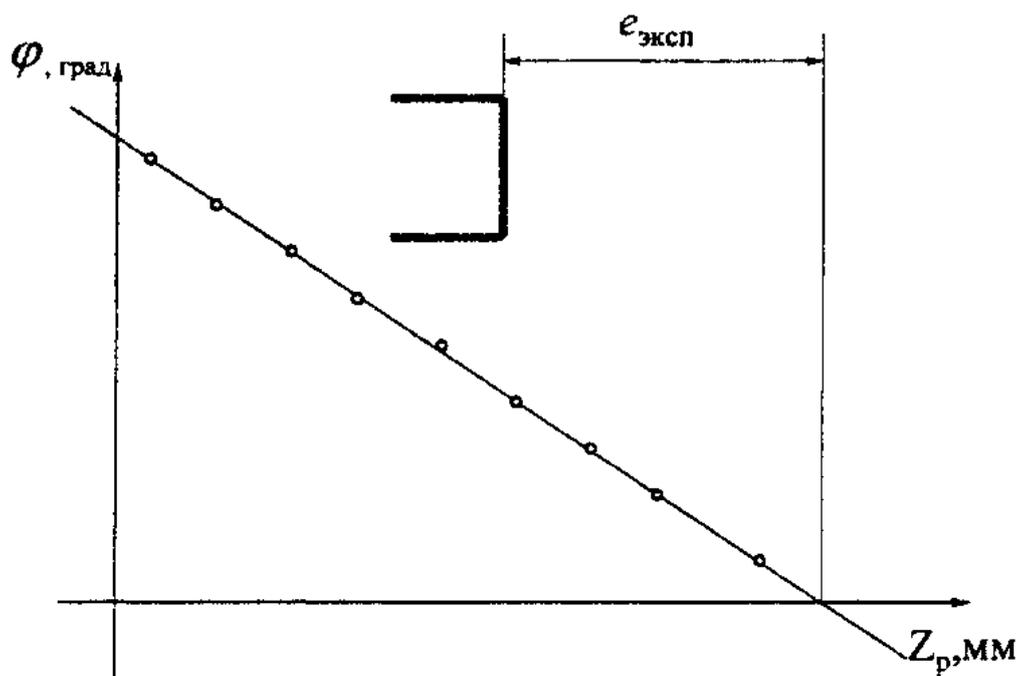


Рис. 11. График зависимости угла закручивания φ от координаты z_p и определение расстояния e по результатам эксперимента.

Рекомендации по оформлению отчета

1. Сформулируйте цель работы.
2. В разделе «Оборудование и испытуемый образец» приведите краткие сведения об экспериментальной установке. Нарисуйте схему нагружения испытуемого стержня, его поперечное сечение, а также схему, иллюстрирующую способ определения угла закручивания и запишите формулу вычисления φ . На рисунках покажите все необходимые размеры для последующего теоретического расчета положения центра изгиба. Основные данные стержня занесите в таблицу 1.
3. В разделе «Теоретическая часть» приведите формулу для определения положения центра изгиба, справедливость которой необходимо проверить при проведении настоящей лабораторной работы; дайте пояснения всем входящим в нее членам.
4. В разделе «Экспериментальная часть» проведите подсчет допускаемой нагрузки для исследуемого стержня, учитывая прочностные свойства материала и характер действующих нагрузок.
5. По данным эксперимента заполните таблицу 2 и постройте график зависимости $\varphi = \varphi(z_p)$.
6. Определив экспериментально величину e , сравните ее с величиной ранее вычисленной теоретически. Рассчитайте расхождение между ними.
7. Сделайте вывод по работе. Кратко сформулируйте, какие особенности выявлены при изгибе тонкостенных стержней незамкнутого профиля. Отметьте, в каких случаях приложения внешних сил для таких стержней не возникает деформация кручения.

Правила техники безопасности

1. Запрещается одновременная работа на установке более чем одного человека.
2. Необходимо соблюдать осторожность при подъеме грузов и установке их на поддон подвески. Случайное падение грузов может привести к травме.
3. Запрещается класть грузы на столы, стулья и другие, не предусмотренные для этого места.
4. Необходимо помнить и безусловно выполнять общие требования техники безопасности в лаборатории кафедры сопротивления материалов.

