ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ИССЛЕДОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Методические указания к лабораторной работе

Изложена методика экспериментального и аналитического определения перемещений сечения в пространственном ломаном брусе. Для аналитического расчёта используется способ Максвелла-Мора. Методические указания предназначены для выполнения лабораторной работы студентами, изучающими курс «Сопротивление материалов».

Цель работы: экспериментальная проверка теоретической формулы для определения перемещений в упругой системе энергетическим методом по способу Максвелла-Мора.

1. Постановка задачи. Программа исследования

Умение вычислять перемещения различных сечений конструкций необходимо во многих случаях. Это – оценка жесткости конструкции при статическом нагружении, исследование колебаний упругих систем, расчет конструкций при ударном приложении нагрузок. На основе определения деформаций разработаны методы определения опорных реакций и внутренних силовых факторов в статически неопределимых системах.

Перемещения в равновесных статически нагруженных упругих системах довольно просто определить с использованием энергетического метода [1, 2]. Этот метод является универсальным. С его помощью можно вычислять перемещения не только в простых конструкциях типа стержень, вал, балка, но и в сложных, типа плоских и пространственных рам, пространственных ломаных брусьев. Рассчитываемая конструкция может быть загружена любой системой внешних сил, а геометрическая ось – иметь прямолинейную или изогнутую форму.

Энергетический метод базируется на двух принципах: начале возможных перемещений и законе сохранения энергии. Применительно к упругим системам принцип «начало возможных перемещений» формулируется так: *если система находится в равновесии под действием приложенной нагрузки, то сумма работ внешних и внутренних сил на возможных бесконечно малых перемещениях точки системы равна нулю*. Закон сохранения энергии для таких систем при статическом приложении нагрузки отражает *равенство потенциальной энергии упругой деформации, накапливаемой в деформируемом теле, и работы, совершаемой внешними силами на его деформирование.*

На основе последнего принципа разработан широко применяемый в инженерной практике способ Максвелла-Мора. Разработан он Д. К. Максвеллом в 1864 г., а в расчетную практику введен О. Мором в 1874 г. Метод является разновидностью теоремы А. Кастильяно*, согласно которой *частная производная от потенциальной энергии U деформации тела по какой-либо внешней силе Ф равна перемещению δ точки приложения этой силы по направлению ее действия*

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial \Phi}. \qquad (1)$$

В настоящей лабораторной работе выполняется экспериментальная проверка теоретически разработанного энергетического метода определения перемещений. Поставленная задача решается двумя путями:

определением перемещения *непосредственным замером* с помощью измерительного инструмента на лабораторной установке;

теоретическим расчетом по способу Максвелла-Мора в той же точке и том же направлении.

2. Оборудование, приборы

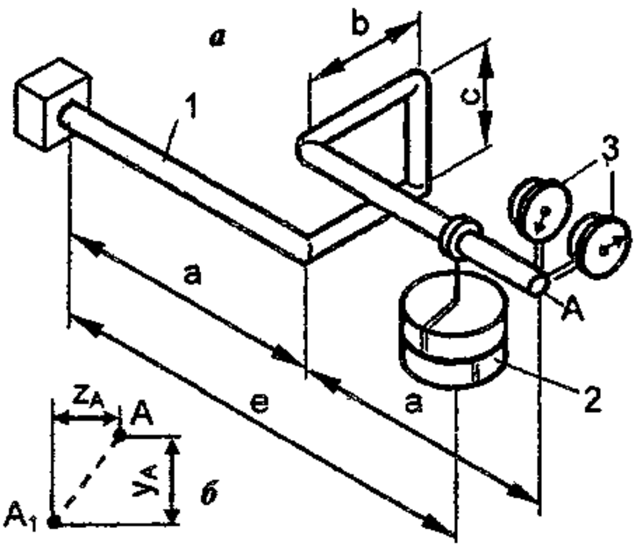

Рис. 1. Вид (а) испытательной установки и схема (б) измерения составляющих перемещения свободного конца А образца

Испытуемый образец 1 представляет собой пространственный ломаный брус постоянного по длине поперечного сечения. Один из концов бруса защемлен. Нагружение бруса осуществляется сосредоточенной силой посредством грузов 2, уложенных на каретке, положение которой можно изменять. Перемещение свободного конца А бруса регистрируется двумя индикаторами 3 часового типа, один из которых измеряет горизонтальную составляющую перемещения z_A, а другой – вертикальную y_A (ось x – продольная) (рис.1, табл.1).

