

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
**ВНЕЦЕНТРЕННОМУ РАСТЯЖЕНИЮ**  
Методические указания к лабораторной работе

Дана методика расчета нормальных напряжений в различных точках поперечного сечения при внецентренном растяжении, а также методика построения ядра сечения. Описана процедура экспериментальной проверки теоретической формулы для расчета напряжений.

Приводится список рекомендуемой литературы, вопросы для самопроверки знаний студентов, а также правила по технике безопасности при проведении лабораторных исследований.

Методические указания предназначены для студентов различных форм обучения при изучении курса сопротивления материалов в полном объеме.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Цель работы.....	4
2. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ .....	4
3. УЧЕБНАЯ ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА.....	4
3.1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....	4
3.1.1. <i>Общие понятия.</i> .....	4
3.1.2. <i>Внутренние усилия.</i> .....	4
3.1.3. <i>Формулы для напряжений.</i> .....	5
3.1.4. <i>Центральное растяжение как частный случай внецентренного.</i> ..	6
3.1.5. <i>Две формы записи уравнения нейтральной оси.</i> .....	7
3.1.5. <i>Ядро сечения.</i> .....	7
3.1.5. <i>Частные случаи.</i> .....	7
3.2 ОБОРУДОВАНИЕ И ИСПЫТУЕМЫЙ ОБРАЗЕЦ.....	11
3.3. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОБРАБОТКА ОПЫТНЫХ ДАННЫХ.....	12
3.4.РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ПРОТОКОЛА ОТЧЕТА ..	13
3.5. ПРАВИЛА ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ.....	13
3.6. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ .....	14
Список рекомендованной литературы.....	16
• Основная литература.....	16
• Дополнительная литература.....	16

1. Цель работы. Экспериментальная проверка теоретической формулы для определения нормальных напряжений при внецентренном растяжении (сжатии), анализ вида эпюры распределения напряжений в зависимости от точки приложения внецентренной силы по отношению к ядру сечения.

## 2. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Учебная лабораторная работа, раскрывающая основные теоретические положения рассматриваемой темы.

## 3. УЧЕБНАЯ ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

### 3.1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

3.1.1. *Общие понятия.* Внецентренное растяжение (сжатие) является одним из простейших видов сложного сопротивления, возникающего в том случае, когда к торцевым сечениям бруса приложена сила параллельно его геометрической оси, не совпадающие с его геометрической осью поперечного сечения (рис. 1а), т. е. точка приложения силы не совпадает с центром тяжести. В общем случае внецентренного растяжения, точка «К» приложения силы  $F$  с координатами  $y_F, z_F$  не лежит ни на одной из главных центральных осей инерции ( $y, z$ ) поперечного сечения.

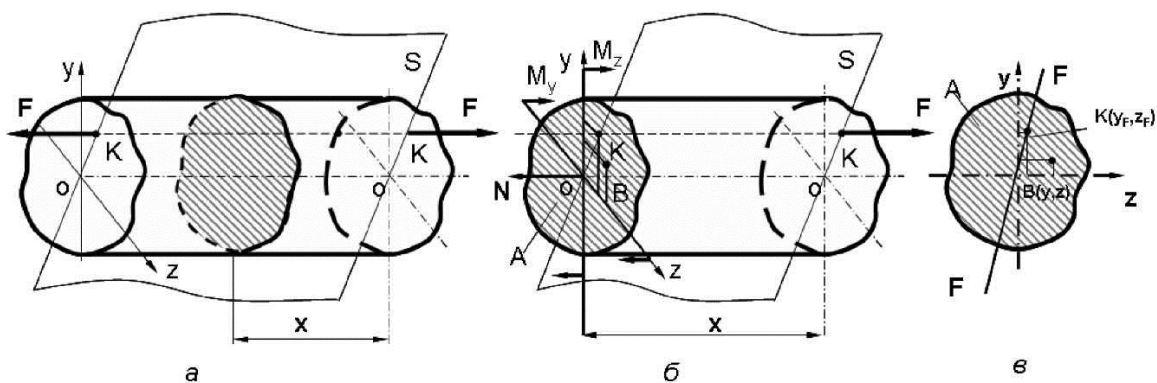


Рис. 1. Расчетная схема к определению напряжений (S- силовая плоскость; F-F - след плоскости S на контуре сечения площадью A; «B» - точка, в которой рассчитывается напряжение)

