

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

Лабораторный практикум является составной частью общего курса сопротивления материалов. Он содержит основные сведения о принципах работы испытательных машин и измерительной аппаратуры, используемых при изучении физико-механических свойств материалов и напряженно-деформируемого состояния элементов инженерных конструкций. Лабораторный практикум содержит описание 9 лабораторных работ, связанных с основными разделами курса сопротивления материалов. В каждой лабораторной работе приводится ее теоретическое обоснование, указывается методика постановки и проведения опыта, типы используемых машин и измерительных приборов и порядок обработки результатов опыта.

Лабораторный практикум предназначен для студентов строительных вузов всех специальностей.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение принципов и методов расчета элементов сооружения на прочность, жесткость и устойчивость составляет сущность науки сопротивления материалов. Курс сопротивления материалов тесно связан с курсами теоретической механики, физики и математики.

В сопротивлении материалов, в отличие от теоретической механики, учитываются физические свойства материала. Чтобы произвести расчет на прочность, жесткость и устойчивость деталей конструкций или сооружения необходимо знать физико-механические свойства материала, из которого изготовлен каждый элемент сооружения. Физико-механические характеристики любого строительного материала определяются опытным путем.

Теоретические выводы и положения курса сопротивления материалов базируются на гипотезах, значительно упрощающих решение поставленных задач. Прежде чем использовать на практике полученные теоретическим путем формулы, необходимо проверить их достоверность с помощью эксперимента.

Таким образом, в курс сопротивления материалов в равной степени входят как теоретические выводы, так и экспериментальные данные.

При изучении курса сопротивления материалов проводятся лабораторные работы, целью которых являются:

- 1) определение физико-механических характеристик строительных материалов;
- 2) проверка выводов теории (подтверждение теоретических положений и выводов);
- 3) обучение основам методики постановки и проведения экспериментальных исследований, изучение принципа действия испытательных машин и приборов.

Данный лабораторный практикум по сопротивлению материалов написан в соответствии с учебной программой для студентов строительных специальностей вузов. За основу принята программа специальности 270102 «Промышленное и гражданское строительство».

Контрольные вопросы.

1. Какие системы называются статически неопределимыми?
2. Что называется степенью статической неопределимости системы?
3. Какая система называется геометрически изменяемой?
4. Что представляет собой основная система и как она выбирается?
5. Что выражает каждое из канонических уравнений?
6. Каков физический смысл произведений $X_1\delta_{11}$, $X_2\delta_{12}$?

Список литературы

1. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.:АСВ, 1995. – 568 стр. с ил.
2. Варданян Г.С., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов (с основами строительной механики). – М.:ИНФРА-М, 2003. – 480 стр. с ил.
3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1975.
4. Беляев Н.М. Лабораторные работы по сопротивлению материалов. – М.: ГИТТЛ, 1954.

Содержание

Предисловие	3
I. Испытательные машины	4
II. Приборы для измерения перемещений и деформаций	16
III. Методика выполнения экспериментов и обработка их результатов ...	20
Лабораторная работа № 1. Определение модуля упругости и коэффициента Пуассона некоторых конструкционных Материалов	24
Лабораторная работа № 2. Испытание образца из малоуглеродистой стали на разрыв	31
Лабораторная работа № 3. Кручение стержня круглого сечения	38
Лабораторная работа № 4. Определение напряжений в балке при изгибе	44
Лабораторная работа № 5. Определение прогибов и углов поворота изгибаемой балки	54
Лабораторная работа № 6. Испытание образца на внецентренное сжатие	59
Лабораторная работа № 7. Определение перемещений при косом изгибе	64
Лабораторная работа № 8. Определение критической силы для гибкого сжатого стержня	69
Лабораторная работа № 12. Экспериментальное определение опорной реакции в статически неопределимой раме	75
Список литературы	79

II. ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

Для измерения перемещений порядка 0-10 мм при лабораторных испытаниях образцов материалов и элементов конструкций наибольшее распространение получили индикаторы часового типа.

1. Устройство индикатора часового типа

Принципиальная конструктивная схема индикатора приведена на рис. 11.

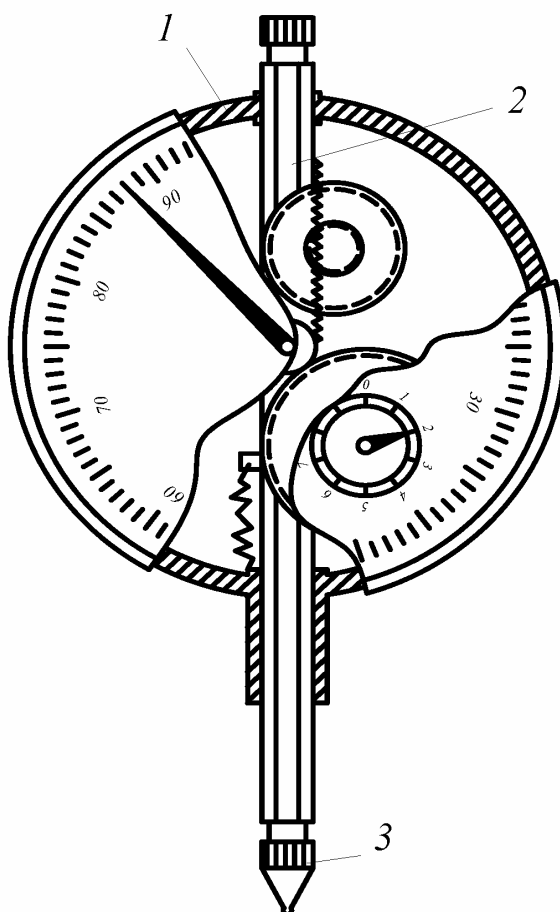


Рис. 11. Устройство индикатора часового типа: 1 – корпус; 2 – зубчатая рейка; 3 – наконечник.

Прибор состоит из корпуса 1, в котором имеются направляющие для подвижной зубчатой рейки 2. Зубчатая рейка при помощи высокоточной зубчатой передачи соединяется с осями большой и малой стрелок. Зубчатая

передача подобрана так, что малая стрелка показывает миллиметры, а большая – доли миллиметра при передвижении зубчатой рейки. На одном конце зубчатая рейка снабжена сменным наконечником 3. Наибольшее распространение получили индикаторы часового типа с ценой деления шкалы большой стрелки 0,01 мм. В научных экспериментах, требующих большой точности при определении перемещений, применяются индикаторы с ценой деления 0,001 мм (1 микрон). Для измерения перемещений корпус индикатора укрепляется на какой-либо неподвижной основе, а наконечник 3 упирается в заданную точку испытываемой конструкции.

Измерение деформаций на поверхности исследуемых конструкций осуществляется *тензомерами* различного типа: электрическими, оптическими, магнитными и др. Наиболее распространенными в практике экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния являются электрические тензомеры – *тензорезисторы (тензодатчики)*.

В основу работы тензорезистора положена зависимость омического сопротивления R проводника от его длины l , удельного омического сопротивления ρ и площади поперечного сечения F .

$$R = \rho \frac{l}{F}.$$

Для измерения относительных деформаций обычно используются различного типа тензорезисторы, среди которых наиболее распространены проволочные тензорезисторы.

2. Устройство и принцип работы проволочного тензорезистора

Устройство проволочного тензорезистора показано на рис. 12. На бумажной основе (подложке) 1 с помощью специального клея укрепляется тонкая проволока 2, к концам которой припаяны выводы 3.

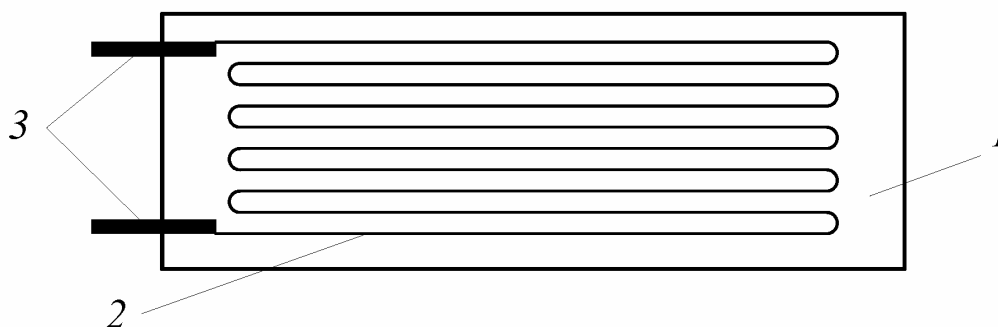


Рис. 12. Устройство проволочного тензорезистора: 1 – бумажная основа (подложка); 2 – проволока; 3 – выводы.

Проволока выполнена из сплава с высоким удельным сопротивлением (обычно из константана), имеет диаметр 0,015-0,05 мм и укладывается на

бумажную подложку петлеобразно. При этом длина петли l_0 является рабочей базой тензорезистора. Выводные концы 3 обычно выполняются из медной луженой проволоки диаметром 0,2-0,3 мм. Промышленностью выпускаются тензорезисторы с базой 3, 5, 10, 15, 20, 50 и 100 мм сопротивлением от 50 до 400 Ом.

Наряду с описанным проволочным тензорезистором существуют так называемые фольговые или пленочные тензорезисторы. В них на подложку из специального клея укладывают металлическую фольгу или пленку, после чего протравливают петли, как и в проволочном тензорезисторе.

При испытаниях образца или конструкции последние деформируются под нагрузкой и передают эти деформации наклеенным на них тензорезисторам. При этом проволочные петли тензорезисторов удлиняются или укорачиваются в соответствии с деформациями в точке измерения. Изменение длины проводника, как известно, приводит к изменению и его сопротивления. Это изменение сопротивления прямо пропорционально деформации образца и связано с последней соотношением

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Delta R}{R_0},$$

где ε – относительная деформация;

l_0 – база тензорезистора;

Δl – абсолютное удлинение базы;

R_0 – начальное сопротивление тензорезистора;

ΔR – абсолютное приращение сопротивления;

k – коэффициент тензочувствительности тензорезистора (для рассмотренных типов $k = 1,8 - 2,2$).

Изменение сопротивления проводника при деформировании положено в основу работы тензорезистора.

Относительное изменение сопротивления обычно очень мало, поэтому измерять его можно только с помощью специально приспособленных мостовых схем. Пример простейшей мостовой схемы приведен на рис. 13.

Четыре сопротивления соединены между собой в электрическую цепь, образующую замкнутый четырехугольник. Линии, соединяющие точки a, b или c, d , называются диагоналями моста. В одну из диагоналей (ab) включен источник питания $ИП$, в другую (cd) – измерительный прибор (ИЗП). Особенностью мостовой схемы является отсутствие тока в диагонали cd при определенном соотношении между сопротивлениями моста. При обозначениях рис. 13 это соотношение записывается следующим образом:

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}.$$

Нарушение этого соотношения, например, за счет небольшого изменения одного из сопротивлений моста приводит к появлению тока в диагонали cd , пропорционального относительному изменению сопротивления. Если вместо одного из сопротивлений моста, например R_1 , включить тензорезистор T_p , то ток в диагонали моста будет пропорционален измеряемой деформации.

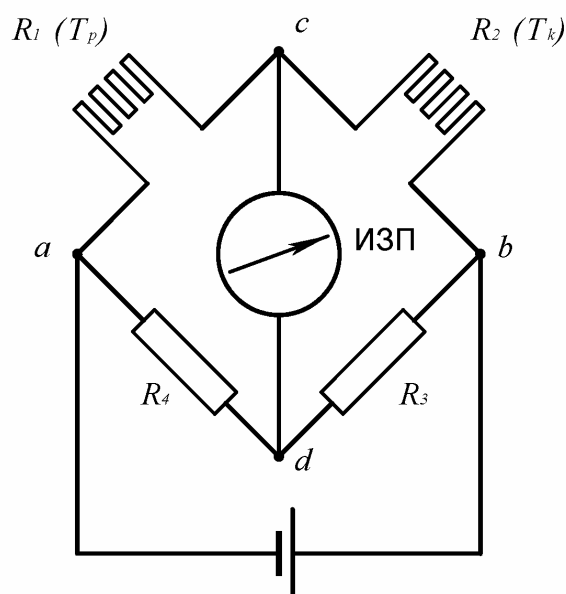


Рис. 13. Схема измерительного моста.

Описанные выше проволочные тензорезисторы чувствительны и к изменению температуры, а поэтому во время опыта может возникнуть температурная погрешность. Чтобы избежать этого, используют схему с компенсационным тензорезистором T_k , который наклеивается на образец из такого же материала, что и испытуемый, и размещается рядом с ним. Компенсационный тензорезистор является нерабочим и включается в мостовую схему вместо сопротивления R_2 , образуя с рабочим тензорезистором T_p так называемый полумост.

В практических измерениях второй полумост, образуемый сопротивлениями R_3 и R_4 с источником питания *ИП*, монтируется внутри измерительного прибора (ИЗП).

Основными составными частями измерительного прибора являются: электронный усилитель для усиления слабого тока в диагонали моста и преобразования его в напряжение, обеспечивающее работу исполнительного механизма системы автоматического уравнивания; система автоматического уравнивания моста; система индикации показаний (цифровая или стрелочная).

Промышленностью выпускаются различные типы измерительных тензометрических приборов со стрелочной и цифровой индикацией. В лаборатории применяется прибор со стрелочной индикацией показаний типа АИД-2М (автоматический измеритель деформации второй модификации) и приборы с цифровой индикацией показаний типа ЦТМ-3, ЦТМ-5 (цифровой тензометрический мост), а также ИДЦ-1 (измеритель деформации цифровой). Все указанные приборы рассчитаны на тензорезисторы со средним коэффициентом тензочувствительности $k = 2$ и имеют цену единицы отсчета

(цену единицы дискретности) по относительной деформации $1 \cdot 10^{-5}$. В комплект приборов обычно входит блок переключателей для последовательного снятия отсчетов с группы тензорезисторов, наклеенных на испытуемый объект.

Ш. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ОБРАБОТКА ИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Методика выполнения различных лабораторных работ имеет много общих положений, которые целесообразно изложить отдельным разделом, чтобы не повторять в каждой работе. Это в первую очередь относится к испытаниям материалов и элементов конструкций в упругой стадии, а также к математической обработке результатов измерений.

Методика выполнения лабораторных работ

Каждая лабораторная работа включает обычно три основных компонента:

- 1) испытуемый образец материала или элемент конструкции;
- 2) испытательную машину или приспособление для создания того или иного вида нагрузки;
- 3) измерительный комплекс (приборы для измерения нагрузки, деформаций, перемещений и т.д.).

Практическому выполнению лабораторной работы должно предшествовать теоретическое осмысление ее по всем трем указанным компонентам. Нужно ознакомиться с особенностями испытуемого объекта (образца материала, элемента конструкции) – его размерами, материалом, из которого он изготовлен, условиями закрепления и нагружения, параметрами, измеряемыми в процессе нагружения в определенных точках. Нужно также ознакомиться с испытательной машиной, которая используется в данной работе – принципом ее работы, техническими характеристиками, конструктивными особенностями. Затем нужно ознакомиться с измерительными приборами – принципом их действия, пределами измерений, ценой единицы приращения показаний прибора.

После такого теоретического осмысления работы можно приступать к ее выполнению. Общий порядок выполнения лабораторных работ при определении физических характеристик материалов или проверке полученных теоретическим путем формул, при условии линейно-упругой работы материала испытуемого объекта, бывает следующим:

1. Испытуемый объект устанавливается на испытательной машине и оборудуется измерительными приборами.
2. Включается испытательная машина и дается небольшая начальная нагрузка на испытуемый объект для устранения возможных люфтов в захватах (спорах) машины. После этого регистрируются показания всех приборов, установленных на объекте, которые принимаются за начальные (при нулевой нагрузке).
3. Нагрузка увеличивается равными ступенями до некоторой максимальной величины, и на каждой ступени регистрируются показания приборов.

4. Производится плавная разгрузка объекта до начального значения (принятого за нулевое) и при этом проверяются показания всех приборов.

5. Испытуемый объект полностью разгружается, испытательная машина выключается.

Если лабораторная работа проводится с целью проверки какой-либо теоретической зависимости, то степень приращения нагрузки в опыте принимается обычно за величину расчетной внешней силы. Тогда по изменению измеряемых параметров на степень нагрузки можно судить о линейной работе материала испытуемого объекта, стабильности работы измерительных приборов. С другой стороны, в пределах линейной работы материала каждую степень нагрузки можно рассматривать как повторный опыт и при достаточно большом числе ступеней использовать полученные данные измерений для обработки их методами математической статистики.

Математическая обработка результатов измерений

При выполнении лабораторной работы необходимо выполнять измерения, связанные с определением величины задаваемой нагрузки и каких-либо параметров испытуемого объекта (перемещений, деформаций и др.). При всяком измерении имеют место ошибки, причина которых может быть весьма разнообразна (систематические, случайные, грубые). В результате получаем только некоторое приближенное значение искомой величины.

Систематическими называются такие ошибки, которые при данных условиях проведения измерения имеют вполне определенное значение (например, ошибки измерительных приборов).

Случайными называются такие ошибки, которые являются результатом взаимодействия большого числа незначительных в отдельности факторов и имеют в каждом измерении различные значения.

Грубыми называются ошибки, вследствие которых получают резко отличающийся от остальных результат. Обычно такие ошибки возникают из-за нарушений условий опыта.

В дальнейшем будем полагать, что благодаря тщательной подготовке при проведении опыта нам удалось избежать систематических и грубых ошибок. Случайные ошибки необходимо оценить для определения с заданной точностью истинного значения искомой величины.