---

* Подробнее об упомянутых учёных см. [2]

Таблица 1

Основные данные испытательной установки

Длины участков	a, мм	325
	b, мм	200
	c, мм	150
	e, мм	(задается преподавателем)
Поперечное сечение – кольцо	Наружный диаметр D, мм	26
	Внутренний диаметр d, мм	20

3. Экспериментальное решение задачи

Перед началом работы необходимо определить величину допускаемой нагрузки [F], которую можно приложить к брусу без опасения вызвать в его материале необратимые изменения. Напомним, что в расчётах на прочность элементов конструкций из пластичных материалов в качестве предельного напряжения принимают предел текучести, а при вычислении допускаемого напряжения рекомендуется коэффициент запаса по текучести в диапазоне $n_т = 2{,}5 - 3{,}5$ (с учетом возможного динамического приложения силы). Брус выполнен из стали 45 в нормализованном состоянии, предел текучести $\sigma_т = 380$ МПа. Принимая число ступеней нагружения $n = 3–4$, установить вес груза для нагружения на одну ступень $\Delta F = [F]/n$.

Рекомендуется следующий порядок проведения эксперимента:

1. Установить каретку с гиревым подвесом в положение, определяемое заданным расстоянием «е»;
2. Записать начальные показания индикатора для регистрации вертикальной или горизонтальной составляющей перемещения в соответствии с индивидуальным заданием;
3. Произвести ступенчатое нагружение образца принятым значением силы ΔF, записывая показания индикатора на каждой ступени нагружения;
4. Установку разгрузить;

5. Найти составляющие перемещения в заданном направлении $(\Delta y_A)_{средн}$ и $(\Delta z_A)_{средн}$, вычисляя разности показаний индикатора на каждой ступени нагружения;
6. Результаты эксперимента занести в табл. 2.

Таблица 2

Показания индикаторов при определении перемещений

Нагрузка F, Н	Отсчеты по индикаторам и приращения отсчетов на каждую ступень нагружения, мм			
	y_A	Δy_A	z_A	Δz_A
0				
$1\Delta F =$				
$2\Delta F =$				
$3\Delta F =$				
$4\Delta F =$				

$(\Delta F)_{средн}=$ $(\Delta y_A)_{средн}=$ $(\Delta z_A)_{средн}=$

4. Теоретическое решение задачи

По способу Максвелла-Мора упругая система рассматривается в *двух* состояниях: *действительное (или грузовое)* – нагруженной всеми внешними силами, *фиктивное (или единичное)* – нагруженной только единичным обобщенным силовым фактором, соответствующим искомому перемещению. Соответствие должно быть по *трем* пунктам: а) разновидности прикладываемого силового фактора; б) точке его приложения; в) направлению действия. Напомним, линейному перемещению соответствует сосредоточенная сила ($F_1 = 1$), угловому – момент (пара сил $M_1 = 1$). Единичный силовой фактор (в любом случае – величина безразмерная) прикладывается в точку, перемещение которой требуется найти. Направление единичного силового фактора (силы или момента) соответствует направлению искомого перемещения.

В общем случае число слагаемых интеграла Максвелла-Мора для определения перемещения δ равно числу видов внутренних усилий: трем силам и трем моментам. Интеграл Максвелла-Мора записывается так:

$$\delta = \sum_s \int \frac{M_z M_{1z}}{EI_z} ds + \sum_s \int \frac{M_y M_{1y}}{EI_y} ds + \sum_s \int \frac{T T_1}{GI_к} ds + \sum_s \int \frac{N N_1}{EA} ds + \sum_s \int \frac{Q_z Q_{1z}}{GA} ds + \sum_s \int \frac{Q_y Q_{1y}}{GA} ds, \quad (2)$$

где M_z, M_y, T – изгибающие и крутящий моменты в произвольном поперечном сечении каждого участка системы, возникающие от внешних нагрузок, действующих на упругую систему только до этого сечения рассматриваемого участка [3];

N, Q_z, Q_y – осевое и поперечные внутренние усилия в том же сечении каждого участка;

M_{1z}, M_{1y}, T_1, N_1, Q_{1z}, Q_{1y}, – внутренние усилия, вызванные действием единичного силового фактора в тех же произвольных поперечных сечениях;

I_z, I_y, $I_к$, A – геометрические характеристики поперечного сечения бруса ($I_к$ – момент инерции при кручении; для сечения в форме круга $I_к = I_p$);

E, G – модули нормальной и касательной упругости материала бруса;

s – протяженность участка бруса, в пределах которого производится интегрирование; в общем произвольном случае *s* – длина дуги; в брусе с прямолинейной осью в качестве *s* принимают длину участка *l*, а протяженность элементарного участка $ds \cong dx$.