3.1.2. *Внутренние усилия.* Внутренние усилия, возникающие в попереч-

ных сечениях стержня при внецентренном растяжении, определяются методом мысленных сечений. Равновесие отсеченной методом сечений части стержня (рис. 1б) будет обеспечено, если влияние отброшенной части на оставшуюся заменить действием внутренних усилий: осевого усилия  $N$  и изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$ , приложив их в рассматриваемом сечении. В данном случае нагружения бруса (рис.1б) внутренний крутящий момент и внутренние поперечные силы будут отсутствовать, что видно из уравнений статического равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\Rightarrow N = F; & \sum Y = 0 &\Rightarrow Q_y = 0 \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y = F \cdot z_F = N \cdot z_F; & \sum Z = 0 &\Rightarrow Q_z = 0 \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z = F \cdot y_F = N \cdot y_F; & \sum M_x = 0 &\Rightarrow T = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $y_F, z_F$  - координаты точки  $K$  приложения внешней силы  $F$  (рис.1в);  $Q_y, Q_z, T$  - соответственно внутренние поперечные силы и внутренний крутящий момент. Полный внутренний изгибающий момент в рассматриваемом сечении определяется по формуле:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} . \quad (2)$$

Таким образом, при внецентренном растяжении внутренние усилия приводятся к изгибающему моменту  $M$ , расположенному в силовой плоскости и внутреннему осевому усилию  $N$ , что можно рассматривать как одновременное возникновение чистого косоуго изгиба и осевого растяжения (сжатия).

**3.1.3. Формула для напряжений.** Осевое усилие  $N$  и изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  (для упрощения термин «внутренние» в дальнейшем опускаем) вызывают появление нормальных напряжений  $\sigma', \sigma'', \sigma'''$ , которые направлены вдоль геометрической оси. Принимая принцип суперпозиции, величину полного напряжения  $\sigma$  определим как алгебраическую сумму  $\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma'''$  или

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}, \quad (3)$$

где  $A$  - площадь поперечного сечения стержня;  $I_y$  и  $I_z$  - главные центральные осевые моменты инерции поперечного сечения;  $y$  и  $z$  - координаты точки «В» поперечного сечения, в которой определяются нормальные напряжения. Кроме того, нужно заметить, что все компоненты напряжений направлены вдоль оси  $x$ , т.е. в данном случае возникает линейное напряженное состояние.

На основании выражений (1) и (3) получим:

$$\sigma = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} \right), \quad (4)$$

где  $N$  - осевое усилие,  $i_y$  и  $i_z$  - радиусы инерции поперечного сечения относительно главных центральных осей инерции  $y$  и  $z$ . Радиусы инерции в общем случае определяются по формулам:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}, i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$

**Правило знаков.** Если направления осей  $y$  и  $z$  выбрать таким образом, чтобы точка приложения силы попала в первый квадрант системы координат, то знак напряжения определяется знаком внутреннего усилия  $N$ , и знаками координат точки, в которой определяется напряжение.

#### **3.1.4. Центральное растяжение как частный случай внецентренного.**

Из уравнения (4) видно, что координаты  $y$  и  $z$  точки, в которой определяют напряжения, входят в него в первой степени. Следовательно, нормальные напряжения по поперечному сечению изменяются по линейному закону, а отсутствие координаты  $x$  говорит о неизменяемости напряжений по длине бруса (вдоль геометрической оси).

Из уравнения (4) следует, что напряжения в любой точке поперечного сечения при приложении силы в центре тяжести сечения ( $y_F = z_F = 0$ ) опреде-

ляются выражением:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

Что подтверждает формулу для напряжений в случае центрального осевого растяжения (сжатия). То есть центральное растяжение – это *частный случай* более общего вида сопротивления: внецентренного растяжения.