Принимая за действительное значение измеряемой величины при равноточном измерении среднюю арифметическую из всех результатов измерений, можно охарактеризовать точность одного измерения с помощью средней арифметической абсолютных величин значений ошибок:

$$\delta = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n},$$

где n - число измерений;

x - численное значение отдельных измерений;

\bar{x} - средняя арифметическая результатов измерений.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}.$$

За меру точности соответствия принятого среднего арифметического значения истинному значению измеряемой величины принимают среднюю ошибку сводного результата измерения, вычисляемую по формуле:

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

Если в качестве меры точности одного измерения принять не среднюю арифметическую абсолютных значений ошибок (средняя ошибка), а среднюю квадратическую из ошибок измерений, т.е.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n-1}},$$

то среднюю квадратическую ошибку можно вычислить по формуле:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

За измеряемую величину принимается средняя арифметическая всех измерений (если они равноточны). Использование отклонений результатов измерений (x) от средней из них (\bar{x}), называемых в теории ошибок "кажущимися ошибками" ($x - \bar{x}$), позволяет произвести оценку точности соответствия средней арифметической неизвестному истинному значению измеряемой величины (A). Для этой цели использует удвоенную или утроенную среднюю квадратическую ошибку сводного результата измерений и получают:

$$A = \bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}}.$$

Рассмотрим вышеописанное на примере. Пусть требуется определить деформацию образца при заданной нагрузке при условии линейно-упругой его работы. Положим величину заданной нагрузки 50 кН. Деформации будем измерять с помощью двух проволочных тензорезисторов, наклеенных на образец в сходственных точках. Показания будем регистрировать прибором, имеющим цену единицы приращения измеряемой величины (относительной деформации) $k = 1 \cdot 10^{-5}$. Результаты опыта сведем в табл. 2.

Поскольку показания обоих тензорезисторов являются равноточными, их можно включить в общий ряд измерений и вычислить среднюю арифметическую результатов измерений на ступень нагрузки:

$$\bar{x} = \frac{13,8 + 13,9 + 14,0 + 14,1 + 14,1 + 14,2 + 14,2 + 14,3 + 14,4 + 14,5}{10} = 14,15.$$

Таблица 2

Степень нагрузки	Нагрузка, кН	Показания тензорезисторов			
		Т ₁		Т ₂	
		Отсчет по прибору	Приращение	Отсчет по прибору	Приращение
0	10	352,2		564,0	
1	60	366,0	13,8	578,2	14,2
2	110	379,9	13,9	592,4	14,2
3	160	393,9	14,0	606,7	14,3
4	210	408,0	14,1	621,1	14,4
5	260	422,1	14,1	635,6	14,5
0	10	352,2	69,9	564,0	71,6

Найдем ошибки измерения $(x - \bar{x})$:

$$\begin{aligned}
 13,8 - 14,15 &= -0,35, & 13,9 - 14,15 &= -0,25, \\
 14,0 - 14,15 &= -0,15, & 14,1 - 14,15 &= -0,05, \\
 14,1 - 14,15 &= -0,05, & 14,2 - 14,15 &= +0,05, \\
 14,2 - 14,15 &= +0,05, & 14,3 - 14,15 &= +0,15, \\
 14,4 - 14,15 &= +0,25, & 14,5 - 14,15 &= +0,35
 \end{aligned}$$

Средняя арифметическая ошибка

$$\delta = \frac{0,35 + 0,25 + 0,15 + 0,05 + \dots + 0,25 + 0,35}{10} = 0,17.$$

Тогда мера точности определения средней арифметической измеряемой величины \bar{x} составит:

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{0,17}{\sqrt{10}} = 0,054.$$

Значит, мерой точности соответствия 14,15 истинной величине является средняя ошибка, равная 0,054.

Найдем среднюю квадратическую ошибку:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{|-0,35|^2 + |-0,25|^2 + \dots + |0,25|^2 + |0,35|^2}{9}} = 0,215.$$

Вычислим среднюю квадратическую ошибку найденной средней арифметической, равной 14,15:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{0,215}{\sqrt{10}} = 0,068.$$

Определим теперь наиболее вероятные границы результатов измерения:

$$A = \bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}} = 14,15 \pm 3 \cdot 0,068 = 14,15 \pm 0,204.$$

Таким образом, в результате измерения величина относительной деформации на ступень нагрузки 50 кН составит:

$$\varepsilon = A \cdot C = (14,15 \pm 0,204) \cdot 10^{-5}.$$

Лабораторная работа № 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА НЕКОТОРЫХ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Цель работы: определение экспериментальным путем физических характеристик – модуля упругости и коэффициента Пуассона стали.

Общие сведения. Для определения модуля упругости и коэффициента Пуассона стали и дюралюминия производятся испытания на центральное растяжение образцов в виде полосы прямоугольного поперечного сечения.

Центральное растяжение и сжатие прямого стержня вызывается действием осевых нагрузок.

При центральном растяжении и сжатии прямого стержня в поперечных сечениях возникает одно внутреннее усилие – продольная сила N . Для определения продольной силы в сечении используется метод сечений.

Продольная сила в поперечном сечении равна сумме осевых нагрузок, приложенных к одной из частей стержня, и имеет размерность сосредоточенной силы (Н, кН и т.п.).

В процессе деформирования стержня при центральном растяжении и сжатии сечения, плоские и перпендикулярные к оси стержня до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к оси после деформации (*гипотеза плоских сечений*). На основании этой гипотезы при растяжении и сжатии длина всех продольных волокон стержня изменяется на одинаковую величину. Отсюда следует, что нормальные напряжения распределены по сечению равномерно и справедлива формула:

$$N = \sigma F. \quad (1.1)$$

Отсюда получаем

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (1.2)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня.

Размерность напряжения - кН/см², МПа и т.п.

При растяжении и сжатии стержня изменяются его длина и размеры поперечного сечения. Относительные деформации вдоль оси стержня называются продольными и обозначаются буквой ε , а в направлениях, перпендикулярных к оси, – поперечными ε' . Они являются безразмерными величинами.

Относительные поперечные и продольные деформации связаны между собой соотношением

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon. \quad (1.3)$$

Входящая в это соотношение величина ν называется коэффициентом Пуассона. Коэффициент Пуассона есть отношение абсолютных величин относительной поперечной деформации и относительной продольной деформации:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (1.4)$$

Для различных материалов коэффициент Пуассона различен. В пределах упругих деформаций он может принимать значения от 0 до 0,5. Для малоуглеродистой стали соответственно от 0,25 до 0,35.

Для большинства конструкционных материалов при малых деформациях между напряжениями и деформациями существует линейная зависимость, называемая *законом Гука*:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (1.5)$$

Входящая в закон Гука постоянная E называется модулем упругости материала. Модуль упругости E характеризует его жесткость и имеет размерность напряжения.

При центральном растяжении и сжатии прямого стержня поперечные сечения, оставаясь плоскими, получают осевые перемещения, определяемые по формуле:

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N}{EF} dx. \quad (1.6)$$

Удлинение и укорочение стержня длиной l равно разности осевых перемещений его концов $x = 0$ и $x = l$: $\Delta l = u(l) - u(0)$. Если начальное сечение $x = 0$ закреплено, то $u_0 = 0$ и

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EF} dx. \quad (1.7)$$

Для частного случая $EF = \text{const}$ и $N = \text{const}$ получим

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}. \quad (1.8)$$

Произведение EF называется *жесткостью стержня при растяжении и сжатии*. Чем больше эта величина, тем меньше удлинение (укорочение) стержня. Жесткость EF имеет размерность силы – Н, кН и т.п.

Для стержней с постоянной жесткостью EF и линейным законом изменения продольной силы N при определении Δl удобно использовать геометрический смысл определенного интеграла и привести формулу (1.7) к следующему виду:

$$\Delta l = \frac{1}{EF} \int_0^l N dx = \frac{1}{EF} \Omega_N, \quad (1.9)$$

где Ω_N - площадь эпюры N на рассматриваемом участке.

Необходимость определения перемещений и удлинений (укорочений) возникает при решении статически неопределимых задач.

Напомним, что задача называется статически неопределимой, если из уравнений равновесия нельзя определить опорные реакции и внутренние усилия в стержнях. Для решения таких задач необходимо составить дополнительные уравнения исходя из рассмотрения деформированного состояния стержня.

Расчеты на прочность стержней и других элементов конструкций составляют одну из основных задач сопротивления материалов. Существуют три метода расчета на прочность:

- 1) метод допускаемых напряжений;
- 2) метод предельных состояний;
- 3) метод разрушающих нагрузок.

При расчете на прочность строительных конструкций применяется *метод предельных состояний*.

В методе предельных состояний вводятся несколько коэффициентов надежности, основными из которых при расчетах на прочность являются:

- 1) γ_f - коэффициент надежности по нагрузке, $\gamma_f = 1,05 \div 1,4$;
- 2) γ_m - коэффициент надежности по материалу, $\gamma_m = 1,025 \div 1,15$;
- 3) γ_c - коэффициент условий работ, $\gamma_c = 0,75 \div 1,0$.

Условие прочности ставится для опасного сечения. *Сечение стержня, в котором действуют наибольшие напряжения, называется опасным сечением.*

Условие прочности стержня при растяжении и сжатии по методу предельных состояний имеет следующий вид:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq \gamma_c R. \quad (1.10)$$

С помощью условия прочности решаются следующие задачи:

- 1) проверка прочности;
- 2) подбор сечения;
- 3) определение несущей способности (грузоподъемности).

Для определения указанных физических величин (модуля упругости и коэффициента Пуассона) экспериментальным путем нужно при испытании образца определять на каждой ступени нагружения напряжения и относительные деформации (продольные и поперечные) в пределах линейно-упругой работы материала.

Для экспериментов со сталью и дюралюминием используются образцы прямоугольного сечения, предназначенные для испытания на растяжение (рис. 14,а). Для экспериментов с бетоном используются образцы-призмы квадратного сечения (рис. 14,б), предназначенные для испытаний на сжатие.

Измерительные приборы. Для определения нагрузки используются силоизмерительные механизмы испытательных машин. Нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma = \frac{P}{F}, \quad (1.11)$$

где P – заданная нагрузка;

F – площадь поперечного сечения образца.

Для определения относительных деформаций используются проволочные тензорезисторы, наклеиваемые на образец (см. рис. 14, а, б). При испытании бетонных образцов с помощью индикаторов часового типа на определенном участке замеряются абсолютные перемещения, а затем рассчитываются относительные деформации.

В первом случае тензорезисторы наклеиваются в средней части образца в продольном и поперечном направлениях (рис. 14). При этом, чтобы исключить ошибки от возможного эксцентриситета приложения нагрузки на плоские образцы, тензорезисторы наклеиваются с двух сторон на противоположных гранях образца; на образцы квадратного сечения тензорезисторы наклеиваются на все четыре грани.

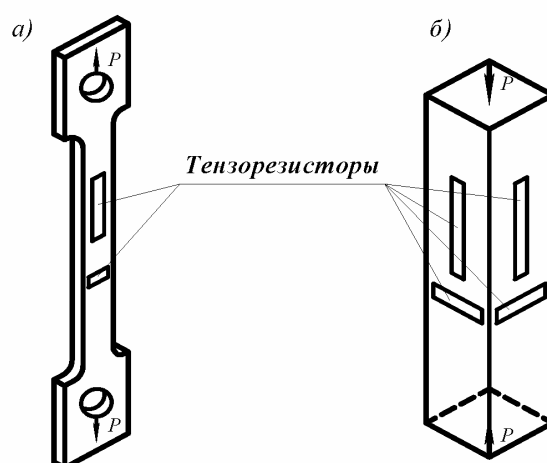


Рис. 14. Образцы для проведения испытаний: а – на растяжение; б – на сжатие.

При обработке опытных данных показания всех тензорезисторов в сходственных точках и по сходственным направлениям усредняются. Показания тензорезисторов регистрируются цифровым прибором типа ИДЦ-1 либо стрелочным типа АИД-2М. В случае использования индикаторов часового типа на образце с помощью винтов и клея укрепляются специальные рамки и упоры. Индикаторы крепятся на рамке, а наконечники их подвижных штоков опираются на упоры (рис. 15). Расстояние между осями рамки и упора является базой измерения l_0 . Приращение перемещения на ступень нагрузки, определенное по индикаторам, обозначим Δl_0 . Тогда относительную деформацию можно вычислить по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_0}{l_0}.$$

Испытательные машины. Для испытания образцов на растяжение используется машина ZD-10, для испытания на сжатие – пресс П-50 или П-250 (для бетонных образцов).

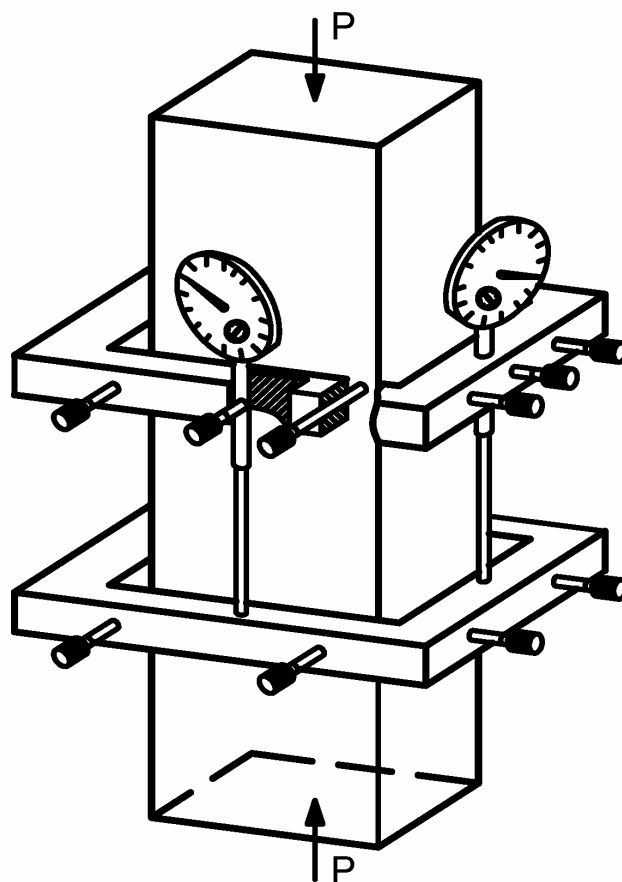


Рис. 15. Образец из бетона с приспособлением для определения продольных деформаций.

Порядок проведения испытаний. Образец с наклеенными тензорезисторами (или укрепленными на нем индикаторами) закрепляют в захватах испытательной машины или устанавливают между плитами пресса. Тензорезисторы с помощью специального разъема соединяют с измерительным прибором. Согласно соответствующим инструкциям по использованию машины и прибором выполняют операции по подготовке к работе испытательной машины и измерительного прибора. Затем производят нагружение образца равными ступенями нагрузки, регистрируя на каждой ступени показания силоизмерителя и тензорезисторов (или индикаторов) в специальном бланке испытаний. После достижения наибольшей для данного образца нагрузки (в пределах линейно-упругой работы материала) производят ее сброс (до нуля или небольшой начальной величины, обеспечивающей выборку возможных люфтов) и вновь снимают показания приборов. Если после сброса нагрузки показания приборов повторяют показания

исходного состояния, значит, условия опыта были стабильными, и его можно закончить (выключить машину и снять образец). В случае существенной разницы в показаниях приборов при повторении исходного состояния опыта следует выяснить причину нестабильности, устранить ее и повторить опыт.

Порядок обработки результатов испытаний. Показания тензорезисторов (или индикаторов) заносят в бланк испытаний (табл. 3). Обработка заключается в вычислении средних значений относительных деформаций (продольных и поперечных) на ступень нагрузки. Для этого подсчитывают и заносят в соответствующую графу табл. 3 разность последующего и предыдущего показаний прибора по каждому тензорезистору (или индикатору). Эту разность обычно называют приращением и обозначают Δ_{ij} (i – номер тензорезистора или индикатора; j – номер ступени нагружения). После вычисления приращений определяют среднее приращение на ступень нагружения по каждому прибору:

$$\Delta_{i_{cp}} = \frac{\sum_{j=1}^n \Delta_{ij}}{n},$$

где n – число ступеней нагрузки.

Затем вычисляют относительную деформацию на ступень нагрузки по тензорезисторам:

$$\varepsilon_i = k \Delta_{i_{cp}},$$

где k – цена единицы приращения показаний прибора по относительной деформации (или цена единицы деления прибора) обычно равная $(0,9 - 1,1) \cdot 10^{-5}$. При замере деформации индикаторами часового типа относительная деформация определяется по формуле

$$\varepsilon_i = \frac{k_u \Delta_{i_{cp}}}{l_0} = \frac{\Delta l_0}{l_0},$$

где k_u – цена единицы деления прибора (обычно 0,01 или 0,001);

l_0 – база измерения.

При наличии дублирующих тензорезисторов в сходственных точках на противоположных гранях образца производится еще одно осреднение деформаций по этим точкам:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^c \varepsilon_{i_{cp}}}{c},$$

где c – число тензорезисторов.

Зная напряжение на ступень нагрузки $\sigma = \frac{\Delta P}{F}$, определяем модуль упругости материала образца:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{cp}}.$$

По определенным из опыта продольным ($\varepsilon_{\text{сп}}$) и поперечным ($\varepsilon'_{\text{сп}}$) относительным деформациям вычисляем коэффициент Пуассона материала:

$$\nu = \frac{|\varepsilon'|}{|\varepsilon|}.$$

Таблица 3

Р кН	Продольная деформация					Поперечная деформация				
	Т.1		Т.2		Среднее прираще ние Δ_{1-2}	Т.3		Т.4		Среднее прираще ние Δ_{3-4}
	Отсчет	Δ_1	Отсчет	Δ_2		Отсчет	Δ_3	Отсчет	Δ_4	
	$\Delta_{\text{сп}}$									

Контрольные вопросы

1. Что такое коэффициент Пуассона и каковы пределы его изменения?
2. Какую размерность имеет модуль упругости?
3. Как влияет величина модуля упругости на деформацию стержня?
4. Какие приборы использовались для измерения деформаций? Каков принцип их действия?
5. Что понимается под жесткостью стержня при растяжении?
6. С какой целью при измерении деформации использовалось по два тензорезистора?
7. Как определяются нормальные напряжения?
8. Объясните устройство тензорезистора?