Контрольные вопросы

1. Что мы называем тонкостенным стержнем? Дайте определение.
2. При каком виде сопротивления реализуются преимущества тонкостенных стержней открытого профиля? Почему?
3. Сформулируйте особенности деформирования тонкостенного стержня открытого профиля под действием приложенной внешней поперечной силы.
4. Сформулируйте особенности распределения касательных напряжений в поперечных сечениях тонкостенных стержней открытого профиля.
5. Напишите формулу для определения касательных напряжений при изгибе тонкостенных стержней.
6. Нарисуйте эпюру касательных напряжений по контуру сечения при изгибе стержня, имеющего поперечное сечение типа швеллера. Укажите точки сечения, где действуют минимальные и максимальные по величине касательные напряжения.
7. Напишите формулу для определения продольных нормальных напряжений при изгибе тонкостенных стержней.
8. Какой вид напряженного состояния возникает в точках поперечного сечения при изгибе тонкостенных стержней незамкнутого профиля. Нарисуйте элемент и покажите действующие по его граням напряжения.
9. Дайте определение центру изгиба.
10. Из каких условий можно вывести выражение для центра изгиба?
11. Как зависит положение центра изгиба от величины внешней силы?
12. Где находится центр изгиба для сечений имеющих две оси симметрии?
13. Где находится центр изгиба для сечений представляющих собой систему сходящихся в одной точке ребер?
14. Напишите формулу для определения положения центра изгиба для сечения типа швеллера и проанализируйте ее.

Дополнение.

Понятие о других методах структурной оптимизации стержней

Изучение тонкостенных стержней будет не полным, ущербным, если ничего (хотя бы очень кратко) не сказать о других широко распространенных в настоящее время методах структурной оптимизации стержней.

Использование армированных (композитных) стержней

Вместо того чтобы просто убрать материал из тех зон, где он недогружен, можно заменить его другим (обычно, более легким, пластичным, но менее прочным, жаропрочным, коррозионностойким). Изделие из получившихся структурно неоднородных, композиционных материалов помимо уменьшения массы может приобрести (при правильном проектировании!) ряд дополнительных полезных качеств (увеличение вязкости разрушения, коррозионной стойкости, надежности при заданном ресурсе в жестких режимах эксплуатации и т.д.) и их сочетаний. Появляется возможность управлять служебными свойствами материала и изделия в целом в той мере, в какой можно формировать, влиять на структуру материала [9, 10].

Элементарный расчет неоднородных стержней в области чисто упругих деформаций (при условии, что выполняются «обычные» упрощающие гипотезы) использующий метод приведения упругих свойств к свойствам одной из компонент изложен, например в [1].

Пример 1. Алюминиевая балка, усиленная стальными накладками.

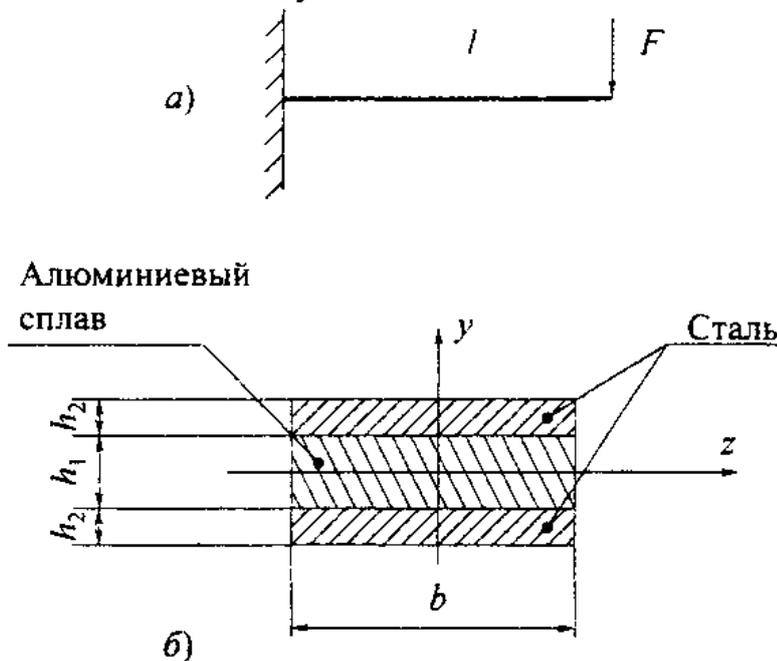


Рис. 12. Схема нагружения (а) и сечение (б) алюминиевой балки, усиленной стальными накладками.