В практических расчетах балок, пространственных и плоских рам последними тремя слагаемыми приведенной формулы обычно пренебрегают, поскольку их вклад в общую сумму на два-три порядка меньше, чем от первых трех. Применительно к настоящей лабораторной работе интеграл Максвелла-Мора используется в виде

$$\delta = \sum_l \int \frac{M_z\, M_{1z}}{E\, I_z} dx + \sum_l \int \frac{M_y\, M_{1y}}{E\, I_y} dx + \sum_l \int \frac{T\, T_1}{G\, I_p} dx, \quad (3)$$

где суммирование (Σ) производится по количеству участков. Напомним, границей участка может служить точка приложения силового фактора, изменение направления геометрической оси, изменение формы или размеров поперечного сечения. Для аналитического определения перемещений в произвольной упругой системе рекомендуется следующий порядок.

1. Нарисовать действительную (грузовую) систему и загрузить ее *всеми* внешними нагрузками (рис. 2, а). Нарисовать фиктивную (единичную) систему,

имеющую такие же размеры, форму и способы закрепления, как и действительная. Нагрузить фиктивную систему единичным силовым фактором (*одним*), соответствующим искомому перемещению (пример нагружения для определения горизонтального перемещения показан на рис. 2, б).

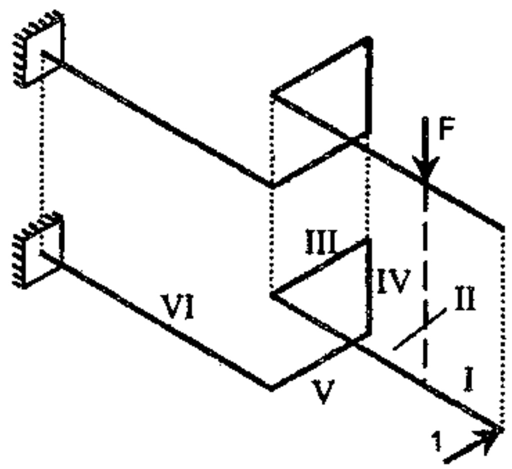

Рис. 2. Схема нагружения грузовой (а) и единичной (б) систем и разбиения их на участки

2. Определить внутренние усилия на всех участках грузовой системы; результат занести в табл. 3.
3. Определить внутренние усилия на всех участках единичной системы; результат занести в табл. 3.
4. Значения внутренних усилий подставить в интеграл Максвелла-Мора и решить его.

При выполнении третьего и четвёртого пунктов, необходимо учитывать, что ось x – продольная на всех участках. Момент относительно оси *x* является крутящим; относительно осей *y* и *z* – изгибающим. Знаменатели в интеграле Максвелла-Мора *соответствуют* разновидностям внутренних усилий и являются жесткостью при изгибе

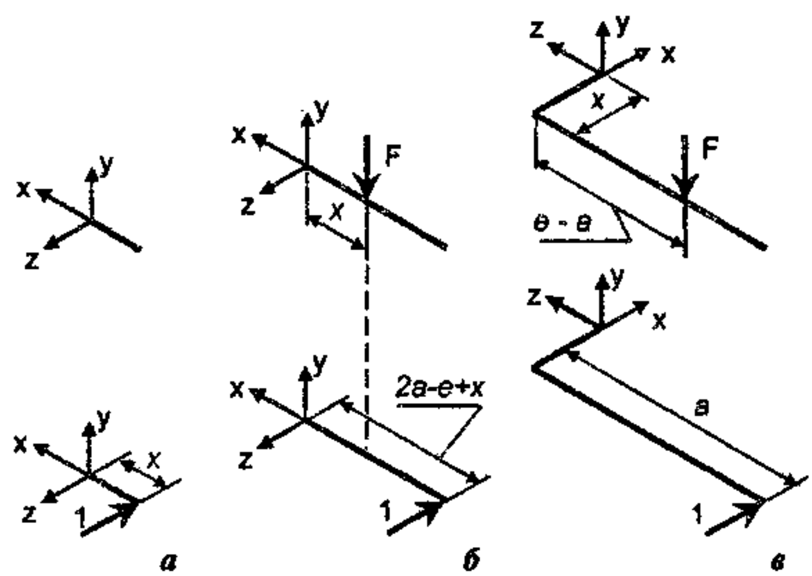

Рис. 3. Пример схем для определения внутренних усилий на трех участках ломаного бруса

и кручении относительно соответствующих осей. Определяем внутренние усилия, размещая начало текущей системы координат в центре тяжести произвольного сечения каждого участка, двигаясь каждый раз от свободного конца бруса в сторону защемления.