Лабораторная работа № 2

ИСПЫТАНИЕ ОБРАЗЦА ИЗ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ НА РАЗРЫВ

Цель работы: определение основных механических характеристик материала: пределов пропорциональности, упругости, текучести, временного сопротивления (предела прочности), относительного удлинения образца, относительного уменьшения площади его поперечного сечения (относительного сужения).

Характеристика образца. Как показала практика, результаты испытаний в значительной мере зависят от формы, размеров образца, чистоты обработки его поверхности. Для получения сопоставимых данных все образцы должны соответствовать требованиям ГОСТов. При испытаниях стали используются образцы круглого или прямоугольного сечения в соответствии с ГОСТ 1497-73. Основной особенностью этих образцов, изображенных на рис. 16, является наличие усиленных мест для закрепления образца в захватах и участка с постоянным поперечным сечением, который называется рабочим участком. Длина рабочего участка $l_{\text{раб}}$ для стандартных образцов составляет $20d$. В некоторых случаях разрешается применять короткие образцы, у которых $l_{\text{раб}} = 10d$.

Образец, предназначенный для испытаний, до установки его в машину обмеряется при помощи штангенциркуля. На рабочей части образца производится разметка на участки одинаковой длины. Наносимые на образец границы участков не должны создавать дефектов на поверхности образца, которые могут стать концентраторами напряжений.

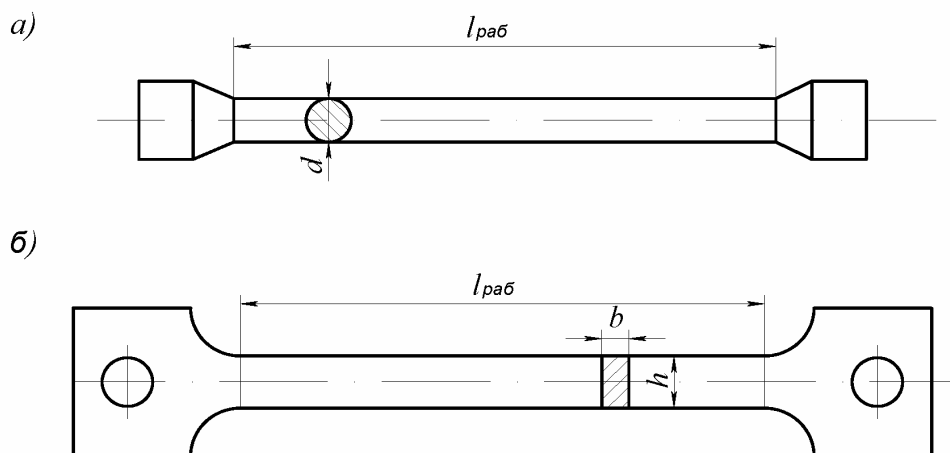


Рис. 16. Образцы для испытаний на разрыв: а – цилиндрический; б – плоский.

Проведение испытаний. Для испытания образцов из малоуглеродистой стали марки ВСт.3 диаметром (d) 10 мм применяется универсальная разрывная машина Р-10. На этой машине установлен механизм записи диаграммы $P - \Delta l$.

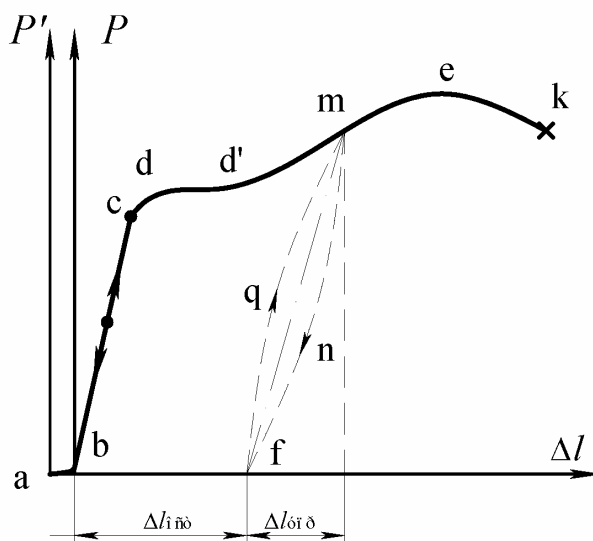


Рис.17. Диаграмма растяжения $P - \Delta l$ для малоуглеродистой стали.

Закрепив образец в захватах и установив механизм записи диаграммы в начальное положение, постепенно нагружаем образец. По ходу испытания ведется запись диаграммы $P - \Delta l$, и в конце испытания ведомая стрелка силоизмерительного механизма покажет максимальное значение нагрузки, которую выдержал образец.

Общие положения. Типичный вид диаграммы растяжения для малоуглеродистой стали представлен на рис.17.

В начале записи диаграммы $P - \Delta l$ возможен небольшой криволинейный участок $a - b$, наличие которого объясняется существованием люфтов (свободных ходов) как в самой испытательной машине, так и в захватах. Этот криволинейный участок обычно исключают, продолжив следующий, прямолинейный участок $b - c$ до пересечения с осью абсцисс. Полученную точку пересечения считают началом диаграммы, и через нее проводят новую ось ординат. Расстояние между осями будет соответствовать деформации за счет люфтов машины и захватов.

Прямолинейный участок $b - c$ соответствует закону Гука: удлинение стержня пропорционально приложенной растягивающей нагрузке. Если в пределах нагрузок, соответствующих этому участку, прекратить нагружение и начать разгрузку, то зависимость $P - \Delta l$ будет идентична зависимости при нагрузке образца. При некотором значении силы (точка c) зависимость $P - \Delta l$ отклоняется от линейной. После переходного участка $c - d$ наблюдается горизонтальный участок $d - d'$: удлинение растет при постоянном значении силы. Этот участок

называется площадкой текучести. Наличие площадки текучести характерно для малоуглеродистых сталей.

Следующий участок диаграммы $d'-e$ называется участком упрочнения. Скорость роста нагрузки здесь значительно ниже, чем на прямолинейном участке $b-c$. Если при достижении какой-нибудь точки m на этом участке начать разгрузку образца, то получим кривую разгрузки $m-n-f$. При повторном нагружении этого образца линия нагружения будет представлена кривой $f-q-m$. Кривые $m-n-f$ и $f-q-m$ образуют так называемую петлю гистерезиса. Площадь, занимаемая петлей гистерезиса, определяет потери энергии, связанные с разгрузкой и нагрузкой образца. Следует отметить, что довольно часто линии, изображающие процессы разгрузки и нагружения образца, совпадают, они представляют собой прямую $m-f$, параллельную прямой $b-c$. Вблизи максимального значения нагрузки (точка e) на рабочем участке образца образуется так называемая шейка – заметное на глаз местное сужение образца. С увеличением нагрузки диаметр шейки уменьшается, следовательно, уменьшается и площадь поперечного сечения шейки. Нагрузка, приложенная к образцу, возрастает до тех пор, пока относительное увеличение нагрузки не превысит относительного уменьшения поперечного сечения шейки. При их равенстве образец будет выдерживать максимальную силу $P_{нб}$ или $P_{вр}$.

В дальнейшем удлинение образца происходит с уменьшением силы (участок $e-k$). Удлинение образца носит местный характер: наблюдаются большие пластические деформации в зоне шейки. Участок $e-k$ на диаграмме называется зоной местной текучести.

В точке k диаграммы при некоторой силе P_p происходит разрыв образца.

Обработка экспериментов. С помощью полученной диаграммы определяются следующие характеристики:

1. Предел пропорциональности – наибольшее напряжение, до которого материал подчиняется закону Гука:

$$\sigma_{мц} = \frac{P_{мц}}{F_0},$$

где $P_{мц}$ – нагрузка на образец, при которой напряжения в образце достигают предела пропорциональности;

F_0 – площадь поперечного сечения образца до проведения эксперимента.

Величина $P_{мц}$ зависит от степени точности, при которой часть участка $c-d$ диаграммы можно рассматривать как прямую. Степень отклонения кривой $c-d$ от прямой $b-c$ определяют по величине угла, который составляет касательная к диаграмме с осью P . Для прямолинейного участка тангенс этого угла численно определяется величиной $\frac{l_{раб}}{EF_0}$. Считают, что если тангенс угла между касательной

и осью P на криволинейном участке $c-d$ оказался в 1,5 раза больше, чем вышеупомянутый, то предел пропорциональности достигнут.

На основе этого на диаграмме величина $P_{мц}$ графически характеризует нагрузку, при которой образец достигает предела пропорциональности (рис. 18).

2. Предел упругости – такое наибольшее напряжение, при котором в материале при разгрузке не возникают остаточные деформации. Эту характеристику просто определить, используя диаграмму $P - \Delta l$. Обычно

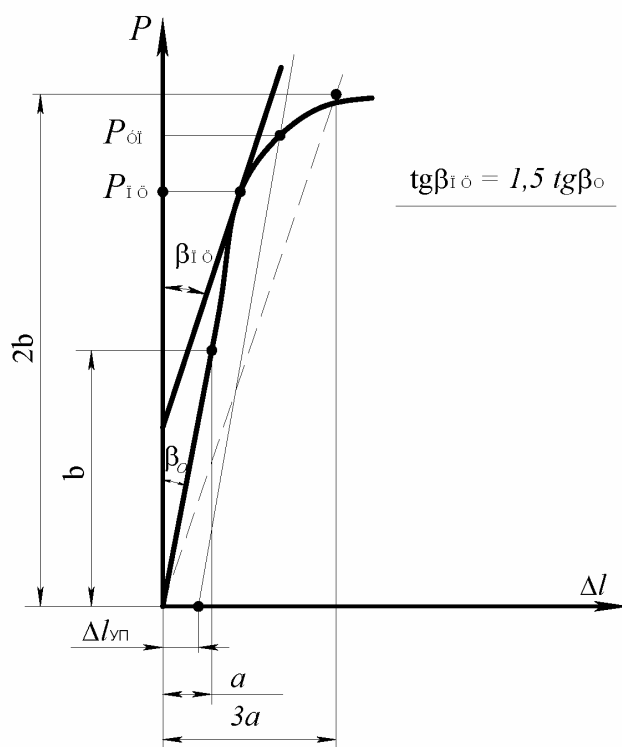


Рис. 18 Определение предела пропорциональности и предела упругости.

остаточная деформация, соответствующая пределу упругости, определяется величиной $\varepsilon_{уп} = |1 \div 5| \cdot 10^{-8}$. Для определения нагрузки, при которой достигается предел упругости $P_{уп}$, на оси Δl откладывают величину $\Delta l_{уп} = \varepsilon_{уп} \cdot l_{раб}$, а затем проводят линию, параллельную прямолинейному участку диаграммы. Пересечение этой линии с кривой диаграммы определяет $P_{уп}$ (см. рис. 18). Тогда

$$\text{предел упругости } \sigma_{уп} = \frac{P_{уп}}{F_0}.$$

3. Предел текучести – это напряжение, по достижению которого происходит рост деформации без существенного увеличения показаний силоизмерительного устройства. Предел текучести определяется по формуле

$$\sigma_{т} = \frac{P_{т}}{F_0},$$

где $P_{т}$ – нагрузка, при которой напряжения в образце достигают предела текучести.

При напряжениях, равных пределу текучести, в малоуглеродистых сталях развиваются пластические деформации, связанные с необратимыми деформациями сдвига между кристаллами феррита.

Для материалов, имеющих диаграмму растяжения с явно выраженной площадкой текучести, определение P_T по диаграмме несложно. Если такой площадки нет, за предел текучести принимается величина напряжения, при которой в образце появляется остаточная деформация $\varepsilon = 0,002$. P_T в этом случае определяется так же, как и $P_{уп}$.

После развития определенных пластических деформаций и перестройки кристаллической решетки несущая способность стали увеличивается – рост деформаций сопровождается увеличением напряжений, происходит упрочнение стали.

4. Временное сопротивление или предел прочности – это отношение наибольшей силы, которую способен выдержать образец, к начальной площади его поперечного сечения:

$$\sigma_{в} = \frac{P_{нб}}{F_0},$$

где $P_{нб}$ – максимальная сила, которую выдерживает образец, определяемая по показаниям ведомой стрелки на испытательной машине или диаграмме растяжения.

5. Нормальные напряжения в момент разрыва образца

$$\sigma_p = \frac{P_p}{F_0},$$

где P_p – значение силы в момент разрыва образца, определяемое по диаграмме $P - \Delta l$.

Истинные нормальные напряжения в момент разрыва образца определяются по формуле

$$\sigma_{ист} = \frac{P_p}{F_{ш}},$$

где $F_{ш}$ – площадь поперечного сечения шейки,

$$F_{ш} = \frac{\pi d_{ш}^2}{4},$$

здесь $d_{ш}$ – диаметр шейки, определяемый замером образца после разрыва.

6. Абсолютное остаточное удлинение после разрыва

$$\Delta l = l_1 - l_0.$$

7. Относительное остаточное удлинение после разрыва образца

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\%,$$

где l_0 – длина рабочего участка до испытания;

l_1 – длина рабочего участка после разрыва.

Довольно часто разрыв образца происходит не посередине. В этом случае удлинение образца меньше обычного. Для определения относительного удлинения поступают следующим образом. От крайней риски, обозначенной на

рис.19 нулем, отмеряют четное количество n участков так, чтобы место разрыва находилось приблизительно посередине этих участков.

В рассматриваемом случае $n = 2$. Их длину обозначим a . Если образец разделен на m участков, то длина расчетного участка после разрыва будет

$$l_p = a + b,$$

где b – длина $\frac{m-n}{2}$ участков.

В нашем случае эта длина четырех примыкающих участков $\left| \frac{10-2}{2} = 4 \right|$.

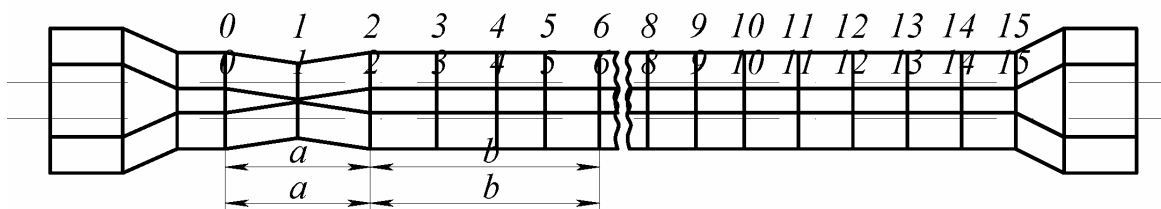


Рис. 19. Определение длины расчетного участка после разрыва

8. Абсолютное сужение площади поперечного сечения после разрыва

$$\Delta F = F_0 - F_1$$

где F_0 - площадь поперечного сечения до испытания;

F_1 - площадь поперечного сечения шейки.

9. Относительное сужение площади поперечного сечения (коэффициент пластичности)

$$\psi = \frac{F_0 - F_{ш}}{F_0} \cdot 100\%.$$

Величины δ и ψ характеризуют пластические свойства стали. Для малоуглеродистых сталей $\delta = 25 \div 30 \%$ и $\psi = 50 \div 60 \%$.

10. 1) Работа, затраченная на разрыв образца

$$A = \eta P_{вр} \cdot \Delta l_{полн}$$

где η – коэффициент полноты диаграммы; для малоуглеродистой стали его можно принять равным 0,85;

$\Delta l_{полн}$ – полная деформация образца, определяемая в основном деформацией рабочего участка.

2) Удельная работа, затраченная на разрыв

$$A_0 = \frac{A}{V_0} = \frac{A}{l_{раб} \cdot F_0} = \eta \sigma_{в} \cdot \epsilon_{полн}.$$

У пластичных сталей удельная работа, затрачиваемая на разрыв, как правило, бывает больше, чем у хрупких сталей, обладающих большим пределом прочности. Объясняется это тем, что величины деформаций пластичных сталей значительно больше.

По найденным выше характеристикам можно построить диаграмму "напряжение – относительная деформация" $\sigma - \varepsilon$ (рис. 20).

Эта диаграмма в основном имеет такой же характер, что и диаграмма $P - \Delta l$. Пунктирной линией показаны значения истинных нормальных напряжений.

Эта диаграмма называется *условной*, так как при ее построении не учитывается уменьшение площади поперечного сечения при растяжении образца, а также принимается среднее значение продольной деформации в пределах рабочего участка.

Диаграмма растяжения, построенная с учетом изменения площади поперечного сечения, называется *истинной диаграммой*.

Полная деформация, соответствующая точке, находящейся выше предела упругости, равна $\varepsilon = \varepsilon_{\text{ост}} + \varepsilon_{\text{уп}}$

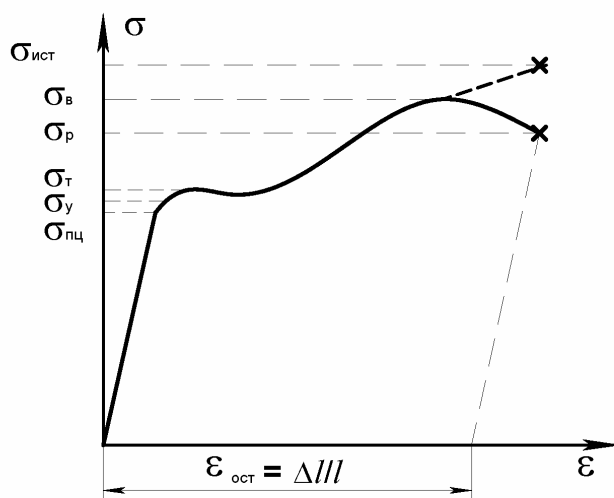


Рис. 20. Диаграмма растяжения $\sigma - \varepsilon$ для малоуглеродистой стали.