Пусть длина балки $l=845$ (мм), нагрузка на балку $F=100$ (Н), размеры сечения $b=30$ (мм), $h_1=56$ (мм), $h_2=2$ (мм).

Модули Юнга для алюминиевого сплава $E_1=71 \cdot 10^9$ (Па), для стали $E_2=200 \cdot 10^9$ (Па). Найдем прогиб балки в месте приложения силы.

Согласно методике [1] приведенный осевой момент инерции

$$I_{z_{\text{экв}}} = \sum I_k \cdot \frac{E_k}{E_1} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} I_{z_{\text{экв}}} &= \sum I_k \cdot \frac{E_k}{E_1} = \frac{b \cdot h_1^3}{12} + 2 \cdot \left[\frac{b \cdot h_2^3}{12} + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right)^2 \cdot b \cdot h_2 \right] \cdot \frac{E_2}{E_1} = \\ &= \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot (56 \cdot 10^{-3})^3}{12} + \\ &+ 2 \cdot \left[\frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot (2 \cdot 10^{-3})^3}{12} + \left(\frac{56 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \right] \cdot \frac{200 \cdot 10^9}{71 \cdot 10^9} = \\ &= 4,39 \cdot 10^{-7} + 2 \cdot (2 \cdot 10^{-11} + 5,05 \cdot 10^{-8}) \cdot 2,82 = 4,39 \cdot 10^{-7} + 2,85 \cdot 10^{-7} = \\ &= 7,23 \cdot 10^{-7} (\text{м}^4) \end{aligned}$$

Тогда прогиб

$$f = \frac{Fl^3}{3E_1 I_{z_{\text{экв}}}} = \frac{100 \cdot 0,845^3}{3 \cdot 71 \cdot 10^9 \cdot 7,24 \cdot 10^{-7}} = 3,92 \cdot 10^{-4} (\text{м}) \approx 0,4 (\text{мм})$$

Пример 2. Алюминиевая балка, армированная длинными борными волокнами.

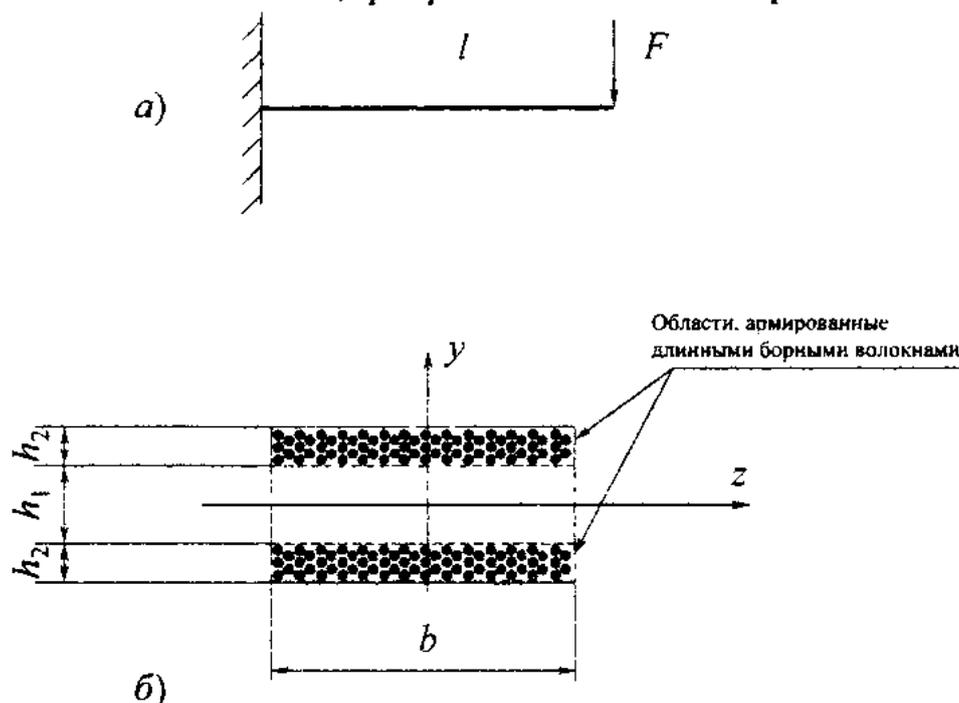


Рис. 13. Схема нагружения (а) и сечение (б) алюминиевой балки, армированной длинными борными волокнами

Пусть длина балки $l=845$ (мм), нагрузка на балку $F=100$ (Н), размеры сечения $b=30$ (мм), $h_1=56$ (мм), $h_2=2$ (мм).