В качестве примера покажем, как определять внутренние усилия на первых трех участках ломаного бруса. **Первый участок** (рис. 3, а). В грузовой системе в пределах участка внешних нагрузок нет. Следовательно, и внутренние усилия равны нулю. В единичной системе внешняя сила, равная 1, пересекает ось x и параллельна оси z, следовательно, $M_{1x} = T_1 = 0$; $M_{1z} = 0$. Отличным от нуля является лишь $M_{1y} = 1 \cdot x_I$.

Второй участок (рис. 3, б). В грузовой системе $M_x = T = 0$, т. к. сила F пересекает ось x; $M_y = 0$ поскольку ось y и сила F параллельны. Изгибающий момент относительно оси z: $M_z = -F \cdot x_{II}$. В единичной системе $M_{1x} = T_1 = 0$; $M_{1z} = 0$. Отличным от нуля является $M_{1y} = 1 \cdot (e - a + x_{II})$.

Третий участок (рис. 3, в). В грузовой системе отличными от нуля являются крутящий момент $M_x = T = F \cdot (e - a)$ и изгибающий момент в вертикальной плоскости $M_z = -F \cdot x_{III}$. В единичной системе только один момент отличен от нуля – в горизонтальной плоскости $M_{1y} = 1 \cdot a$.

Замечание о знаках. Знаки моментов устанавливаются в соответствии с правилами, принятыми в сопротивлении материалов, однако для решения поставленной задачи не имеет значение, какое именно правило принято. Важно, чтобы оно для грузовой и единичной систем было единым хотя бы в пределах участка, поскольку под интегралом Максвелла-Мора произведение моментов.

Таблица 3

Внутренние усилия на участках бруса
от внешней нагрузки и единичной силы

Внутр. усилия	I участок $\le x_I \le$	II участок $\le x_{II} \le$	III участок $\le x_{III} \le$	IV участок $\le x_{IV} \le$	V участок $\le x_V \le$	VI участок $\le x_{VI} \le$
$M_x = T$						
M_y						
M_z						
$M_{1x} = T_1$						
M_{1y}						
M_{1z}						

Для удобства вычислений интеграла Максвелла-Мора полезно воспользоваться связью между геометрическими характеристиками $I_p = 2 \cdot I_{oc}$ и упругими постоянными (принимая для стали $\mu = 0{,}25$)

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{E}{2(1+0{,}25)} = 0{,}4\ E.$$

Тогда получим $G \cdot I_p = 0{,}8\ E \cdot I_{oc}$.

5. Применение способа (правила) Верещагина

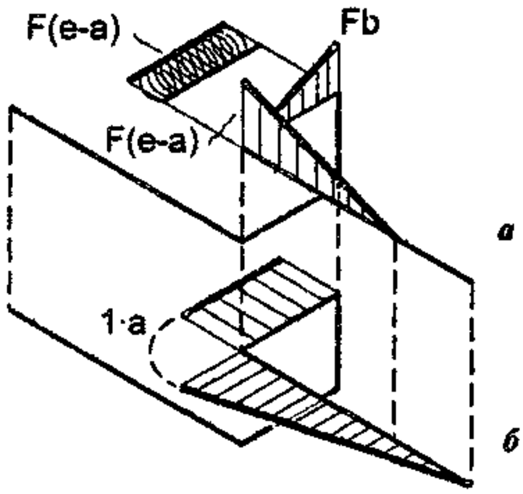

Рис. 4. Эпюры изгибающих и крутящих моментов для грузовой (а) и единичной (б) систем

Интеграл Максвелла-Мора можно решить как традиционным путём, так и графическим способом (предложен А. К. Верещагиным*). Способ решения интеграла графическим путем заключается в перемножении *площади Ω эпюры* изгибающего или крутящего момента, построенной для действительной системы на *ординату M_{1C} эпюры* фиктивной системы, взятую под центром тяжести площади эпюры действительной системы

$$\delta = \Sigma \frac{\Omega_M \cdot M_{1C}}{E \cdot I_{oc}} + \Sigma \frac{\Omega_T \cdot T_{1C}}{G \cdot I_p}. \qquad (4)$$

Эффект от применения способа особенно ощутим для систем, состоящих из прямолинейных элементов постоянной жесткости. Именно этими свойствами обладает рассматриваемый ломаный брус. Для таких систем удобно строить эпюры по характерным сечениям [4]. В качестве примера на рис. 4 приведены эпюры для первых трех участков. Эпюры изгибающих моментов построены на растянутой части бруса в плоскостях действия моментов; эпюра крутящего момента показана спиральной линией. Для приведенного на рис. 4 примера оба слагаемых формулы (4) равны нулю, поскольку эпюры изгибающих моментов в разных плоскостях, а крутящих моментов в единичной системе на рассматриваемых участках нет.