Контрольные вопросы.

1. Что является целью испытания материала на растяжение?
2. Что называется абсолютным удлинением и какова его размерность?
3. Какие деформации принято называть упругими и какие остаточными?
4. Какой участок диаграммы растяжения называется площадкой текучести и как определяется предел текучести?
5. Как определяется временное сопротивление (предел прочности)?
6. Чем объясняется уменьшение растягивающей силы за пределом прочности на условной диаграмме растяжения?
7. Как определяется истинное напряжение в момент разрыва?
8. Что такое условное напряжение?
9. Чем отличается истинная диаграмма растяжения от условной диаграммы?
10. Что такое относительное сужение после разрыва и как оно определяется?

Лабораторная работа № 3

Кручение стального стержня круглого сечения

Цели работы:

1. изучение зависимости между нагрузкой и деформацией стержня;
2. определение модуля сдвига материала;
3. определение главных напряжений в поверхностном слое стержня.

Общие положения:

Кручение стержня вызывается действием пар сил, расположенных в плоскостях, перпендикулярных к его оси.

В поперечных сечениях стержня при кручении возникает только одно внутреннее усилие – **крутящий момент**. Для определения крутящего момента используется метод сечений.

При кручении происходит поворот одного сечения относительно другого, который характеризуется углом закручивания φ .

Экспериментальные и теоретические исследования кручения стержней круглого сечения дают основание принять следующие гипотезы:

1. *Поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.*
2. *Радиусы поперечных сечений в процессе кручения не искривляются и длина их не изменяется.*

Испытание на кручение дает возможность определить физико-механические характеристики материала в условиях чистого сдвига.

Угол закручивания стержня круглого сечения в пределах линейно-упругих деформаций связан с нагрузкой (крутящим моментом) следующей зависимостью:

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J_p}, \quad (3.1)$$

где l – длина стержня;

M_k – крутящий момент;

G – модуль упругости материала при сдвиге (модуль сдвига); он называется также модулем упругости второго рода;

J_p – полярный момент инерции площади поперечного сечения стержня;

для сплошного круга он определяется по формуле $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ (d – диаметр сечения).

Модуль сдвига G связан с модулем упругости при растяжении - сжатии следующим соотношением:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (3.2)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Величина GJ_p называется **жесткостью** стержня круглого сечения при кручении.

Выражение (3.1), связывающее деформацию (φ) и нагрузку (M_k) прямой пропорциональной зависимостью, справедливо только при малых деформациях, обычно не превышающих 0,1% от полной деформации образца после разрушения. При дальнейшем нагружении образца эта зависимость нарушается и происходит быстрое увеличение угла закручивания при незначительном росте крутящего момента. Такая закономерность наблюдается вплоть до разрушения образца, которое происходит без образования шейки. Характерный вид диаграммы кручения круглого образца из малоуглеродистой стали показан на рис.21.

Модуль упругости при сдвиге G определяется по формуле

$$G = \frac{\Delta M_k l}{\Delta \varphi_{cp} J_p}, \quad (3.3)$$

где: ΔM_k – приращение крутящего момента;

$\Delta \varphi_{cp}$ – среднее приращение угла закручивания образца на ступень нагрузки ΔM_k ;

l – длина образца (база, на которой измеряется угол закручивания).

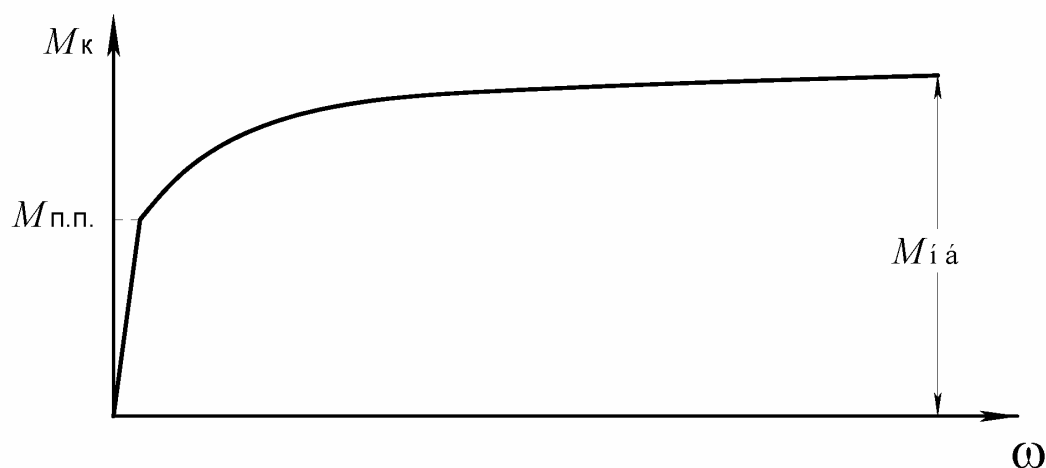


Рис.21. Диаграмма кручения $M_k - \varphi$ образца круглого сечения из малоуглеродистой стали

Касательные напряжения в поперечном сечении стержня при кручении изменяются в радиальном направлении по линейному закону. Наибольшее значение они принимают на контуре сечения при $r=R$ и определяются по формуле:

$$\tau_{нб} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (3.4)$$

где W_p – полярный момент сопротивления.

Для сплошного круга он равен:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (3.5)$$

Нормальные напряжения в продольном и поперечном сечениях стержня при кручении отсутствуют. Такое напряженное состояние называется чистым сдвигом. В этом случае главные напряжения σ_1 и σ_2 направлены под углами 45° к образующим. Для их определения воспользуемся законом Гука для плоского напряженного состояния:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

В нашем случае деформации ε_1 и ε_2 , как и напряжения σ_1 и σ_2 , равны друг другу по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Обозначим $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = \varepsilon$. Тогда из предыдущих формул получим:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon, \quad \sigma_2 = -\frac{E}{1+\nu} \varepsilon. \quad (3.7)$$

Деформации ε_1 и ε_2 определяются опытным путем. Для условий чистого сдвига

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{\text{нб}} \quad (3.8)$$

Полученное из опыта значение $\tau_{\text{нб}}$ сравнивается с теоретическим значением.

При расчете на прочность используется метод допускаемых напряжений. Условие прочности при кручении стержней круглого сечения имеет вид

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{нб}}}{W_p} \leq [\tau], \quad (3.9)$$

$M_{\text{к}}^{\text{нб}}$ - наибольший крутящий момент в стержне от действия нормативных нагрузок;

W_p - полярный момент сопротивления;

$[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение.

Стержни, работающие на кручение, должны обладать достаточной жесткостью. Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\varphi'_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{нб}}}{GJ_p} \leq [\varphi'], \quad (3.10)$$

где $[\varphi']$ - допускаемый относительный угол закручивания.

Образцы. Согласно ГОСТ 3565-58 для испытаний металлов на кручение применяют образцы круглого поперечного сечения диаметром рабочей части 10мм и расчетной длиной 100 и 50 мм. Если применяют образцы других размеров, об этом делают соответствующую запись и указывают действительные размеры.

В лабораторной работе учебного плана размеры образцов могут определяться требованиями демонстративности опыта, мощностью и конструктивными особенностями испытательной машины.

Испытательная машина. Для испытания образцов на кручение применяется машина типа 2014 МК-50.

Измерительные приборы. В опытах при испытании образцов материала на кручение измеряются: крутящий момент M_k , угол закручивания φ , деформации ε_1 и ε_2 .

Для измерения крутящего момента используется электронный моментоизмеритель, входящий в состав испытательной машины 2014 МК-50. Его показания фиксируются стрелочным индикатором, который имеет три шкалы (диапазона) измерений.

Для измерения угла закручивания образца испытательная машина снабжена специальным счетчиком угла закручивания. Однако цена деления этого счетчика составляет 1° , что является слишком грубым для испытаний металлических образцов в упругой стадии. Поэтому для более точного определения угла закручивания применяется механический угломер на базе индикатора часового типа с ценой деления 0,01 мм (рис.22).

Механический угломер состоит из двух опорных колец 2, которые крепятся на образце 1 тремя радиально расположенными винтами 3 на расстоянии друг от друга, называемой базой измерения l_0 . При приложении по концам образца крутящего момента одно кольцо повернется относительно другого, вследствие чего планка 4, жестко закрепленная на одном из колец, переместит подвижный шток индикатора 5, который укреплен на другом кольце. Перемещение стрелки индикатора пропорционально углу закручивания образца. Чтобы цену деления индикатора вычислить в радианах, следует цену деления индикатора в миллиметрах разделить на расстояние R до оси образца. Если цена деления индикатора 0,01 мм, то цена деления его в радианах будет

$$c = \frac{0,01}{R}.$$

Измерение деформаций ε_1 и ε_2 производится с помощью проволочных тензорезисторов. Для этого тензорезисторы наклеиваются на образец вблизи его центральной части под углом 45° к образующим. Регистрация сигналов от тензорезисторов осуществляется специальными электронными приборами – измерителями деформаций цифровыми типа ИДЦ-1 или ЦТМ-3 (ЦТМ-5). Чувствительность этих приборов обычно отрегулирована таким образом, что одной единице измерения показаний (единице дискретности) соответствует относительная деформация $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.

Порядок проведения лабораторной работы.

Образец закрепляется в захватах испытательной машины. Подключаются тензорезисторы к измерительному прибору и включается прибор в сеть. Устанавливается требуемая шкала моментоизмерителя. Включается

испытательная машина и дается небольшая предварительная нагрузка на образец заданными ступенями крутящего момента ΔM_k с замером на каждой ступени приращения угла закручивания $\Delta\varphi$ и деформаций $\Delta\varepsilon_1$ и $\Delta\varepsilon_2$. Результаты измерений записываются в табл.

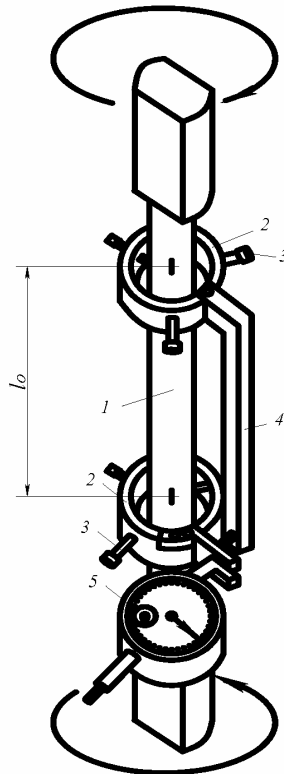


Рис.22. Механический угломер.

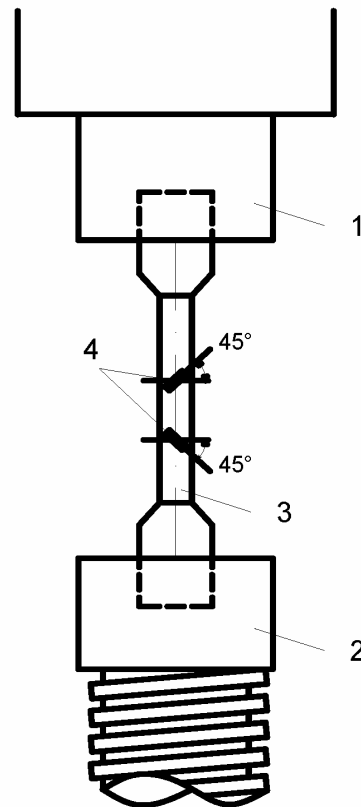


Рис.23. Схема испытания образца на кручение: 1 – верхний захват, 2 – нижний захват, 3 – образец, 4 – тензорезисторы.

Средние значения приращений на ступень нагрузки ΔM_k составляют

$$\Delta\varphi_{\text{ср}} = \frac{\sum \Delta\varphi}{n}; \quad \Delta_{1\text{ср}} = \frac{\sum \Delta_1}{n}; \quad \Delta_{2\text{ср}} = \frac{\sum \Delta_2}{n},$$

здесь n – число ступеней нагрузки.

Среднее значение приращения по обоим тензорезисторам равно

$$\Delta_{\text{ср}} = \frac{|\Delta_{1\text{ср}}| + |\Delta_{2\text{ср}}|}{2}.$$

Среднее значение относительной деформации

$$\varepsilon = k\Delta_{cp}$$

где k – цена единицы приращения показаний тензорезистора по относительной деформации ($k = 1 \cdot 10^{-5}$).

Полученное значение угла закручивания $\Delta\varphi_{cp}$ используется для определения модуля упругости при сдвиге G .

Таблица 4

Крутящий момент M_k		Показания угломера на базе измерений $l_0 =$		Показания тензорезисторов			
				№ 1		№ 2	
Отсчет по прибору	Приращение ΔM_k	Отсчет по прибору	Приращение $\Delta\varphi$	Отсчет по прибору	Приращение Δ_1	Отсчет по прибору	Приращение Δ_2

Среднее значение относительной деформации ε используется для определения наибольших касательных напряжений:

$$\tau_{нс} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon. \quad (3.11)$$

При испытании образца за пределом упругости материала (до разрушения) для построения графика $M_k - \varphi$ составляется отдельная таблица для этих двух величин. Поскольку за пределами упругости материала происходит «быстрый» рост деформаций (угла закручивания) при «медленном» возрастании нагрузки, в опыте целесообразно принять шаг угла закручивания и фиксировать на этом шаге величину крутящего момента. Для замера больших углов закручивания используемая машина 2014 МК-50 снабжена наряду со счетчиком углов закручивания счетчиком оборотов.

Контрольные вопросы.

1. При каком нагружении стержень испытывает деформацию кручения?
2. Какое внутреннее усилие возникает в поперечном сечении стержня при кручении?
3. Какие напряжения возникают в стержне круглого поперечного сечения при кручении и как они направлены?
4. Что называется жесткостью стержня при кручении?

Лабораторная работа № 4

Определение напряжений в балке при изгибе

Цели работы:

1. Проверка опытным путем закона распределения нормальных напряжений в поперечном сечении балки на участке чистого изгиба в стальной изгибаемой балке.
2. Определение величины нормальных напряжений в характерных точках по высоте сечения на участке чистого изгиба.
3. Определение величины наибольших касательных напряжений при поперечном изгибе балки на уровне нейтрального слоя.
4. Сопоставление опытных данных с результатами аналитического расчета.

Общие сведения.

Изгибом называется такой вид деформирования стержня, при котором внешние нагрузки (сосредоточенные силы, распределенные нагрузки, пары сил) действуют в плоскостях, перпендикулярных к его оси.

Если внешние нагрузки расположены в одной плоскости, проходящей через ось стержня, то изгиб называется плоским. Плоскость, в которой действуют нагрузки, называется силовой плоскостью.

Если силовая плоскость совпадает с одной из главных плоскостей инерции, то имеет место плоский прямой изгиб. Если же силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции, то изгиб называется плоским косым изгибом.

Когда нагрузки расположены в разных плоскостях, изгиб называется пространственным.

В данной лабораторной работе рассматривается наиболее простой вид изгиба – плоский прямой изгиб. Силовая плоскость содержит главную центральную ось Oy .

При плоском прямом изгибе в плоскости Oxy в поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия: изгибающий момент M_z и поперечная сила Q_y .

Участок балки, в пределах которого изгибающий момент имеет постоянное значение ($M_z = \text{const}$), а поперечная сила отсутствует ($Q_y = 0$), называется участком *чистого изгиба*.

Из рис.24 видно, что продольные волокна балки, расположенные ниже некоторого слоя, растянуты, а выше этого слоя – сжаты. Такой слой называется *нейтральным слоем*. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью (нулевой линией)* сечения.

Экспериментальные и теоретические исследования чистого изгиба балок дают основание принять следующие гипотезы.

1. Поперечные сечения балки, плоские до деформации, остаются плоскими и ортогональными к нейтральному слою после деформации (гипотеза Я.Бернулли). При изгибе происходит поворот поперечных сечений на некоторый угол относительно нейтральной оси, и угловые деформации в продольных сечениях балки отсутствуют.

2. Взаимное давление между продольными слоями отсутствует. Продольные волокна испытывают одноосное растяжение и сжатие.

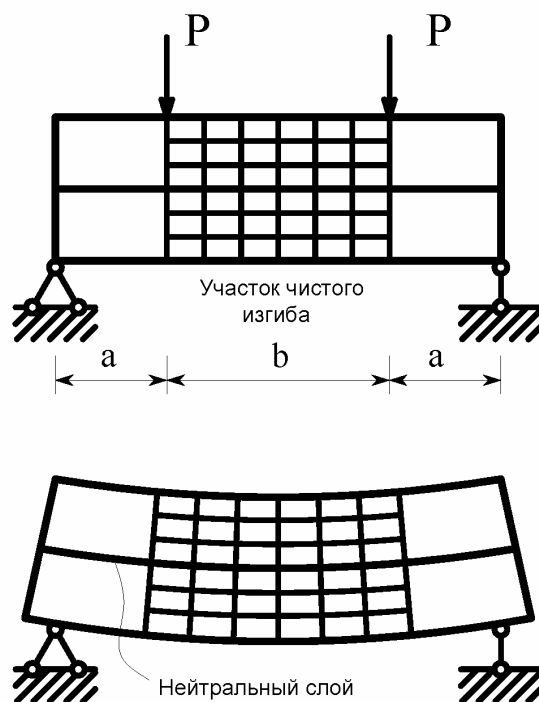


Рис.24.

При чистом изгибе в поперечных сечениях балки действуют только нормальные напряжения. При плоском прямом изгибе в плоскости Oxy они определяются по формуле:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y, \quad (4.1)$$

где M_x – изгибающий момент в рассматриваемом сечении;

J_z – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;

y – расстояние, отсчитываемое от нейтральной оси (нулевой линии).