Модули Юнга для алюминиевого сплава $E_1=71 \cdot 10^9$ (Па), для борных волокон⁹ $E_2=370 \cdot 10^9$ (Па).

⁹ [8], с.13: Для борных волокон модуль находится в пределах 370-430 (ГПа).

Объемная доля борных волокон в армированных областях $v_f = 60\%$.

Прежде чем искать приведенный момент инерции, сначала найдем эффективный модуль упругости армированных слоев. Воспользуемся тем, что при использовании длинных волокон деформации волокон и матрицы можно считать одинаковыми и равными деформации композита в целом, а удельная энергия деформирования композита сложится из удельной энергии деформирования части всего объема, заполненной волокнами и части всего объема, заполненной матичным материалом. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 u_c &= u_f + u_m \\
 \frac{\varepsilon_c^2 E_c}{2} &= \frac{\varepsilon_f^2 E_f}{2} v_f + \frac{\varepsilon_m^2 E_m}{2} (1 - v_f) \\
 \varepsilon_c &= \varepsilon_f = \varepsilon_m \\
 E_c &= E_f v_f + E_m (1 - v_f)
 \end{aligned} \tag{14}$$

Формула (14) дает эффективный модуль упругости по Фойгту¹⁰.

Значит, $E_c = 370 \cdot 10^9 \cdot 0,6 + 71 \cdot 10^9 (1 - 0,6) = 250 \cdot 10^9$ (Па)

Далее, воспользовавшись, как показано выше, методикой [1], находим приведенный осевой момент инерции сечения $I_{z_{\text{пр}}} = 7,95 \cdot 10^{-7}$ (м⁴) и найдем прогиб балки в месте приложения силы $f = 3,56 \cdot 10^{-4}$ (м) $\approx 0,36$ (мм)

Пример 3. Деревянная балка, покрытая слоями эпоксидной пластмассы, армированными короткими стальными волокнами.

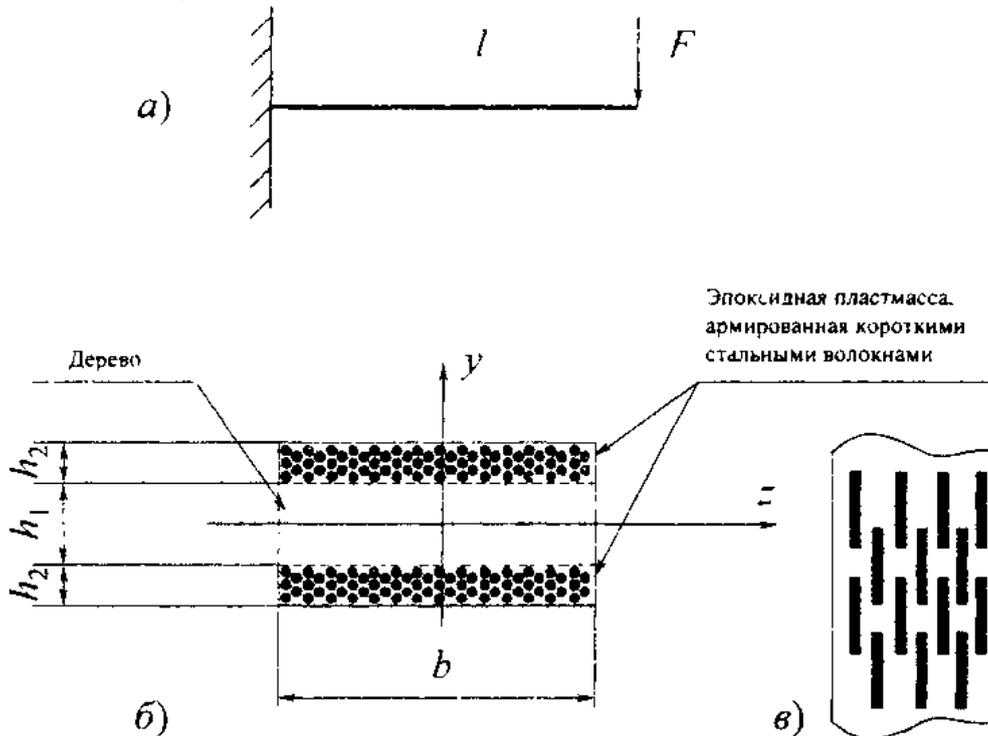


Рис 14 Схема нагружения (а), сечение (б) и расположение волокон (в) в армированном слое.