6. Выводы

Результаты аналитического и экспериментального определения составляющих перемещения свободного конца ломаного бруса занести в табл. 4. Сопоставить эти результаты и найти отклонение в процентах расчетных значений по сравнению с *экспериментальным*

$$\eta = \frac{|\delta_{A,э} - \delta_{A,т}|}{\delta_{A,э}} \cdot 100, \qquad (5)$$

где индекс «т» означает теоретический расчет, а «э» – экспериментальные значения.

Сделать вывод о возможности применения энергетического метода расчета перемещений.

* О Верещагине А. К. см. [2]

Таблица 4

Результаты определения перемещения свободного конца ломаного бруса

Горизонтальная составляющая перемещения z_A, мм			Вертикальная составляющая перемещения y_A, мм		
Эксперим.	Теоретич.	Расхождение	Эксперим.	Теоретич.	Расхождение

7. Правила по технике безопасности

1. Соблюдать осторожность при установке грузов на гиревой подвес. Падение грузов может привести к травме.
2. Грузы хранятся в специально отведенном месте экспериментальной установки. Запрещается класть грузы на другие места экспериментальной установки, столы, стулья.
3. Допускается работать на установке только одному экспериментатору.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов.-М.: Наука, 1986. – 512 с.
2. Багмутов В. П., Паршев С. Н. Энергетические методы решения упругих систем: Учеб. пособие/ ВолгГТУ, Волгоград, 1997. – 41 с.
3. Алхименков Т. Б. Внутренние усилия: Методические указания к изучению курса «Сопротивление материалов» (контрольно-обучающий модуль 4)/ ВолгПИ, Волгоград, 1988. – 28 с.
4. Водопьянов В. И., Савкин А. Н., Журкина З. П. Эпюры внутренних силовых факторов (подготовка к тестированию): Учебное пособие/ ВолгГТУ, Волгоград, 2000. – 53 с.

Вопросы для самопроверки

1. Почему энергетический метод определения перемещений является наиболее общим?
2. Запишите интеграл Максвелла-Мора и объясните смысл всех его элементов.
3. Объясните понятие «обобщенная сила», используемое при определении перемещений энергетическим методом.
4. Объясните понятие «обобщенное перемещение». Приведите примеры обобщенной силы и обобщенного перемещения.
5. По каким критериям устанавливаются границы участков бруса, рамы?
6. Какие состояния упругой системы необходимо рассмотреть для определения перемещений способом Максвелла-Мора?

7. Одинаковое ли количество участков должна иметь упругая система в действительном (грузовом) и фиктивном (единичном) состояниях при вычислении перемещений по способу Максвелла-Мора? Если нет, то в каком состоянии больше? Любой вариант ответа объяснить.
8. Какие «обобщенные единичные силовые факторы» применяют при определении линейных и угловых перемещений способом Максвелла-Мора?
9. Укажите основные этапы вычисления перемещений по способу Максвелла-Мора (приведите необходимые схемы). С какой целью в инженерной практике вычисляют перемещения в упругих системах?
10. Какие внутренние усилия учитываются в общем случае определения перемещений по способу Максвелла-Мора?
11. Какие внутренние усилия достаточно учитывать при определении перемещений длинных брусьев?
12. Какие геометрические характеристики необходимо учитывать при определении перемещений способом Максвелла-Мора в общем случае?
13. Влияют ли упругие характеристики материала на величину перемещений?
14. Учитываются ли прочностные свойства материала при определении перемещений методом Максвелла-Мора?
15. Что означает знак «минус», полученный в результате расчета перемещений?
16. Перечислите способы определения перемещений, разработанные на основе энергетического метода.
17. Чем отличается методика определения перемещений с помощью теоремы Кастильяно от способа фиктивной нулевой силы?
18. В каких случаях для определения перемещений способ Верещагина целесообразно предпочесть остальным?
19. В чем отличие способа определения перемещений, предложенных Максвеллом и Мором, от способа, основанном на применении теоремы Кастильяно?
20. Требуется определить перемещение произвольного сечения внутри пролета балки. Какой из способов для решения этой задачи применить целесообразно, каким способам эта задача не под силу?

Примечания:

1. Большая часть приведенных выше вопросов используется преподавателем при отчете настоящей лабораторной работы.
2. Если затрудняетесь ответить на вопросы, смотрите литературные источники [1, 2].