Нормальные напряжения σ_x по высоте сечения изменяются по линейному закону. В точках нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю.

Наибольшие нормальные напряжения действуют в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси. Они определяются по формулам

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{M_z h_{\text{н}}}{J_z}; \quad \sigma_{\text{в}} = -\frac{M_z h_{\text{в}}}{J_z}, \quad (4.2)$$

где $h_{\text{н}}$ и $h_{\text{в}}$ - расстояния от нейтральной оси до крайних волокон.
Формулы (4.2) удобно представить в виде

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{M_z}{W_{\text{зН}}}; \quad \sigma_{\text{в}} = \frac{M_z}{W_{\text{зВ}}}, \quad (4.3)$$

где

$$W_{\text{зН}} = \frac{J_z}{h_{\text{н}}}; \quad W_{\text{зВ}} = \frac{J_z}{h_{\text{в}}}. \quad (4.4)$$

Величины $W_{\text{зН}}$ и $W_{\text{зВ}}$ называются моментами сопротивления сечения относительно нейтральной оси Oz для нижних и верхних волокон. Они являются положительными величинами. Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси, $h_{\text{н}} = h_{\text{в}} = \frac{h}{2}$, и момент сопротивления определяется по формуле $W_{\text{зН}} = W_{\text{зВ}} = W_z = \frac{J_z}{0,5h}$. Наибольшие и наименьшие нормальные напряжения равны по абсолютной величине

$$\sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = \frac{M_z}{W_z}. \quad (4.5)$$

При поперечном изгибе, в отличие от чистого изгиба, сечения балки не остаются плоскими (нарушается гипотеза Я.Бернулли). В поперечных сечениях действуют нормальные и касательные напряжения. Как правило, влияние сдвигов мало влияет на величину нормальных напряжений. В силу этого при поперечном изгибе используется формула (4.1).

Касательные напряжения в поперечном сечении определяются по формуле

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y \cdot S_z^{\text{отс}}(y)}{J_z \cdot b(y)}, \quad (4.6)$$

где Q_y – поперечная сила в данном сечении;

$S_z^{\text{отс}}(y)$ – статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной оси;

$b(y)$ – ширина поперечного сечения на уровне рассматриваемой точки. Эта формула в отечественной литературе называется *формулой Д.И.Журавского*.

В пределах участка с постоянной шириной касательные напряжения изменяются по высоте сечения по закону квадратной параболы. В местах скачкообразного изменения ширины сечения касательные напряжения также имеют скачки или разрывы.

Наибольшие значения касательных напряжений для балки прямоугольного сечения равны

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{3Q_y}{2F}, \quad (4.7)$$

где $F = bh$ - площадь поперечного сечения.

При вычислении τ_{xy} в стенке двутаврового сечения в формуле (4.6) нужно принять $b(y) = d$, где d - толщина стенки двутавра. При этом имеем

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z d}, \quad (4.8)$$

$S_z^{\text{отс}}$ вычисляется как сумма статических моментов относительно оси Oz площадей сечений полки $F_{\text{п}}$ и части стенки F_c

$$S_z^{\text{отс}} = F_{\text{п}} y_1 + F_c y_2. \quad (4.9)$$

Наибольшее значение касательные напряжения τ_{xy} имеют на уровне нейтральной оси при $y = 0$:

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{Q_y S_z^{1/2}}{J_z d}, \quad (4.10)$$

где $S_z^{1/2}$ - статический момент площади половины сечения относительно нейтральной оси

$$S_z^{1/2} = \left(\frac{h}{2} - t\right) d \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - t\right) + bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right), \quad (4.11)$$

где h - высота двутавра;

d - толщина стенки;

b - ширина полки;

t - средняя толщина полки.

Для сечений прокатных двутавров и швеллеров значения $S_z^{1/2}$ приведены в сортаменте.

На уровне примыкания стенки к полкам касательные напряжения τ_{xy} равны

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{\text{п}}}{J_z d} \quad (4.12)$$

где $S_z^{\text{п}}$ - статический момент площади сечения полки относительно нейтральной оси:

$$S_z^{\text{п}} = \frac{bt}{2} (h - t). \quad (4.13)$$

Величины и направления главных напряжений при изгибе балки определяются по формулам:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad \text{tg} \alpha_1 = \frac{\tau}{\sigma_1}, \quad \text{tg} \alpha_2 = \frac{\tau}{\sigma_2}. \quad (4.14)$$

На уровне нейтральной оси $\sigma_x = 0$, $\tau = \tau_{\text{нб}}$. При этом главные напряжения по величине равны наибольшим касательным напряжениям: $\sigma_{1,2} = \pm \tau_{\text{нб}}$, $\alpha_{1,2} = \pm 45^\circ$.

Расчет балок строительных конструкций на прочность при изгибе проводится по методу предельных состояний. В большинстве случаев основное значение при оценке прочности элементов конструкций имеют нормальные напряжения. При этом наибольшие нормальные напряжения, действующие в крайних волокнах балок, не должны превышать некоторой допустимой для

данного материала величины. При расчете по методу предельных состояний эта величина принимается равной расчетному сопротивлению R , умноженному на коэффициент условий работы γ_c .

Условие прочности записывается в виде

$$\sigma_{\text{нб}} \leq \gamma_c R. \quad (4.15)$$

Для балок с симметричным сечением из пластичного материала, одинаково хорошо сопротивляющегося растяжению и сжатию, условие прочности записывается в виде

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нб}}}{W} \leq \gamma_c R. \quad (4.16)$$

Для несимметричных сечений имеем

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нб}}}{W_{\text{нм}}} \leq \gamma_c R, \quad (4.17)$$

где $M_{\text{нб}}$ - наибольший по абсолютной величине изгибающий момент от действия расчетных нагрузок;

W и $W_{\text{нм}}$ - моменты сопротивления сечения относительно нейтральной оси Oz .

Сечение балки, в котором действует наибольший по абсолютной величине изгибающий момент, называется опасным сечением.

С использованием условий прочности для элементов конструкций, работающих на изгиб, решаются следующие задачи: *проверка прочности балки; подбор сечения; определение несущей способности (грузоподъемности) балки.*

В балках нагруженных большими по величине сосредоточенными силами, близко расположенными к опорам, изгибающий момент $M_{\text{нб}}$ может оказаться сравнительно небольшим, а поперечная сила $Q_{\text{нб}}$ по абсолютной величине значительной. В этих случаях необходимо производить проверку по наибольшим касательным напряжениям $\tau_{\text{нб}}$.

Условие прочности по наибольшим касательным напряжениям имеет вид:

$$\tau_{\text{нб}} \leq \gamma_c R_s,$$

где R_s - расчетное сопротивление материала балки при сдвиге.

В стенке двутавровых балок, в местах перехода к полке, главные напряжения, возникающие на наклонных площадках, могут оказаться по абсолютной величине больше, чем наибольшие напряжения в поперечных сечениях. В таких случаях необходимо проверять *условие прочности по наибольшим главным напряжениям* для тех сечений балки, в которых M и Q одновременно велики по абсолютной величине:

$$|\sigma_{1,2}| = \left| \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \right| \leq \gamma_c R. \quad (4.18)$$

Схема установки.

Эксперимент проводится на стальной двутавровой балке, нагруженной двумя симметрично расположенными относительно середины пролета силами P (рис.25).

Для балок небольших пролетов (0,8-1,2м) нагружение может осуществляться с помощью какой-либо испытательной машины. Пролет балки зависит от размера испытательного стола машины.

Значительно удобнее и нагляднее можно проводить такой эксперимент на специальной стационарной установке, а нагрузку осуществлять с помощью гидравлического или винтового домкрата. Пролет балки в этом случае может быть 2м и более.

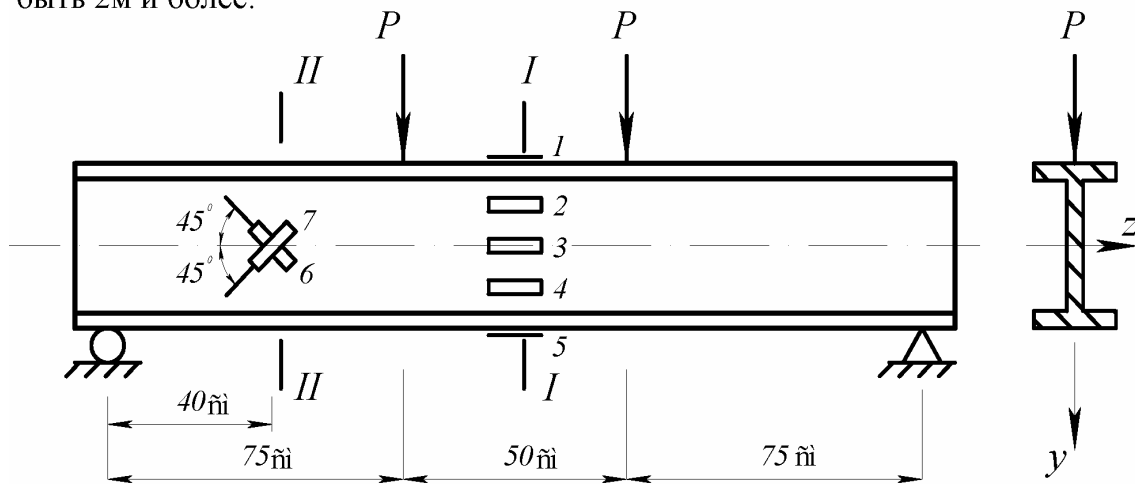


Рис.25. Схема загрузки балки

Порядок проведения испытаний. Рекомендуется сначала дать некоторую нагрузку для устранения зазоров в опорах и нагружающем приспособлении. Эту нагрузку принять за нулевую, а затем вести нагружение ступенями (4-5 ступеней) с таким расчетом, чтобы при максимальной нагрузке напряжения не превосходили бы предела пропорциональности. Чтобы удостовериться в правильности проведения эксперимента, рекомендуется в конце испытания для контроля регистрации отсчетов разгрузить балку и снова дать начальную нагрузку, а затем сверить отсчеты по приборам с первоначальными.

Для определения напряжений с помощью тензорезисторов определяются деформации, а затем с помощью закона Гука - напряжения. Нормальные напряжения определяются в зоне чистого изгиба (сечение I-I на рис.25). По высоте сечения наклеивают 5 тензорезисторов (рис.26). Тензорезисторы № 1 и № 5 наклеиваются в серединах полков (крайние волокна балки), тензорезисторы № 2 и № 4 - на расстоянии четверти высоты от нейтрального слоя, тензорезистор № 3 - на уровне нейтрального слоя.

Для всех тензорезисторов на каждую ступень нагружения (начиная с нулевого) записываются отсчеты по регистрирующему прибору, вычитая из последующего отсчета предыдущий, и подсчитываются приращения показаний

прибора на ступень нагрузки (Δ). Число приращений показаний равно числу ступеней нагружения. Затем определяется среднее (среднеарифметическое) значение приращения для каждого тензодатчика на ступень нагрузки (Δ_{cp}).

По полученным средним приращениям вычисляются относительные деформации:

$$\varepsilon = k\Delta_{cp},$$

где k – цена единицы приращения показаний измерительного прибора по относительной деформации ($k = 1 \cdot 10^{-5}$).

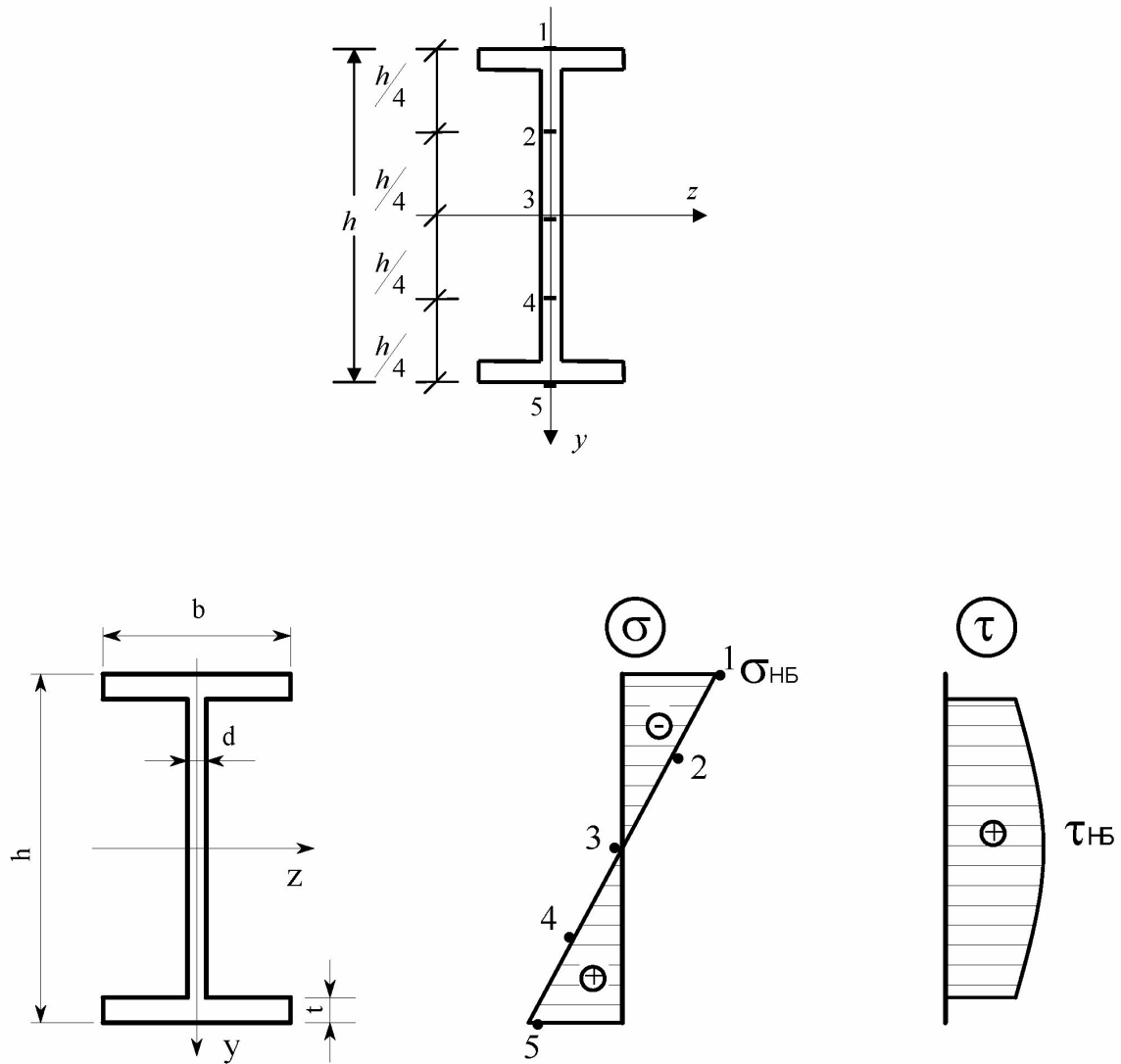


Рис.26. Расположение тензодатчиков по высоте сечения балки и эпюры нормальных и касательных напряжений.

На основании второй гипотезы продольные волокна балки при изгибе находятся в условиях центрального растяжения или сжатия, поэтому для определения напряжений используется закон Гука для одноосного напряженного состояния:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – модуль упругости стали.

По полученным результатам строится в определенном масштабе эпюра нормальных напряжений σ (см. рис.26). Точки 1,2,3,4,5 теоретически должны находиться на прямой линии, экспериментально же они окажутся на ломаной линии, близкой к прямой. Величины напряжений сравниваются со значениями σ , подсчитанными по формуле (4.1). За величину нагрузки P принимается ступень нагружения.

Касательные напряжения на уровне нейтрального слоя определяются в сечении II-II (рис.25), в котором кроме изгибающего момента имеется еще поперечная сила $Q_y = P$.

В поперечном сечении на уровне нейтрального слоя действуют только касательные напряжения τ . Напряженное состояние показано на рис.27.

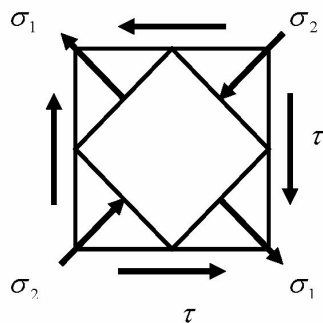


Рис.27. Напряженное состояние в нейтральном слое в сечении II-II

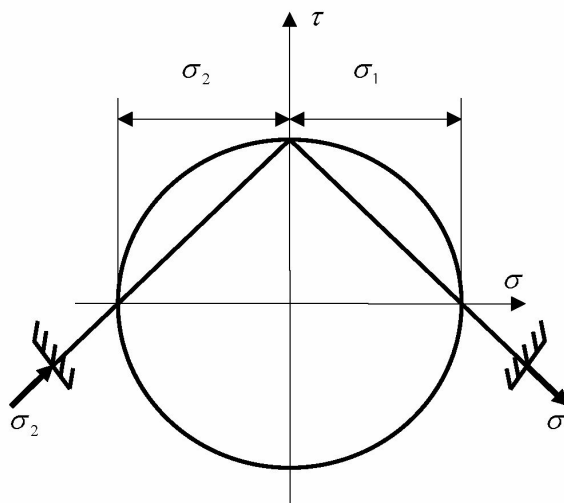


Рис.28. Круг напряжений

Формулы (4.14) и круг напряжений (рис.28) показывают, что главные напряжения $|\sigma_1| = |\sigma_2| = \tau_{нс}$ и направлены под углами 45° к оси балки.