¹⁰ Можно сказать, что здесь по правилу смеси складываются жесткости материалов.

Пусть длина балки $l=150(\text{мм})$, нагрузка на балку $F=1(\text{Н})$, размеры сечения $b=25(\text{мм})$, $h_1=2,5(\text{мм})$, $h_2=1(\text{мм})$. Стальные волокна диаметром $1(\text{мм})$ и длиной $14(\text{мм})$. Объемная доля волокон в армированных областях $\nu_f = 18,7\%$.

Модули Юнга для дерева $E_1=13,5 \cdot 10^9(\text{Па})$, для стальных волокон $E_2=200 \cdot 10^9(\text{Па})$, для эпоксидной пластмассы $E_3=0,95 \cdot 10^9(\text{Па})$.

Определим эффективные модули. К сожалению, в случае коротких волокон нельзя с достаточной точностью считать деформации волокон и матрицы одинаковыми. Это предположение дает завышенную величину (верхнюю границу) эффективного модуля упругости. Нижнюю границу можно получить, предположив, что в волокнах и матрице возникают одинаковые не деформации, а напряжения:

$$\begin{aligned} u_c &= u_f + u_m \\ \frac{\sigma_c^2}{2E_c} &= \frac{\sigma_f^2}{2E_f} \nu_f + \frac{\sigma_m^2}{2E_m} (1 - \nu_f) \\ \sigma_c &= \sigma_f = \sigma_m \\ \frac{1}{E_c} &= \frac{1}{E_f} \nu_f + \frac{1}{E_m} (1 - \nu_f) \\ E_c &= \frac{E_f E_m}{E_m \nu_f + E_f (1 - \nu_f)} \end{aligned} \quad (15)$$

Формула (15) дает эффективный модуль упругости по Рейссу¹¹.

Значит, по Фойгту $E_c = 38,2 \cdot 10^9(\text{Па})$, по Рейссу $E_c = 1,17 \cdot 10^9(\text{Па})$. В среднем (по Хиллу) $E_c = 19,7 \cdot 10^9(\text{Па})$. Из за большого различия модулей фаз «вилка» слишком широкая (примерно в 30 раз). Поэтому необходимо уточнить величину E_c , воспользовавшись более адекватной моделью механики коротковолокнистого материала или проведя эксперимент (физический или вычислительный, например, воспользовавшись методом конечных элементов (МКЭ)). В результате эксперимента имеем $E_c = 4,67 \cdot 10^9(\text{Па})$. Далее, используя методику [1], находим приведенный момент инерции $I_{\text{пр}} = 8,70 \cdot 10^{-11}(\text{м}^4)$ и найдем прогиб балки в месте приложения силы $f = 9,58 \cdot 10^{-4}(\text{м}) \approx 0,96(\text{мм})$.

Сравнивая результаты расчетов двух первых примеров можно сделать вывод: по сравнению с неармированной алюминиевой балкой того же поперечного сечения в первом случае получили увеличение жесткости на 34% (правда, за счет увеличения массы на 12,5%, но увеличив контактную прочность и износостойкость поверхности), а во втором – на 46% (практически при сохранении той же массы).

Использование упрочняющих методов обработки поверхности

Вместо того чтобы заменить один материал другим, можно в основном материале детали сформировать зоны (обычно требуется на поверхности) с улучшенными механическими и другими эксплуатационными свойствами [8]. Обычно это достигается за счет изменения химического состава (обычно за счет высокотемпературной диффузии, плазменного напыления, ионной имплантации и др.), фазового состава

¹¹ Можно сказать, что здесь по правилу смеси складываются податливости материалов

(обычно за счет термообработки), формирования благоприятного поля остаточных напряжений, изменения механических характеристик материалов при пластической деформации материала, структуры материала (например, за счет направленной кристаллизации сплава) и т.д. При этом, как правило, повышается прочность, а не жесткость стержня.