**3.1.5. Две формы записи уравнения нейтральной оси.** Определим положение точек  $(y_0, z_0)$  поперечного сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю, т. е. точек, по определению лежащих на нейтральной оси (Н. О.). Приравнивая правую часть уравнения (4) к нулю, получим:

$$\frac{N}{A} \left( 1 + \frac{z_F \cdot z_0}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_0}{i_z^2} \right) = 0,$$

где  $y_0, z_0$  – координаты пересечения нейтральной осью осей  $y, z$ .

Поскольку  $\frac{N}{A} \neq 0$  (при  $\frac{N}{A} = 0, N=0$  нарушается физический смысл постановки задачи: стержень не нагружен внешней силой ( $N = F = 0$ ), то нулю равно выражение в скобках:

$$1 + \frac{z_F \cdot z_0}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_0}{i_z^2} = 0. \quad (5)$$

Функция (5)  $F(y_0, z_0) = 0$ , носит название: *первая форма уравнения нейтральной оси*.

Поскольку эта форма неудобна для решения практических задач, приведем вторую форму записи. Преобразуем выражение (5) в уравнение прямой линии в отрезках, отсекаемых ею по осям координат. Используя два условия ( $y_0=0; z_0=z_n$  и  $z_0=0; y_0=y_n$ ), получим:

$$z_n = -\frac{i_y^2}{z_F}, \quad y_n = -\frac{i_z^2}{y_F}. \quad (6)$$

Уравнения (6) – это *вторая форма уравнения нейтральной оси* (уравнения

Н.О. в отрезках)

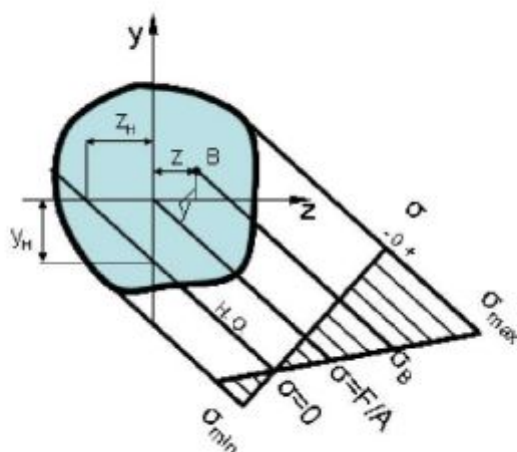


Рис. 2. Эпюра напряжений в поперечном сечении при внецентренном растяжении.

Поскольку **нейтральной осью** называется геометрическое место точек поперечного сечения, в которых напряжения равны нулю, то выражения (6) определяют положение нейтральной оси (рис.2) при внецентренном растяжении (сжатии).

Если нейтральная ось пересекает контур поперечного сечения, то она разделяет сечение на две области, лежащие по разные стороны от нейтральной оси, напряжения в которых имеют различные знаки. Значит одна область поперечного сечения растянута ( $\sigma > 0$ ), а другая – сжата ( $\sigma < 0$ ). Для определения нормального напряжения по эпюре  $\sigma$  в произвольной точке «В» поперечного сечения достаточно через данную точку провести прямую параллельную Н.О., до пересечения с эпюрой. Очевидно, что во всех точках этого сечения, лежащих на такой прямой, напряжения будут одинаковыми.

3.1.6. **Ядро сечения.** *Ядром сечения* называется материальная (или нематериальная) часть поперечного сечения, расположенная вокруг его центра тяжести, обладающая особым свойством: приложение растягивающей (сжимающей) силы в этой области вызывает появление во всем поперечном сечении напряжения одного знака. Знак напряжения при этом, очевидно, определяется направлением внешней силы.

В тех случаях, когда Н.О. касается контура поперечного сечения, нигде его не пересекая, точка приложения внецентренной нагрузки расположена на границе ядра сечения. Границей *ядра сечения* называется геометрическое место точек, обладающих свойством: *если внешняя внецентренная сила приложена в любой точке ядра, нейтральная ось касается контура поперечного сечения нигде не пересекая его*. Граница ядра является замкнутой линией (в общем – кривой; в частных случаях – образуют отрезками прямых). Умение строить ядро сечения очень важно при проектировании сооружений из хрупких материалов, т. к. такие материалы разрушаются даже при малых положительных напряжениях и для них недопустимо, чтобы эти растягивающие напряжения возникали хотя бы в некоторой части поперечного сечения.