Касательные напряжения $\tau_{нс}$ аналитически определяются по формуле (4.10). Тензорезисторы №6 и №7 наклеиваются на уровне нейтрального слоя в сечении II-II в направлении главных напряжений (под углами 45°) (рис.25).

Относительные деформации в направлении тензорезисторов №6 и №7 подсчитываются по ранее изложенной методике.

Для определения величин главных напряжений используется закон Гука для плоского напряженного состояния:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2),$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1),$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Отсюда с учетом равенств $\sigma_2 = -\sigma_1$ и $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ получим

$$\tau_{нс} = \frac{E\varepsilon}{1+\nu}, \text{ где } \varepsilon = \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|}{2}.$$

В нашем случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_7$, а $\varepsilon_2 = \varepsilon_6$.

Полученные значения сравниваются с ранее вычисленными по формуле (4.10).

Для удобства результаты записываются в табл.6.

Нормальные напряжения в сечении I-I

Таблица 6

Номера точек	Из опыта	Теоретические	Расхождение, %
1			
2			
3			
4			
5			

Касательные напряжения в сечении II - II

а) из опыта _____

б) теоретические _____

Контрольные вопросы.

1. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях при поперечном и чистом изгибах?
2. Как формулируется гипотеза плоских сечений?
3. С какой целью наклеиваются тензорезисторы на нейтральной оси под углом 45° ?
4. Запишите закон Гука при плоском напряженном состоянии.
5. Запишите формулы для определения нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении при изгибе.
6. По какому закону изменяются нормальные напряжения по высоте в поперечном сечении балки?
7. По какому закону изменяются касательные напряжения по высоте в поперечном сечении балки?
8. Как направлены главные площадки на уровне нейтрального слоя и в точках, наиболее удаленных от этого слоя?
9. Каков принцип действия тензорезисторов?

Лабораторная работа № 5

Определение прогибов и углов поворота изгибаемой балки

Цель работы:

1. Определение опытным путем прогиба в середине пролета балки и угла поворота на опоре.
2. Сравнение экспериментально полученных результатов с вычисленными.

Общие положения:

Изгиб балки сопровождается искривлением ее оси. При прямом изгибе ось балки превращается в плоскую кривую, расположенную в плоскости действия поперечных нагрузок. Эта кривая называется *изогнутой осью*.

Рассмотрим изгиб балки в главной плоскости Oxy (рис.29). Точки оси получают *поперечные перемещения или прогибы* ψ , а поперечные сечения поворачиваются относительно своих нейтральных осей. Углы поворота φ поперечных сечений согласно гипотезе плоских сечений принимаются равными *углам наклона касательной к изогнутой оси балки*.

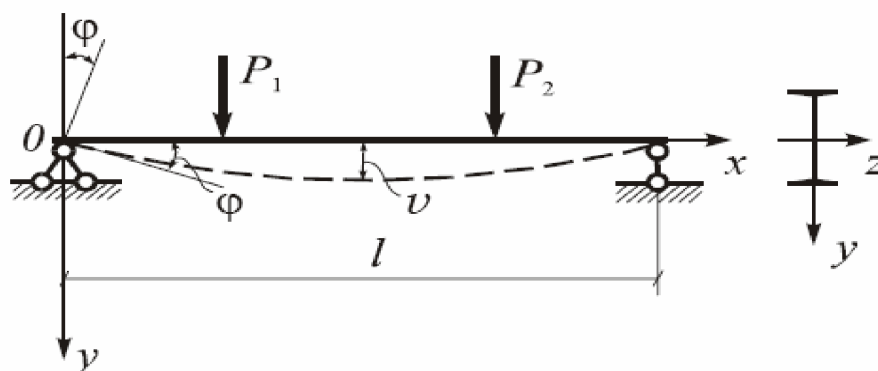


Рис.29.

В строительных конструкциях линейные перемещения (прогибы) значительно меньше длины стержня. Для шарнирно опертых балок отношение наибольшего прогиба (стрелы прогиба f) к длине пролета l устанавливается в следующих пределах:

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{200} \div \frac{1}{1000}$$

Углы поворота поперечных сечений при этом обычно не превосходят $0,5 \div 1$ град.

Определение перемещений в балках и стержневых системах необходимо для расчета их на *жесткость*, а также при решении *статически неопределимых задач*. Существуют различные методы определения линейных и угловых перемещений.

Для определения законов изменения прогибов балки $v(x)$ при прямом изгибе используются дифференциальные уравнения изогнутой оси балки:

$$EJ v''(x) = -M(x) \quad (5.1)$$

$$EJ v^{IV}(x) = q(x) \quad (5.2)$$

Выражения (5.1) и (5.2) являются дифференциальными уравнениями изогнутой оси балки второго и четвертого порядка соответственно. Эти выражения справедливы при малых прогибах, что имеет место в реальных строительных конструкциях.

Произведение EJ называется *жесткостью* балки при изгибе.

При малых прогибах углы наклона касательной к изогнутой оси можно принять равным

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{dx} = v'(x) \quad (5.3)$$

Метод непосредственного интегрирования: этот метод сводится к интегрированию дифференциального уравнения изогнутой оси (5.1) при известном законе изменения изгибающих моментов $M(x)$. Считая жесткость балки при изгибе постоянной ($EJ = \text{const}$) и последовательно интегрируя уравнение (5.1), получим

$$\begin{aligned} EJ v''(x) &= -M(x) \\ EJ v'(x) &= EJ \varphi(x) = -\int M(x) dx + C_1 \\ EJ v(x) &= -\int dx \int M(x) dx + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Выражения (5.4) позволяют получить аналитические законы изменения прогибов и углов поворота в балке. Входящие в уравнения (5.4) постоянные интегрирования C_1 и C_2 подлежат определению из *кинематических* граничных условий и условий сопряжения участков балки. Кинематические граничные условия ставятся относительно прогибов и углов поворота. Они отражают характер закрепления балки. Условия сопряжения ставятся на границах участков с различными законами изменения изгибающих моментов. Условия сопряжения заключаются в равенстве прогибов и углов поворота в сечениях слева и справа от границы участков. Они характеризуют (при отсутствии промежуточных шарниров и параллелограмных механизмов) непрерывность и гладкость изогнутой оси балки.

Метод начальных параметров: по этому методу прогиб в любом сечении балки определяется через перемещения (линейные v_0 и угловые φ_0) и внутренние усилия (M_0 и Q_0), взятые в начале координат с учетом приложенной к балке нагрузки. Метод начальных параметров содержит четыре начальных параметра. В начале расчета некоторые начальные параметры могут быть неизвестны (всегда известны два начальных параметра из четырех). Неизвестные в начале расчета начальные параметры определяются из кинематических *граничных условий*.

Формула Мора для определения перемещений: формула Мора имеет следующий вид:

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \frac{\bar{N}_k N_p}{EF} ds + \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \frac{\bar{M}_k M_p}{EJ} ds + \sum_{i=1}^n \eta \int_{s_i} \frac{\bar{Q}_k Q_p}{GF} ds \quad (5.5)$$

В этой формуле \bar{N}_k , \bar{M}_k и \bar{Q}_k - внутренние усилия в стержнях, вызванные действием единичной силы $\bar{P}_k = 1$ или единичного момента $\bar{M}_k = 1$, прикладываемых по направлению искомого перемещения. В первом случае искомое перемещение Δ_{kp} является линейным, а во втором – угловым.

Внутренние усилия N_p , M_p и Q_p - внутренние усилия в стержнях, вызванные действием заданных нагрузок.

Для определения по формуле Мора перемещений в балке или стержневой системе от действия заданных нагрузок надо по направлению искомого перемещения приложить единичную силу или единичный момент и определить вызываемые их действием внутренние усилия \bar{N}_k , \bar{M}_k и \bar{Q}_k . От действия заданных нагрузок определяются внутренние усилия N_p , M_p и Q_p грузового состояния. Выражения для внутренних усилий подставляются в формулу (5.5) и производится интегрирование по длине оси каждого стержня и суммирование результатов интегрирования по всем стержням системы.

Если в результате вычислений величина Δ_{kp} оказалась положительной, то направление перемещения совпадает с направлением единичного воздействия, а если отрицательной, - то оно противоположно этому направлению.

Физический смысл формулы Мора – работа единичных сил или единичных моментов на искомым перемещениях.

Для балок и стержневых систем, работающих в основном на изгиб, влияние поперечных и продольных сил не существенно и в формуле Мора используется только слагаемое, содержащее изгибающие моменты

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \frac{\bar{M}_k M_p}{EJ} ds \quad (5.6)$$

При определении взаимного перемещения точек оси стержня или взаимного угла поворота поперечных сечений единичное состояние надо образовать с помощью парной единичной нагрузки.

Правило Верещагина вычисления интегралов Мора:

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \frac{\bar{M}_k M_p}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} y_c \Omega_p \quad (5.7)$$

Согласно формуле (5.7) результат “перемножения” двух эпюр равен произведению площади нелинейной эпюры Ω_p на ординату y_c под ее центром тяжести в линейной эпюре. Результат “перемножения” однозначных эпюр является положительным, а разнозначных – отрицательным.

Правило Верещагина нельзя применять в случае, когда обе эпюры являются нелинейными, а также для стержней с переменной жесткостью EJ .

Для стержней с криволинейной осью, а также для стержней с переменной жесткостью EJ при определении перемещений производится аналитическое или численное вычисление интегралов в формуле (5.5).

Порядок проведения испытаний. Для проведения эксперимента можно использовать установку, с помощью которой определялись напряжения в изгибаемой балке (лабораторная работа №4).

Прогибы и углы поворота могут быть определены с использованием индикаторов часового типа с ценой деления 0,01 мм.

Схема установки и расположения приборов показаны на рис.30.

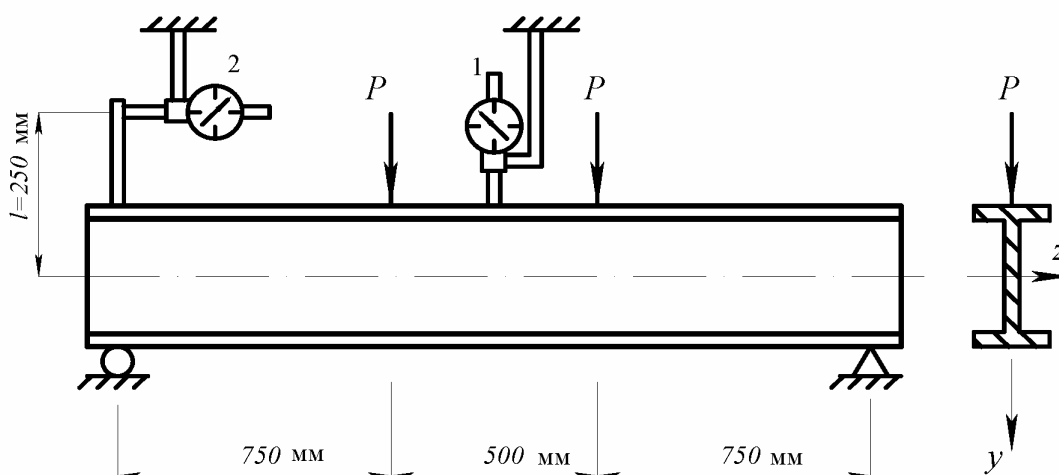


Рис.30.Схема расположения индикаторов: 1 – индикатор для определения прогиба посередине пролета; 2 – индикатор для определения угла поворота сечения на опоре

Нагружение проводится ступенями. Вначале рекомендуется дать некоторую начальную нагрузку для устранения зазоров в опорных частях. Отсчет при этой нагрузке принимается за нулевой. Затем равными ступенями следует увеличивать нагрузку (4-5 ступеней).

Отсчеты по индикаторам берутся в миллиметрах, поэтому разность между последующим и предыдущим отсчетами по индикатору 1 дает в миллиметрах прогиб посередине пролета на ступень нагрузки (f).

Для измерения угла поворота к торцевому сечению балки прикреплена жесткая стальная рейка. С помощью индикатора 2 замеряются горизонтальные перемещения конца стальной рейки. Чтобы получить угол поворота опорного сечения, необходимо разделить величину горизонтального смещения планки на базу измерения угла l :

$$\varphi = \frac{D_{cp2}}{l}, \text{ рад,}$$

где D_{cp2} – среднее приращение отсчета по индикатору 2 на ступень нагрузки.

Теоретические значения прогиба и угла поворота на ступень нагрузки определяются любым известным методом (например, методом начальных параметров, методом Мора и т.д.).

Сравниваются теоретические и опытные значения прогиба и угла поворота на ступень нагрузки и подсчитывается расхождение в процентах.

По полученным опытным и теоретическим данным строятся графики зависимости $P - f$ и $P - \varphi$. Обе зависимости теоретически изображаются прямыми линиями. Графики, построенные по опытным данным, будут иметь вид ломаных линий, близких к прямой.

Отсчеты по приборам заносятся в табл.7

Таблица 7

Нагрузка	Индикатор прогиба № 1			Индикатор прогиба № 2		
	Отсчет	Приращение, мм	Прогиб	Отсчет	Приращение, мм	Угол поворота
Среднее значение на ступень нагрузки						

Контрольные вопросы.

1. Что такое жесткость при изгибе?
2. Как определяется из опыта прогиб балки?
3. Как осуществляется опытное определение угла поворота?
4. Зависит ли прогиб и угол поворота балки от площади ее сечения?
5. Зависит ли прогиб балки от предела прочности и предела текучести материала?
6. Какое правило знака для прогиба и угла поворота сечения балки?
7. Какая дифференциальная зависимость существует между прогибами и углами поворота сечений балки?
8. Из каких условий определяются неизвестные в начале расчета начальные параметры в методе начальных параметров?
9. Сколько начальных параметров содержит метод начальных параметров?

Лабораторная работа № 6

Испытание образца на внецентренное сжатие

Цель работы: – экспериментальное определение напряжений во внецентренно сжатом стальном цилиндрическом образце. Сравнение опытных данных с результатами аналитического расчета.

Общие положения:

Внецентренное растяжение и сжатие стержня имеет место в случае, когда нагрузки действуют вдоль прямой, параллельной оси стержня.

При внецентренном растяжении и сжатии в поперечном сечении стержня возникают: продольная сила - N и изгибающие моменты - M_z и M_y .

Нормальные напряжения в общем случае внецентренного сжатия определяются по формуле:

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{P y_p}{J_z} y - \frac{P z_p}{J_y} z, \quad (6.1)$$

где y_p , z_p - координаты точки приложения силы.

Эту формулу можно преобразовать к виду

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p}{i_z^2} y + \frac{z_p}{i_y^2} z \right), \quad (6.2)$$

где i_y , i_z - главные радиусы инерции сечения, определяемые по формулам:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}. \quad (6.3)$$

Приравнявая (6.2) к нулю, получим уравнение *нулевой линии*.

$$1 + \frac{y_p}{i_z^2} y + \frac{z_p}{i_y^2} z = 0. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4) является уравнением прямой, не проходящей через центр тяжести сечения. Для построения нулевой линии найдем точки ее пересечения с осями координат. Полагая в (6.4) последовательно $y = 0$ и $z = 0$, соответственно найдем

$$a_y = y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p}, \quad a_z = z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p}, \quad (6.5)$$

где a_y и a_z - отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат. Отложив эти отрезки на осях, проведем нулевую линию, в каждой точке которой $\sigma = 0$. При внецентренном сжатии (растяжении) положение нулевой линии не зависит от величины силы P . Поскольку знаки величин a_y и a_z противоположны знакам соответственно y_p и z_p , нулевая линия проходит через те четверти системы координат, которые не содержат точку приложения силы. Положение нулевой линии зависит от геометрических характеристик сечения и от координат точки приложения силы.

Нормальные напряжения в сечении изменяются по линейному закону,

увеличиваясь по абсолютной величине по мере удаления от нулевой линии. Эпюра нормальных напряжений σ строится на прямой, перпендикулярной к нулевой линии. При этом она может быть разнозначной или однозначной. Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в случае разнозначной эпюры действуют в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии. В общем случае $\sigma_{нб} \neq |\sigma_{нм}|$.

В инженерной практике часто встречается случай внецентренного сжатия (растяжения), когда точка приложения силы P расположена на одной из главных осей. В этом случае в поперечных сечениях стержня возникают продольная сила - N и один изгибающий момент - M_z или M_y . При этом нулевая линия параллельна другой главной оси.

Для случая, когда точка приложения силы P находится на главной оси Oz , нормальные напряжения определяются по формуле:

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_p}{j_y^2} z \right). \quad (6.6)$$

Многие строительные материалы плохо сопротивляются растяжению. Поэтому в элементах конструкций из таких материалов, работающих на внецентренное сжатие, нежелательно появление растягивающих нормальных напряжений. Для этого необходимо, чтобы нулевая линия находилась вне сечения. Это условие будет выполнено, если точка приложения силы расположена внутри или на границе некоторой области вокруг центра тяжести, которая называется *ядром сечения*. Контур ядра сечения строится с помощью касательных к сечению, принимаемых за нулевые линии.

Ядром сечения называется выпуклая замкнутая область вокруг центра тяжести, обладающая следующим свойством: если точка приложения силы находится внутри или на границе этой области, то во всех точках сечения напряжения имеют один знак.

Описание образца. Используется стальной образец цилиндрической формы (рис.31). Сжимающая сила приложена с эксцентриситетом $e = \frac{d}{4}$. Если

учесть, что радиус ядра сечения для круга $r = \frac{d}{8}$, то напряжения в поперечном сечении будут разных знаков. Нагрузку удобно передавать через стальной шарик, для которого в образце высверливается углубление.

Напряжения при этом определяются по формуле

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pe}{J} z,$$

где P – осевая сила;

F – площадь поперечного сечения;

e – расстояние от центра круга до точки приложения силы (эксцентриситет приложения силы);

J – момент инерции круга;

z – расстояние от центра круга до точки, в которой определяется напряжение.