Использование предварительно напряженных конструкций

Все ранее рассмотренные методы могут сопровождаться предварительным напряжением элементов. То есть образованием в ненагруженном состоянии поля напряжений, которое в нагруженном, рабочем состоянии конструкции приводит к выравниванию распределения коэффициентов запаса прочности и приближению конструкции к равнопрочной.

Например: использование предварительно напряженного железобетона, использование скрепленных составных или автофретированных сосудов давления [7].

Замечания о выборе метода структурной оптимизации

Каждый из рассмотренных методов имеет свои преимущества и недостатки. Например, стоимость изготовления композитных конструкций на сегодняшний день пока выше, чем стоимость стандартного проката. При изготовлении композитов возможны проблемы химической несовместимости фаз, возникновение электрохимической коррозии, отслаивание армирующих элементов по поверхностям раздела и т.д. Как видно из таблицы 3 хорошие результаты дает комбинация разных методов структурной оптимизации в сочетании с использованием легких сплавов, например, на основе алюминия, титана, магния, бериллия (ядовит!), армированных высокопрочными и высокомодульными волокнами бора, углерода, базальта, карбида кремния, окиси алюминия и др.

В природных «конструкциях» (растения, скелеты животных и т.д.) за тысячи и миллионы лет эволюции и естественного отбора были получены наилучшие (с учетом истории и вариантности развития) сочетания разных методов¹². Изучением особенностей строения и жизнедеятельности организмов для создания новых технических приборов, механизмов, систем и совершенствования существующих занимается наука *бионика*.

Инженеру приходится делать то же самое самостоятельно (безусловно, регулярно отслеживая историю техники, текущую хронику происшествий и отказов).

При выборе метода (или группы методов) следует обращать внимание на предполагаемые условия эксплуатации (с учетом их возможного изменения и аварийных режимов работы), имеющийся научный и опытно-конструкторский задел, наличие отработанных технологий, производственные условия, стоимость изделия на всех этапах его жизненного цикла.

¹² [1], с 358: «К.Кульман, занимавшийся в середине XIX века созданием подъемного крана большой грузоподъемности, ознакомившись в 1886 году с распределением напряжений в костной ткани, воскликнул: «Да это же мой кран!»»

Таблица 3

Сопоставление различных конструкций сечения консолю закрепленной балки длиной 845 мм нагруженной на конце сосредоточенной силой 100 Н

№	1	2	3	4	5	6
Материал	Сталь	Алюминий	Алюминий, частично армированный бором	Сталь	Алюминий	Алюминий, армированный бором на полках двутавра
Размеры	$b = 26$ (мм) $h = 52$ (мм)	$b = 33$ (мм) $h = 66$ (мм)	$b = 30$ (мм) $h = 60$ (мм) $h_1 = 56$ (мм) $h_2 = 2$ (мм) $v_f = 60\%$	$b = 33$ (мм) $h = 66$ (мм) $\delta = 3,43$ (мм)	$b = 46$ (мм) $h = 92$ (мм) $\delta = 3,43$ (мм)	$b = 39$ (мм) $h = 78$ (мм) $\delta = 3,43$ (мм) $v_f = 60\%$
Прогиб	0,36(мм)	0,36(мм)	0,36(мм)	0,36(мм)	0,36(мм)	0,36(мм)
$h/b = \text{const}$	2	2	2	2	2	2
$\delta = \text{const}$		✓		✓		✓
Масса (м)	8,58(кг)	4,98(кг)	4,10(кг)	2,83(кг)	1,39(кг)	1,00(кг)

Приложение

Пример расчета в системе MathCAD положения центра изгиба швеллера по результатам эксперимента

ORIGIN := 1 Информация для системы MathCAD: нумерация массивов начиная с 1
pp := 112 Координата центра тяжести стенки швеллера (мм)
pt := 5 Количество экспериментальных точек
i := 1..pt Индексы массивов

Координаты точек приложения нагрузки (мм)

$$z := \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 120 \\ 130 \\ 140 \end{pmatrix}$$