Для построения ядра сечения нужно провести последовательно несколько положений Н.О., касающихся точек контура поперечного сечения, нигде не пересекая его, как это выполнено на рис.3. Так как при этом точка приложения силы  $F$  будет располагаться на контуре ядра сечения, то обозначим ее координаты  $y_{я}$ ,  $z_{я}$ .

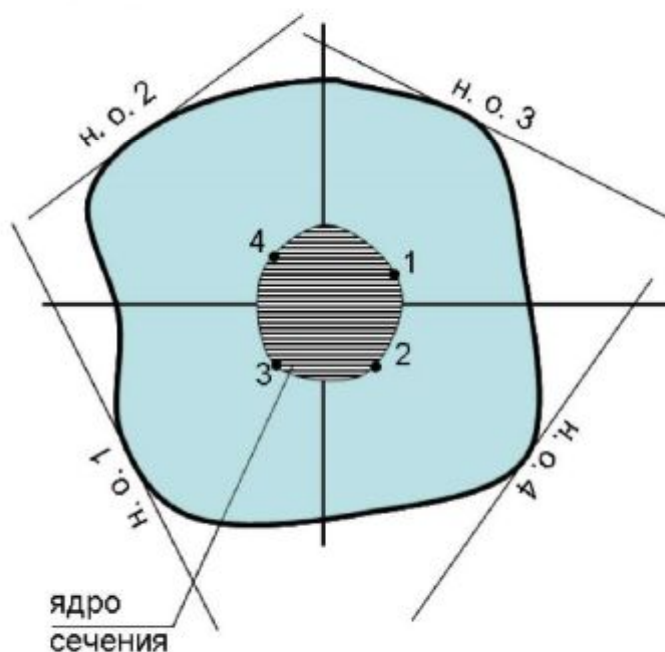


Рис. 3. Определение ядра сечения.



Эти координаты точек, соответствующие определенным положениям Н.О., находятся из выражений (6), если ввести принятые обозначения  $y_F=y_{я}$  и  $z_F=z_{я}$ , в виде:

$$z_{я} = -\frac{i_y^2}{z_n}, \quad y_{я} = -\frac{i_z^2}{y_n}. \quad (7)$$

**3.1.7. Частные случаи.** Распределение нормальных напряжений по поперечному сечению зависит от точки приложения внецентренной силы по отношению к ядру сечения. В частном случае, рассмотрим характерные случаи приложения растягивающей (сжимающей) силы  $F$  в точках, расположенных на оси  $z$ , одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения, ( $y_F=0$ ), т.е. случай внецентренной нагрузки, приводящей к одновременному возникновению внутреннего осевого усилия ( $N$ ) и одного внутреннего изгибающего момента ( $M_y$ ).

Четыре характерных случая показаны на рис.4.