Сжатие образца осуществляется на любом прессе соответствующей мощности.

Для измерения деформации на образующих цилиндра наклеиваются 4 тензорезистора по двум взаимно перпендикулярным диаметрам (в точках 1, 2, 3 и 4) (рис.31).

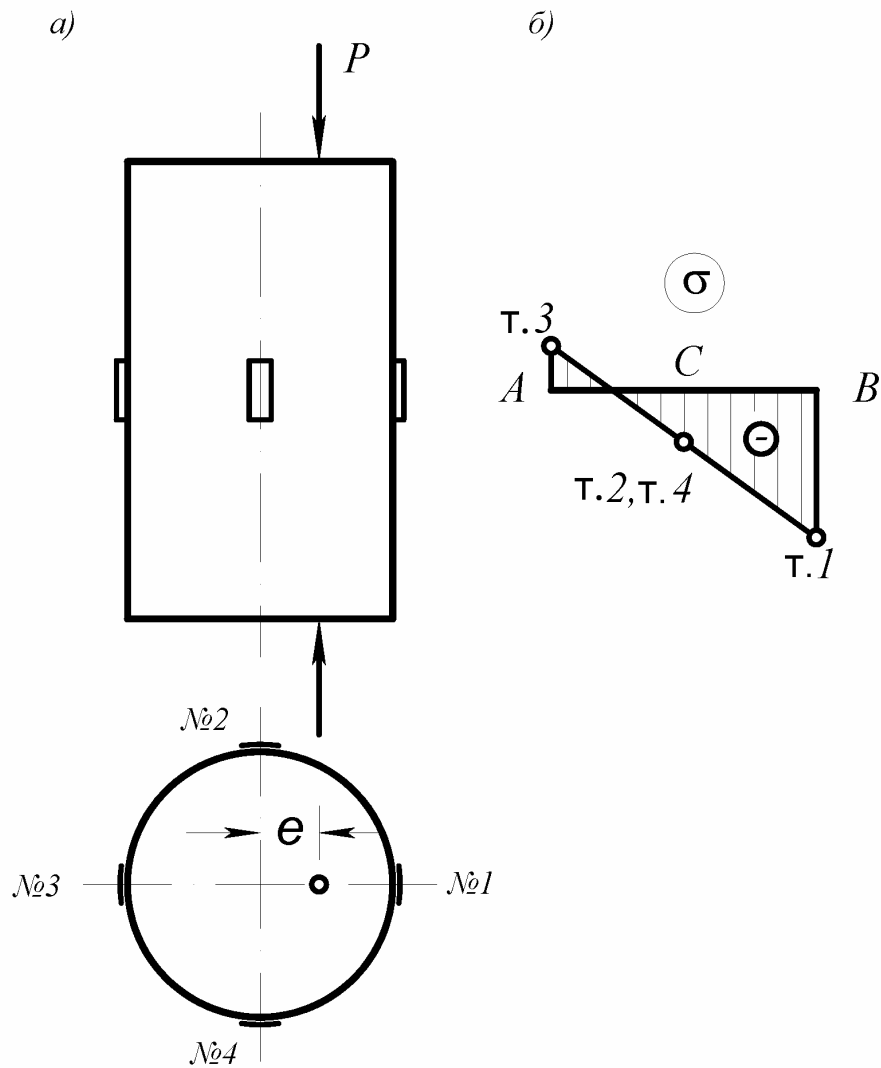


Рис.31. Определение нормальных напряжений при внецентренном сжатии: а – схема нагрузки; б – эпюра нормальных напряжений.

Порядок проведения эксперимента. Для обмятия опорных частей (ликвидация зазора) рекомендуется дать начальную нагрузку, которая принимается за нулевой отсчет. Дальнейшее увеличение нагрузки следует вести равными ступенями (4-5 ступеней) с таким расчетом, чтобы максимальная нагрузка на образец не вызывала напряжений, превосходящих предел пропорциональности. С помощью регистрирующего прибора для каждого тензорезистора на ступени нагрузки фиксируются отсчеты. Разность между последующим и предыдущим отсчетами дает приращение отсчета на каждую ступень нагрузки (Δ).

Затем определяется среднее (среднеарифметическое) значение приращения отсчета для каждого тензорезистора (Δ_{cp}). По средним приращениям вычисляются относительные деформации:

$$\varepsilon = k \cdot \Delta_{cp},$$

где k – цена единицы приращения показаний измерительного прибора.

Учитывая, что напряженное состояние является одноосным, закон Гука используется в виде:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – модуль упругости.

Во всех 4-х точках подсчитываются опытные значения напряжений, а по формуле (6.6) определяются их теоретические значения. Подсчитывается процент расхождений опытных и теоретических результатов.

По экспериментальным данным строится эпюра нормальных напряжений (рис.31,б).

В точке С откладывается среднее напряжение точек 2 и 4.

Среднеарифметическое напряжение во всех 4-х точках даст напряжение центрального сжатия.

Отсчеты по приборам заносятся в табл.8.

Таблица 8

Нагрузка	Номер тензорезистора							
	1		2		3		4	
	Отсчет	Приращение	Отсчет	Приращение	Отсчет	Приращение	Отсчет	Приращение

Контрольные вопросы.

1. Что называется внецентренным сжатием?
2. Какие внутренние усилия возникают в общем случае внецентренного приложения силы?
3. Как определяются нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения при внецентренном сжатии?
4. Какой случай называется плоским случаем внецентренного сжатия?
5. Как определяется положение нулевой линии?
6. Что называется ядром сечения?
7. Чему равны нормальные напряжения в центре тяжести поперечного сечения при внецентренном приложении силы?

Лабораторная работа № 7

Определение перемещений при косом изгибе

Цели работы:

1. Определение опытным путем величины и направления прогиба свободного конца консольной балки, работающей в условиях косоугольного изгиба;
2. Сравнение полученных результатов с теоретическими, вычисленными для такого же случая нагружения.

Общие положения.

Косым изгибом называется такой изгиб, когда плоскость действия суммарного изгибающего момента в сечении балки не совпадает с главными плоскостями инерции. Различают два вида косоугольного изгиба: *плоский* и *пространственный*.

Плоский косоугольный изгиб имеет место, когда все поперечные нагрузки действуют в одной плоскости, не совпадающей с главными плоскостями инерции. Эта плоскость называется *силовой плоскостью*, а линия ее пересечения с плоскостью поперечного сечения балки – *силовой линией*. Угол наклона силовой плоскости α_p отсчитывается от вертикальной главной оси.

Пространственный косоугольный изгиб имеет место при действии поперечных нагрузок в разных плоскостях.

При косоугольном изгибе в поперечном сечении стержня возникают две поперечные силы и два изгибающих момента.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня при косоугольном изгибе определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z. \quad (7.1)$$

При косоугольном изгибе напряжения изменяются по координатам y и z по линейному закону.

Приравняв выражение (7.1) к нулю, получим уравнение прямой, в каждой точке которой $\sigma = 0$. Эта прямая называется *нулевой линией*. Уравнение нулевой линии при косоугольном изгибе имеет вид

$$y = -\frac{J_z M_y}{J_y M_z} z. \quad (7.2)$$

Нулевая линия при косоугольном изгибе проходит через центр тяжести сечения.

Если обозначить через α_0 угол между нулевой линией и главной осью Oz , то получим:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{y}{z} = -\frac{J_z M_y}{J_y M_z} = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha_p. \quad (7.3)$$

Наибольшие растягивающие и сжимающие нормальные напряжения действуют в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии. Эпюра нормальных напряжений строится на прямой, перпендикулярной к нулевой линии.

Для сечений с двумя осями симметрии наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения равны по абсолютной величине и действуют в угловых точках:

$$\sigma_{нб} = |\sigma_{нм}| = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y}, \quad (7.4)$$

где W_z и W_y - моменты сопротивления сечения.

Условие прочности при косом изгибе для балок с отмеченным типом поперечного сечения и из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, имеет вид:

$$\sigma_{нб} = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq \gamma_c R. \quad (7.5)$$

При определении прогибов балки при косом изгибе необходимо действующие на балку нагрузки разложить на составляющие по направлениям главных осей инерции и определить по отдельности прогибы по направлениям этих осей (v и w). Суммарный прогиб определяется по формуле:

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}. \quad (7.6)$$

При плоском косом изгибе перемещения точек оси балки происходят в плоскости, перпендикулярной нулевой линии, и, следовательно, в общем случае направление суммарного прогиба не совпадает с направлением действия нагрузки. Изогнутая ось представляет собой кривую, расположенную в плоскости изгиба, не совпадающей с силовой плоскостью. Направление суммарного прогиба совпадет с направлением действия нагрузки при условии $J_z = J_y$, поскольку в этом случае нулевая и силовая линии взаимно перпендикулярны.

При пространственном косом изгибе стержня нормальные напряжения в поперечном сечении определяются как и при плоском косом изгибе, а угол наклона нулевой линии - по общей формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_z}. \quad (7.7)$$

Угол наклона нулевой линии при пространственном косом изгибе по длине балки изменяется. Изогнутая ось балки является *пространственной кривой*.

Для консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой на свободном конце, прогибы в направлении главных осей $0z$ и $0y$ определяются по формулам:

$$f_z = \frac{P_z l^3}{3EJ_y} = \frac{Pl^3 \sin \alpha_p}{3EJ_y}, \quad (7.8)$$

$$f_y = \frac{P_y l^3}{3EJ_z} = \frac{Pl^3 \cos \alpha_p}{3EJ_z}, \quad (7.9)$$

где P_z и P_y – составляющие силы P по осям z и y ;

α_p – угол между направлением силы и осью y ;
 E – модуль упругости материала;
 J_z и J_y – осевые моменты инерции поперечного сечения балки относительно главных осей z и y .

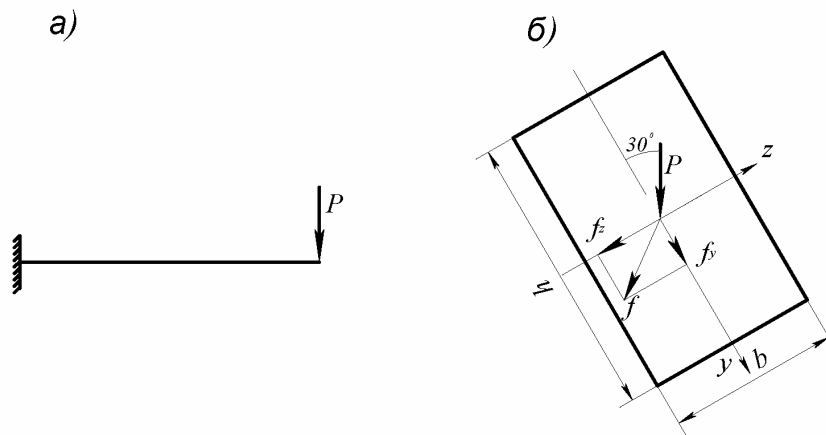


Рис.32. Схема нагружения балки при косом изгибе

В лабораторной работе используется стальная консольная балка прямоугольного сечения.

Схема нагружения балки при косом изгибе приведена на рис.32.

Работа проводится на специальной установке, общий вид которой приведен на рис.33.

Один конец испытываемой балки 1 жестко закреплен в опорном устройстве 2; на свободном конце балки подвешена штанга 3 с площадкой для грузов 4. Для измерения перемещений f_z и f_y используются два индикатора часового типа 5. Величина прогиба определяется по формуле:

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2}$$

Угол γ между осью y и направлением полного прогиба f определяется по формуле:

$$\gamma = \arctg \frac{f_z}{f_y}$$

Опытное значение угла β (см. рис.32) между направлением полного прогиба f и линией действия силы определяется по формуле:

$$\beta = \gamma - 30^\circ$$

Порядок проведения эксперимента.

С помощью специальных держателей устанавливаются индикаторы часового типа для определения горизонтальных и вертикальных перемещений балки. На конец балки подводится штанга с площадкой для установки грузов и записываются показания индикаторов, приняв их за нулевые.

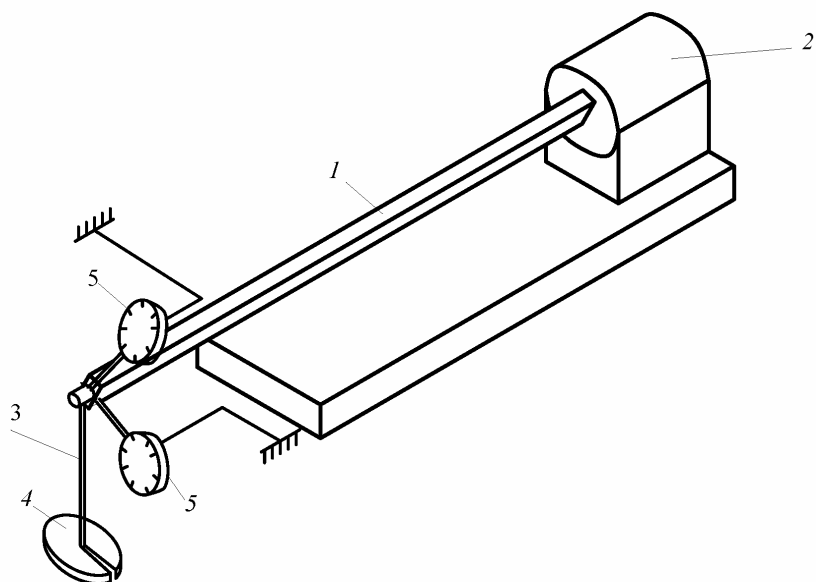


Рис.33. Установка для определения перемещений при косом изгибе балки: 1 – испытуемая балка; 2 – опорное устройство; 3 – штанга; 4 – груз; 5 – индикатор часового типа.

Последовательными ступенями нагружается балка с помощью грузов, устанавливаемых на площадку. Показания индикаторов регистрируются на каждой ступени. Все результаты опыта заносятся в табл.9.

Таблица 9

Нагрузка P , кН	Отсчет по индикаторам			
	вертикальному		горизонтальному	
	Отсчет	Приращение, мм	Отсчет	Приращение, мм

По опытным данным f_z и f_y определяется прогиб f и углы γ и β . Результаты сравниваются с теоретически вычисленными.

Контрольные вопросы.

1. Что такой косой изгиб?
2. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях балки при косом изгибе?
3. Совпадает ли направление полного прогиба с направлением действия силы при косом изгибе?
4. Зависит ли величина прогиба при косом изгибе от модуля упругости материала балки?
5. Зависит ли направление перемещения оси стержня от величины действующей нагрузки?

Лабораторная работа № 8

Определение критической силы для гибкого сжатого стержня.

Цель работы: - экспериментальное определение величины критической силы для гибкого сжатого стержня и сравнение ее с теоретическим значением.

Общие положения. Для надежной работы конструкции в целом и ее элементов необходимо выполнение условий прочности и в ряде случаев - выполнение условий жесткости. Однако практика показывает, что условия прочности и жесткости являются необходимыми, но не достаточными условиями. Это имеет место в тех случаях, когда в конструкции имеются стержни, работающие на сжатие. Такие стержни в зависимости от величины сжимающих усилий могут потерять прямолинейную форму равновесия и изогнуться, т.е. потерять *устойчивость*.

Наряду с проблемой прочности существует проблема так называемой *устойчивости* конструкции и ее элементов.

Существуют три вида равновесия тел: *устойчивое, безразличное и неустойчивое*.

Устойчивым называется такое равновесие, при котором тело, выведенное какой-либо внешней силой из положения равновесия, возвращается в это положение после прекращения действия силы.

Безразличным называется такое равновесие, когда тело после малого отклонения остается в равновесии и в новом положении.

Неустойчивым называется такое равновесие, когда тело после малого отклонения не возвращается в исходное положение, а удаляется от него.

Изучение устойчивости начнем с задачи о равновесии прямого гибкого стержня, сжатого центрально приложенной к верхнему сечению силой P (рис.34).

В зависимости от величины силы P возможны следующие случаи:

1. Продольная сила P относительно невелика. Прямолинейная форма равновесия является устойчивой.

2. При достижении силой P некоторого значения стержень после устранения возмущений остается в изогнутом состоянии под действием сжимающей силы. Это явление носит название *продольного изгиба*. Такую силу назовем *критической силой* $P_{кр}$.

3. При дальнейшем увеличении сжимающей силы происходит нарастание прогибов и возникают значительные дополнительные напряжения изгиба.

Явление продольного изгиба опасно тем, что при нем происходит интенсивное нарастание прогибов при малом нарастании сжимающей силы. Быстрое нарастание прогибов вызывает быстрое нарастание напряжений от изгиба.

Для тонких стержней (гибких стержней) потеря устойчивости часто наступает при сравнительно небольших сжимающих напряжениях, не являющихся опасными с точки зрения прочности самого материала.

Продольный изгиб является опасным, его допускать нельзя.