Углы закручивания тонкостенного стержня (градусы)

$$\phi := \begin{pmatrix} 0.38 \\ 0.24 \\ 0.04 \\ -0.15 \\ -0.28 \end{pmatrix}$$

Определение коэффициентов уравнения линейной регрессии методом наименьших квадратов с использованием стандартных функций MathCAD

Тангенс угла наклона линии регрессии к оси абсцисс

$$a := \text{slope}(z, \phi) \quad a = -0.017$$

Ордината пересечения линии регрессии с осью ординат

$$b := \text{intercept}(z, \phi) \quad b = 2.098$$

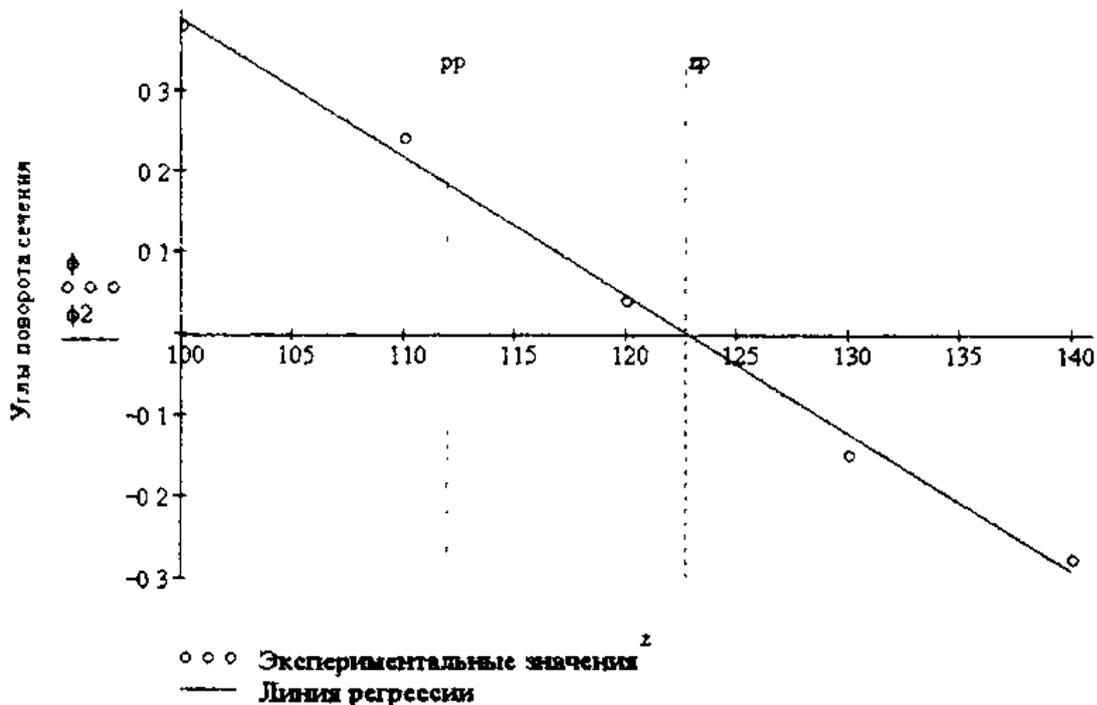
Расчет значений углов поворота ϕ_2 сечения по уравнению регрессии

$$\phi_2 := a \cdot z + b$$

$$z_p := \frac{-b}{a} \quad z_p = 122.69$$

$$e_{\text{exp}} := z_p - pp \quad e_{\text{exp}} = 10.7$$

Координата точки приложения силы для обеспечения отсутствия поворота сечения тонкостенного стержня (мм)
 Найденное по результатам эксперимента расстояние от центра изгиба до центра тяжести стенки швеллера (мм)



Пример расчета в системе MathCAD слонстой балки (Пример 1 дополнения)

ORIGIN ≡ 1

Информация для системы
нумерация индексов массивов начиная с 1

Исходные данные

$l := 0.845$	Длина балки (м)
$F := 100$	Нагрузка на балку (Н)
$b := 30 \cdot 10^{-3}$	Ширина сечения балки (м)
$h_1 := 56 \cdot 10^{-3}$	Высота алюминиевой части сечения балки
$h_2 := 2 \cdot 10^{-3}$	Толщина каждой из стальных накладок
$E_1 := 71 \cdot 10^{10}$	Модуль Юнга алюминиевого сплава (Па)
$E_2 := 2 \cdot 10^{11}$	Модуль Юнга стали (Па)
$\rho_1 := 2700$	Плотность алюминия (кг/м ³)
$\rho_2 := 7800$	Плотность стали (кг/м ³)
$pt := 2$	Количество разных слоев
$k := 1..pt$	Индексы массивов