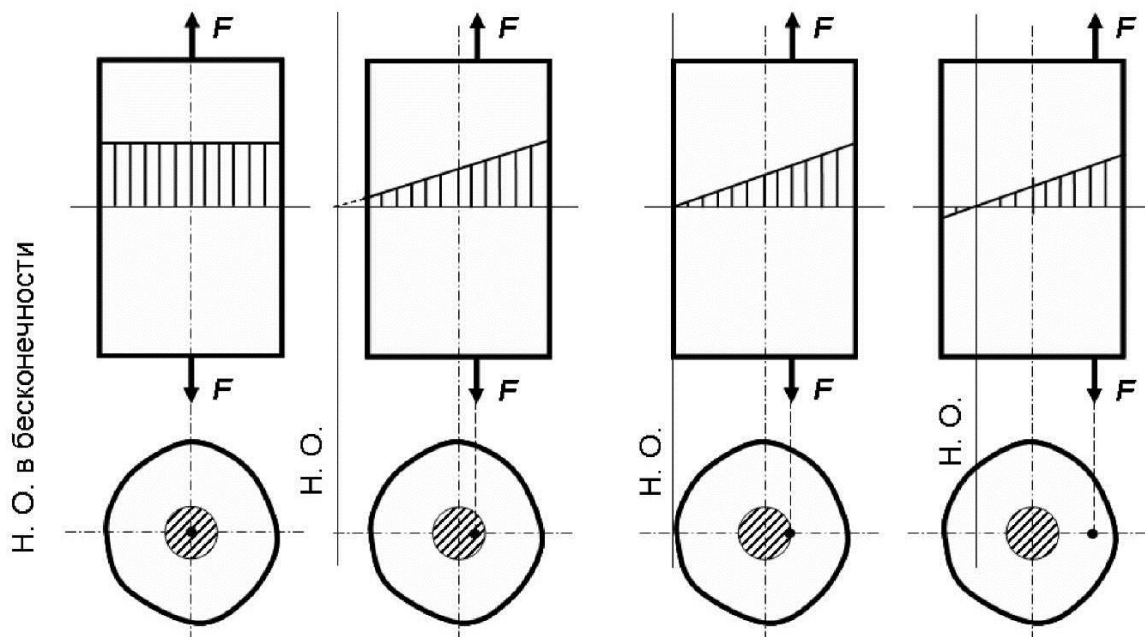


Рис. 4 Эпюры нормальных напряжений и положение Н.О. в зависимости от точки приложения внешней силы.

### 3.2. ОБОРУДОВАНИЕ И ИСПЫТУЕМЫЙ ОБРАЗЕЦ

Испытание на внецентренное растяжение проводится на машине марки УМЭ-10ТМ.

В качестве образца используется стальной призматический стержень, размеры поперечного сечения которого, места наклейки тензометрических датчиков (для определения величин деформаций в соответствующих точках) и координаты приложения внецентрированной нагрузки показаны на рис.

5. Измерение деформаций проводится с помощью прибора ИДЦ-1.