Расчет

$$I_1 := \frac{b \cdot h_1^3}{12}$$

$$I_2 := 2 \cdot \left[\left[\frac{b \cdot h_2^3}{12} \right] + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right)^2 \cdot b \cdot h_2 \right]$$

$$I_{zpr} := \sum_k I_k \cdot \frac{E_k}{E_1}$$

$$f := \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E_1 \cdot I_{zpr}}$$

$$m := b \cdot h_1 \cdot l \cdot \rho_1 + 2 \cdot (b \cdot h_2 \cdot l \cdot \rho_2)$$

Результаты

$$I_1 = 4.39 \times 10^{-7}$$

$$I_2 = 1.01 \times 10^{-7}$$

$$I_{zpr} = 7.234 \times 10^{-7} \quad \text{Приведенный момент инерции сечения (м⁴)}$$

$$f = 3.916 \times 10^{-4} \quad \text{Прогиб балки (м)}$$

$$m = 4.624 \quad \text{Масса балки (кг)}$$

Список литературы

Основной

1. Александров, А.В. Сопротивление материалов. /А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.Д. Державин - М.: Высшая школа, 2000. – 560 с.
2. Багмутов, В.П. Теория тонкостенных стержней: Конспект лекций. /В.П. Багмутов, А.С Краев, А.Н. Тодоров. - Волгоград: РПК «Политехник», 2000.- 56 с.
3. Багмутов, В.П. Расчет тонкостенного стержня открытого профиля на сложное сопротивление. – Волгоград: ВолГПИ, 1990.-32 с
4. Власов, В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Физматгиз, 1959.- 595 с.

Дополнительной

5. Багмутов, В.П. Основы теории упругости. Курс лекций. Часть I. – Волгоград: РПК «Политехник», 1998 - 92 с. Часть II. – Волгоград: РПК «Политехник», 1998.- 40 с.
6. Багмутов, В.П. Прикладная теория упругости: учебное пособие к практическим занятиям. /В.П. Багмутов, В.Н. Тышкевич - Волгоград: ВолГТУ, 2004. – 102 с.
7. Багмутов, В.П. Практические приемы повышения прочности толстостенных сосудов: учебное пособие. /В.П. Багмутов, З.П. Журкина. - Волгоград: ВолГТУ, 1997. – 38 с.
8. Багмутов, В.П. Электромеханическая обработка: технологические и физические основы, свойства, реализация. /В.П. Багмутов, С.Н. Паршев, Н.Г. Дудкина, И.Н. Захаров.– Новосибирск: Наука, 2003. – 318 с.
9. Васильев, В.В. Механика конструкций из композиционных материалов.– М.: Машиностроение, 1998 – 272с
10. Ярошенко, А.П. Металлические композиционные материалы: учебное пособие. /А.П. Ярошенко, А.Ф. Трудов– Волгоград: РПК «Политехник», 1998. – 68 с.

Оглавление

Цель работы	3
Теоретическая часть	3
Для чего и почему нужны тонкостенные стержни	3
Особенности работы тонкостенных стержней	7
Особенности деформирования тонкостенных стержней	7
Особенности распределения напряжений	7
Понятие о центре изгиба и методика его определения	8
Оборудование. Приборы. Испытуемый образец	11
Методика проведения эксперимента	12
Обработка результатов эксперимента	13
Рекомендация по оформлению отчета	14
Правила техники безопасности	15
Контрольные вопросы	15
Дополнение. Понятие о других методах структурной оптимизации стержней	16
Использование армированных (композитных) стержней	16
Пример 1. Алюминиевая балка, усиленная стальными накладками	16
Пример 2. Алюминиевая балка, армированная длинными борными волокнами	17
Пример 3. Деревянная балка, покрытая слоями эпоксидной пластмассы, армированными короткими стальными волокнами	18
Использование упрочняющих методов обработки поверхности	19
Использование предварительно напряженных конструкций	20
Замечания о выборе метода структурной оптимизации	20
Приложение	22
Список литературы	24