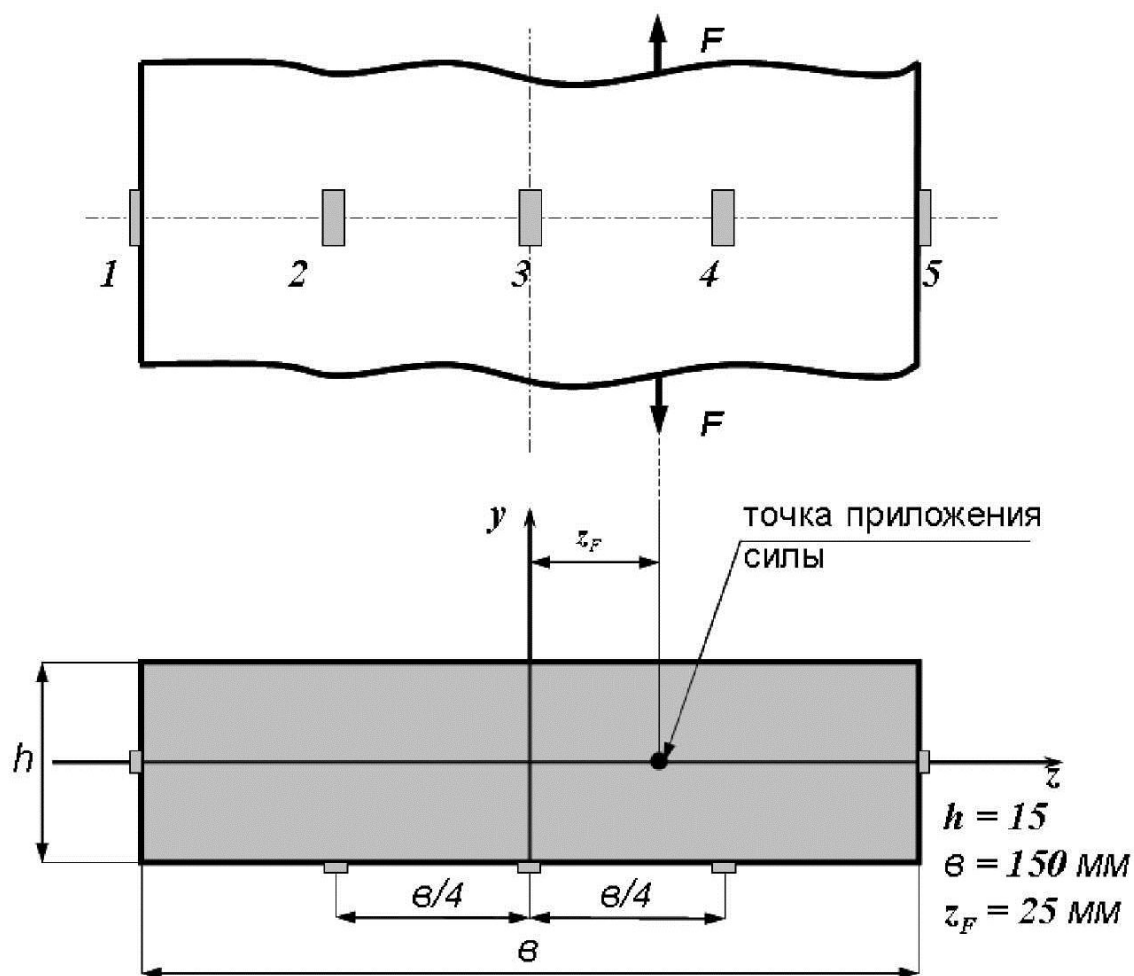


Рис. 5. Схема расположения тензодатчиков на образце.

### 3.3. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОБРАБОТКА ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

Включите прибор для измерения деформаций ИДЦ-1 в сеть и дайте ему прогреться не менее 10 мин.

Проведите предварительное нагружение образца (величины нагрузок приведены в табл.1) и снимите показания прибора  $n_i$  для измерения деформаций в каждой из пяти точек ( $i=1 \dots 5$ ).

Последовательно проделайте то же самое и при других нагрузках. Данные запишите в табл. 1

Таблица 1.

Нагрузка, кН.	Показания прибора для различных датчиков									
	$n_1$	$\Delta n_1$	$n_2$	$\Delta n_2$	$n_3$	$\Delta n_3$	$n_4$	$\Delta n_4$	$n_5$	$\Delta n_5$
8										
28										
48										
$\Delta n_{\text{ср}}$	---		---		---		---		---	

Определите приращения деформаций каждого датчика для двух ступеней нагружения и их средние значения.

По ним находится величина относительной деформации в указанных точках образца.

$$\varepsilon_i = \Delta n_i \cdot 10 \text{ЕОД} = \Delta n_i \cdot 10^{-5}$$

где ЕОД - единица относительной деформации, равная  $1 \cdot 10^{-6}$ .

Тогда напряжения в исследуемых точках, в соответствии с законом Гука для линейного напряженного состояния, определяются так:

$$\sigma_i = \varepsilon_i \cdot E = \Delta n_i \cdot 10 \text{ЕОД} = \Delta n_i \cdot 10^{-5}$$

### **3.4. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ПРОТОКОЛА ОТЧЕТА**

- В разделе "Оборудование и испытуемый образец" приведите чертеж (схему) образца и его размеры, покажите точки расположения тензодатчиков для определения напряжений при внецентренном растяжении, а также точку приложения растягивающей силы.
- Укажите оборудование, на котором проводится нагружение образца, а также тип прибора, применяемого для измерения деформаций.
- В теоретической части отчета дайте определение внецентренного растяжения. Опишите: какие внутренние усилия и напряжения возникают в этом случае.
- Приведите необходимые расчетные формулы, дайте определение ядра сечения и объясните способ его построения. Проверьте усвоение теоретического материала, отвечая самостоятельно на все вопросы для самопроверки, приведенные ниже.
- Постройте ядро сечения для поперечного сечения и эпюру напряжений по теоретическим значениям. На этот график (эпюру) нанесите точки, соответствующие экспериментально найденным напряжениям. Определите степень отклонения от теоретической линии. Покажите, как проходит нейтральная ось.
- Сделайте выводы по работе.

### **3.5. ПРАВИЛА ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ**

- Запрещается приступать к работе на установке до получения подробного инструктажа от преподавателя и росписи в журнале по технике безопасности.
- Убедитесь в исправности заземления. При отсутствии заземления работать на установке **запрещается**. **П о м н и т е !** Напряжение 380 вольт смертельно опасно.
- Самостоятельно без преподавателя проводить испытания запрещается.

### 3.6. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие внутренние усилия возникают при внецентренном растяжении (сжатии)?
2. На применении какого принципа основан вывод формулы нормальных напряжений при внецентренном растяжении?
3. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях при внецентренном растяжении?
4. Начертите элементарный объем тела и покажите действующие по его граням напряжения; укажите: какое при внецентренном растяжении (сжатии) возникает напряженное состояние.
5. Выведите формулу нормальных напряжений при внецентренном растяжении.
6. Какой вид примет формула нормальных напряжений в частном случае: когда точка приложения силы находится на одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения?
7. Получите формулу для определения напряжения в центре тяжести поперечного сечения для бруса, подверженного внецентренному растяжению. Проведите анализ этой формулы.
8. Запишите уравнения нейтральной оси в отрезках при внецентренном растяжении.
9. Если нейтральную ось приближать к центру сечения, то куда при этом будет перемещаться точка приложения силы? Почему?
10. Может ли нейтральная ось проходить за контуром поперечного сечения (не пересекая его)? Если может, то где при этом должна находиться точка приложения силы?
11. Если нейтральную ось удалять в бесконечность, то куда стремиться точка приложения силы? Как называется такой случай нагружения бруса?
12. Если нейтральная ось будет вращаться в плоскости поперечного

- сечения относительно неподвижной точки, то как при этом будет перемещаться точка приложения внецентренной силы?
13. Определите графически напряжения в любой точке поперечного сечения, если известна эпюра нормальных напряжений.
  14. Будут ли изменяться напряжения в точках поперечного сечения на линии, параллельной нейтральной оси?
  15. Каким образом можно найти наиболее нагруженные точки поперечного сечения бруса, испытывающего внецентренное растяжение?
  16. По какому закону распределяются нормальные напряжения в плоскости поперечного сечения?
  17. Могут ли в некоторых точках поперечного сечения при внецентренном сжатии возникнуть растягивающие напряжения?
  18. Остается ли справедливой гипотеза плоских сечений при внецентренном растяжении?
  19. Возникают ли касательные напряжения в поперечных сечениях бруса при внецентренном растяжении?
  20. Возникают ли касательные напряжения при внецентренном растяжении в сечениях, наклоненных под углом  $45^\circ$  к оси бруса? Чему они равны?
  21. Что называется «ядром сечения»? Что называется «контуром ядра сечения»?
  22. Если точка приложения внецентренной силы будет перемещаться по прямолинейному участку контура ядра сечения, то как при этом будет вести себя нейтральная ось?
  23. Какой вид имеет ядро сечения для прямоугольника, двутавра, швеллера? Приведите объяснения.
  24. В каких характерных точках, при выполнении данной работы, производилось нагружение образца и в каких точках поперечно-

- го сечения измерялись напряжения?
25. С помощью какого прибора измерялись деформации (напряжения) при выполнении настоящей лабораторной работы? Приведите его основные технические данные.
  26. Объясните принцип измерения деформаций с помощью тензодатчиков омического сопротивления.
  27. Нарисуйте схему тензодатчика омического сопротивления и укажите его элементы.
  28. Почему при  $N=0$ , нарушается физический смысл постановки задачи?

### **Список рекомендованной литературы**

#### **Основная литература**

1. В.И. Феодосьев, Сопротивление материалов: Учеб. для вузов./ М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 592 с.
2. Костенко Н.А. Сопротивление материалов: Учеб. пособие / Н.А. Костенко, С.В. Балясникова, Ю.Э. Волошановская и др. – М.: Высш. шк., 2000. – 430 с.
3. Александров, А.В. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов/ А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – М.: Высш. шк., 1995. – 560 с.

#### **Дополнительная литература**

1. Багмутов, В.П. Сопротивление материалов: Учебное пособие Часть 2./ В.П. Багмутов, И.Н. Захаров, Н.Г. Неумония, А.А. Поливанов: ВолгГТУ РПК «Политехник». – Волгоград, 2007 – 116 с.
2. Гурьев, А.В. Вопросы стандартизации в курсе "Сопротивление материалов"/ А.В. Гурьев, З.П. Журкина: ВолгПИ. - Волгоград, 1985, - 16 с.