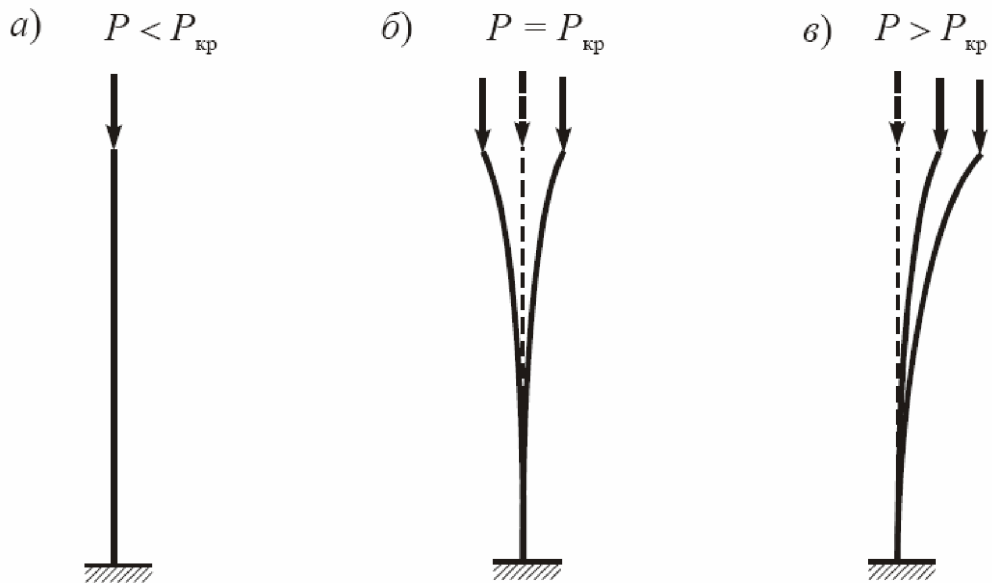


Рис.34.

Проверка сжатого стержня на устойчивость сводится к сопоставлению величины фактической сжимающей силы с критической силой, соответствующей идеализированному стержню той же жесткости и при такой же схеме работы.

Определение критической силы. Критической силой $P_{кр}$ называется наименьшее значение центрально приложенной сжимающей силы P , при котором наряду с прямолинейной формой равновесия возможна и искривленная форма равновесия. При определении критической силы $P_{кр}$ сначала необходимо определить гибкость стержня λ :

$$\lambda = \frac{l_0}{i}, \quad (8.1)$$

где l_0 - приведенная длина;

i - радиус инерции поперечного сечения.

Приведенная длина определяется по формуле:

$$l_0 = \mu l, \quad (8.2)$$

где μ - коэффициент приведения длины.

Коэффициент приведения длины μ равен отношению длины полуволны синусоиды, выделенной на изогнутой оси стержня и равной расстоянию между точками перегиба, к его фактической длине. Он зависит от способов закрепления концов стержня. Значения коэффициента приведения и выражения для критических сил для некоторых случаев опорных закреплений приведены на рис.35.

Формула Эйлера для определения критической силы.

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}. \quad (8.3)$$

Из формулы (8.3) следует, что значение критической силы прямо пропорционально жесткости EJ поперечного сечения стержня при изгибе и обратно пропорционально квадрату приведенной длины стержня. Если условия закрепления стержня в обеих главных плоскостях одинаковы, то критическую силу следует вычислять по значению инерции J_{min} . Потеря устойчивости, как правило, происходит в плоскости наименьшей жесткости. При этом в выражение гибкости входит минимальный радиус инерции i_{min} поперечного сечения.

При различных условиях закрепления стержня в главных плоскостях Oxy и Oxz ($\mu_y \neq \mu_z$) необходимо вычислить два значения критической силы:

$$P_{\text{кр}}^{(y)} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(\mu_y l)^2}, \quad P_{\text{кр}}^{(z)} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(\mu_z l)^2}. \quad (8.4)$$

Условие применимости формулы Эйлера можно представить в виде

$$\lambda \geq \lambda_1, \quad (8.5)$$

где λ_1 называется *предельной гибкостью* и определяется по формуле:

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{мц}}}}. \quad (8.6)$$

Стержни, для которых выполняется условие (8.5), называются *стержнями большой гибкости*. Предельная гибкость зависит от величины модуля упругости E и предела пропорциональности $\sigma_{\text{мц}}$ материала стержня. Для стали марки ВСт3 $\lambda_1 \approx 100$ и условием применимости формулы Эйлера можно считать

$$\lambda \geq 100. \quad (8.7)$$

Величина предельной гибкости для дерева $\lambda_1 = 70$, для чугуна $\lambda_1 = 80$.

Стальные стержни, для которых выполняется условие

$$60 \leq \lambda \leq 100, \quad (8.8)$$

называются стержнями *средней гибкости*

Критические напряжения в этом случае определяются по формуле:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b \lambda, \quad (8.9)$$

где a и b - эмпирические коэффициенты, зависящие от свойств материала стержня и имеющие размерность напряжения. Для стали марки ВСт3 с пределом пропорциональности $\sigma_{\text{мц}} = 200$ МПа и пределом текучести $\sigma_{\text{T}} = 240$ МПа: $a = 310$ МПа и $b = 1,14$ МПа.

Стальные стержни, для которых $\lambda \leq 60$, называются *стержнями малой гибкости*. Они разрушаются не в результате потери устойчивости, а в результате потери прочности. При этом принимается:

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{T}} \quad (8.10)$$

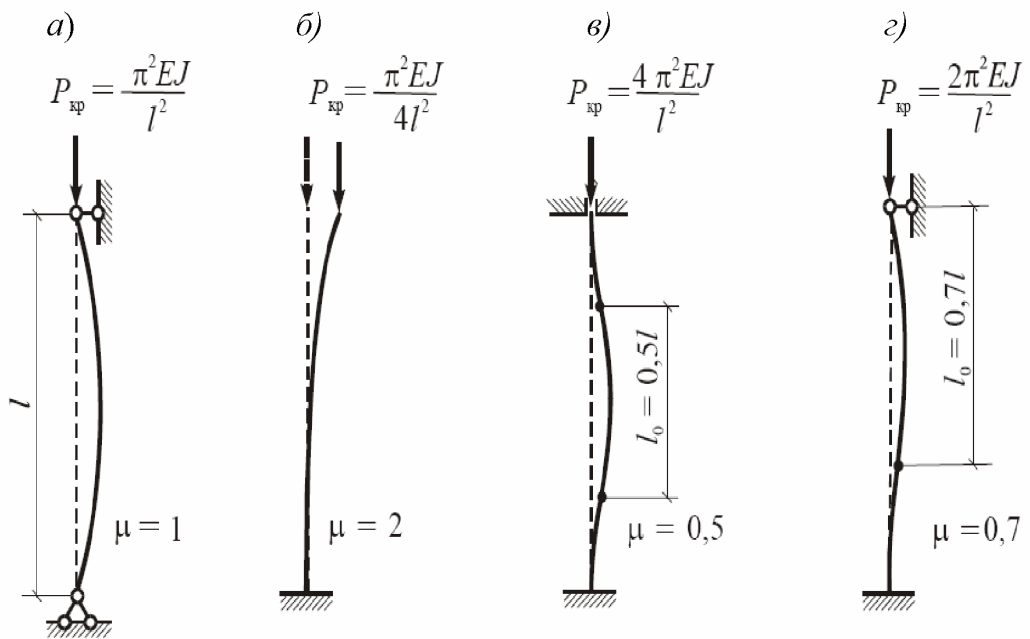


Рис.35.

Критическими называются напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня при сжатии его критической силой $P_{кр}$. По формуле Эйлера имеем:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F}, \text{ или } \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (8.11)$$

Условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi \gamma_c R, \quad (8.12)$$

где

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{n \sigma_T}, \quad (8.13)$$

n - коэффициент, учитывающий снижение несущей способности стержня за счет случайных эксцентриситетов приложения сжимающей силы и начального искривления оси.

Величина n зависит от гибкости стержня λ .

Коэффициент φ характеризует уменьшение расчетного сопротивления R при сжатии за счет продольного изгиба.

Коэффициент φ называется *коэффициентом уменьшения расчетного сопротивления при продольном изгибе* или *коэффициентом продольного изгиба*. Он зависит от гибкости и свойств материала стержня и меньше единицы.

Проведение работы. В лабораторной работе экспериментальное определение величины критической силы производится с помощью разрывной машины Р-0.5. Для создания сжимающей нагрузки в разрывной машине используется специальное приспособление, называемое реверсором. Схема реверсора приведена на рисунке 36. Он состоит из двух жестких

прямоугольных рамок – наружной 1 и внутренней 2, которые могут скользить одна относительно другой. Верхний конец испытуемого стержня 3 соединен с внутренней рамкой, связанной с нижним захватом испытательной машины. Нижний конец образца соединен с внешней рамкой, связанной с верхним захватом машины.

В середине длины образца с помощью индикатора часового типа измеряется его горизонтальное перемещение.

Увеличивая силу с определенным шагом, называемым ступенью нагрузки, и измеряя одновременно горизонтальное перемещение образца, отмечаем, что до определенной величины нагрузки эти перемещения очень не велики. При достижении определенной нагрузки наблюдается быстрый рост перемещений, измеряемых индикатором. Эта нагрузка является критической. (Таблица 10).

Полученное экспериментально значение критической силы сопоставляем с теоретическим значением.

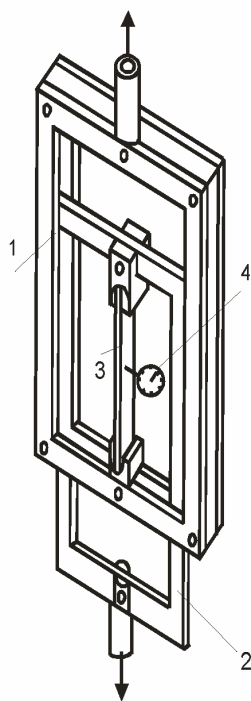


Рис.36. Схема реверсора: 1 – наружная рама; 2 – внутренняя рама; 3 – испытуемый стержень; 4 – индикатор часового типа.

Таблица 10

Нагрузка Р	Прогиб в середине стержня, мм	
	Отсчет	Приращение

Сопоставление результатов опыта и теоретического расчета

Таблица 11

Измеряемая величина	Опытное значение	Теоретическое значение	Расхождение, %
$P_{кр}$			

Контрольные вопросы.

1. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
2. Какую силу называется критической силой?
3. Что называется гибкостью стержня?
4. Какие напряжения называются критическими?
5. Какой вид имеет формула Эйлера для определения критической силы?
6. Как влияют жесткость EJ поперечного сечения и длина стержня l на величину критической силы?
7. Что представляет собой коэффициент приведения длины и чему он равен при различных условиях закрепления концов сжатых стержней?
8. Что называется предельной гибкостью?
9. Как записывается условие устойчивости сжатого стержня?
10. Что представляет собой коэффициент φ ?

Лабораторная работа № 12

Экспериментальное определение опорной реакции в статически неопределимой раме

Цель работы: – определение экспериментальным путем значения опорной реакции в статически неопределимой раме и сравнение ее с величиной, полученной в результате теоретического расчета.

Общие сведения. Статически неопределимыми стержневыми системами называются системы, у которых количество опорных реакций больше количества уравнений статики, которые можно использовать для их определения. Такие системы называются внешне статически неопределимыми. Кроме них существуют и внутренне статически неопределимые системы, которые характеризуются наличием замкнутых контуров. В настоящей работе рассматривается один раз внешне статически неопределимая рамная система (рама). Расчетная схема представлена на рис.36.

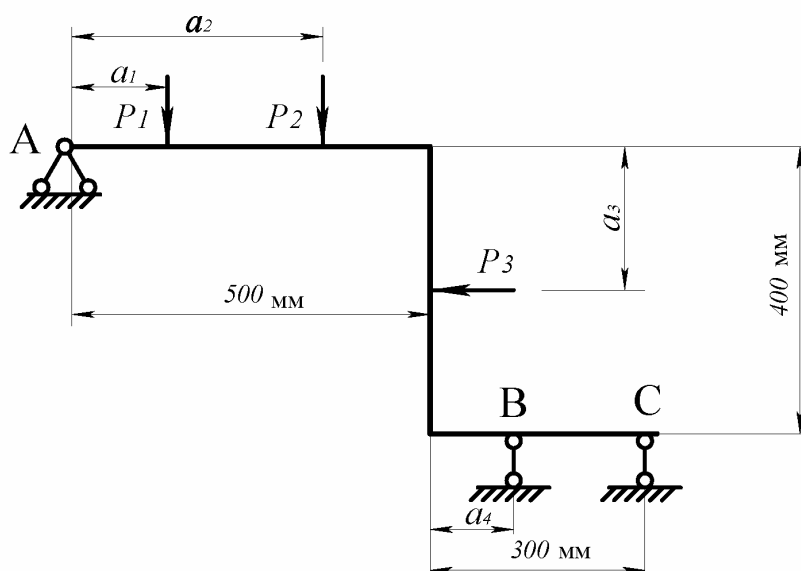


Рис.36. Расчетная схема статически неопределимой рамы.

Все три стержня, составляющие раму, имеют одинаковое поперечное сечение. Размеры a_1 , a_2 , a_3 , a_4 и величины сил P_1 , P_2 , P_3 задаются преподавателем.

В лабораторной работе исследуемая рама 8(рис.37) прикреплена к шарнирно неподвижной опоре 7 и шарнирно подвижной опоре 9. Эти опоры размещены на сравнительно более жесткой, чем испытываемая, опорной раме 6.

В точках приложения сосредоточенных сил закреплены стальные струны, к которым подвешиваются грузы 2, 3, 4. Для задания горизонтально направленной силы P_3 служит блок 5, через который проходит струна, соединенная с грузом 4 и точкой приложения силы P_3 . Индикатор часового

типа 10 с помощью штатива II закреплен на раме основания и служит для замера перемещений в точке приложения лишней связи (шарнирно подвижной опоры). В этой же точке закреплена струна, связанная с грузом 1.

Общий вид установки представлен на рис.37.

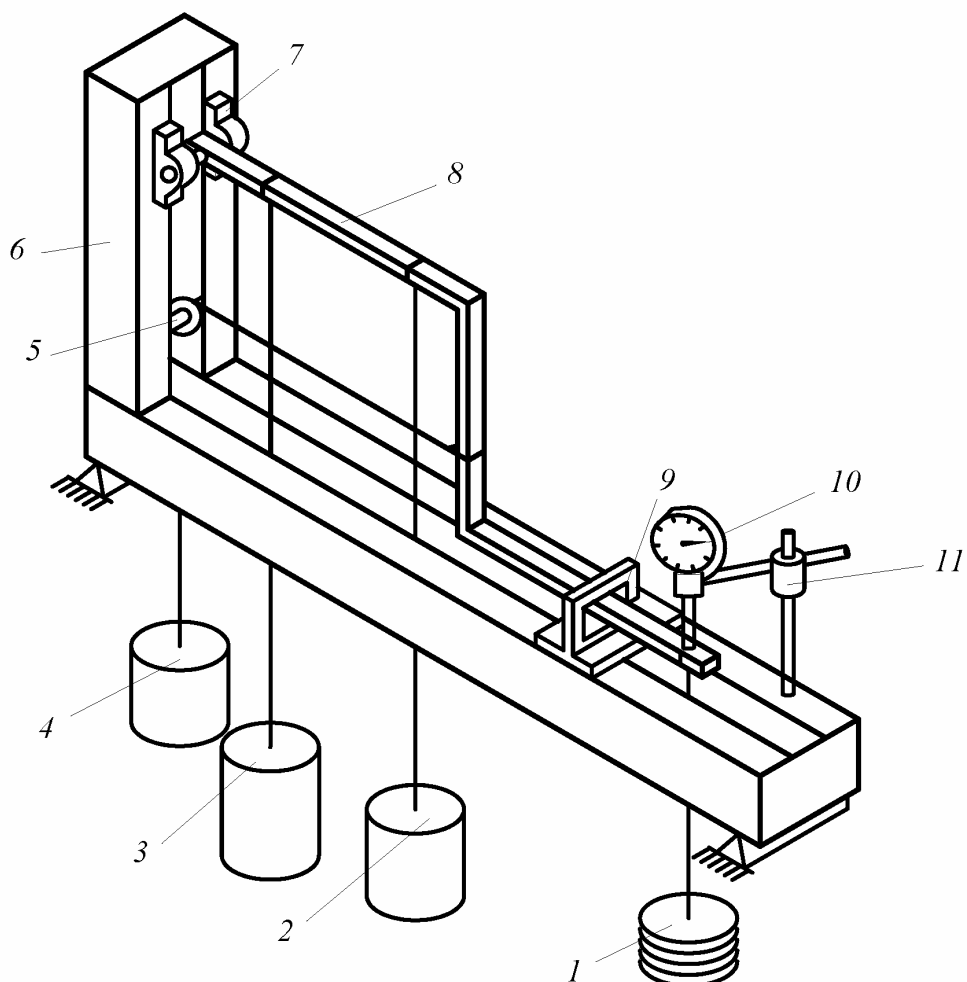


Рис.37. Установка для определения реакции в статически неопределимой раме. 1, 2, 3, 4 – грузы, 5 – блок; 7 – шарнирно неподвижная опора; 8 – исследуемая рама; 9 – шарнирно подвижная опора; 10 – индикатор часового типа; 11 – штатив.

Проведение эксперимента. При ненагруженной раме 8 производится первоначальный отсчет по индикатору часового типа. Затем после приложения внешней нагрузки вновь производится отсчет по индикатору. Разница в отсчетах индикатора будет равна перемещению основной системы от внешней нагрузки в точке приложения лишней связи. С помощью груза 1 необходимо добиться того, чтобы показания индикатора были равны показаниям при ненагруженной раме. В этом случае вес груза 1 будет равен силе реакции в лишней (отброшенной) опоре.

Теоретический расчет. Ниже приводится расчет для одного из вариантов нагружения рамы. Расчетная схема изображена на рис.38,а. Там же представлена и основная система (рис.38,б).

Для построения эпюры моментов в основной системе от внешней нагрузки определяем реакции:

$$\sum X = 0, H_A = P_3 = 10 \text{ Н}$$

$$\sum M_A = -15 \cdot 20 - 10 \cdot 30 + R_B \cdot 60 = 0, \text{ откуда } R_B = 16,67 \text{ Н};$$

$$\sum M_B = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 15 \cdot 40 - 10 \cdot 40 - R_A \cdot 60 = 0, \text{ откуда } R_A = 8,33 \text{ Н}.$$

На рис.38, в, г изображены эпюры M_P и \bar{M}_1 .

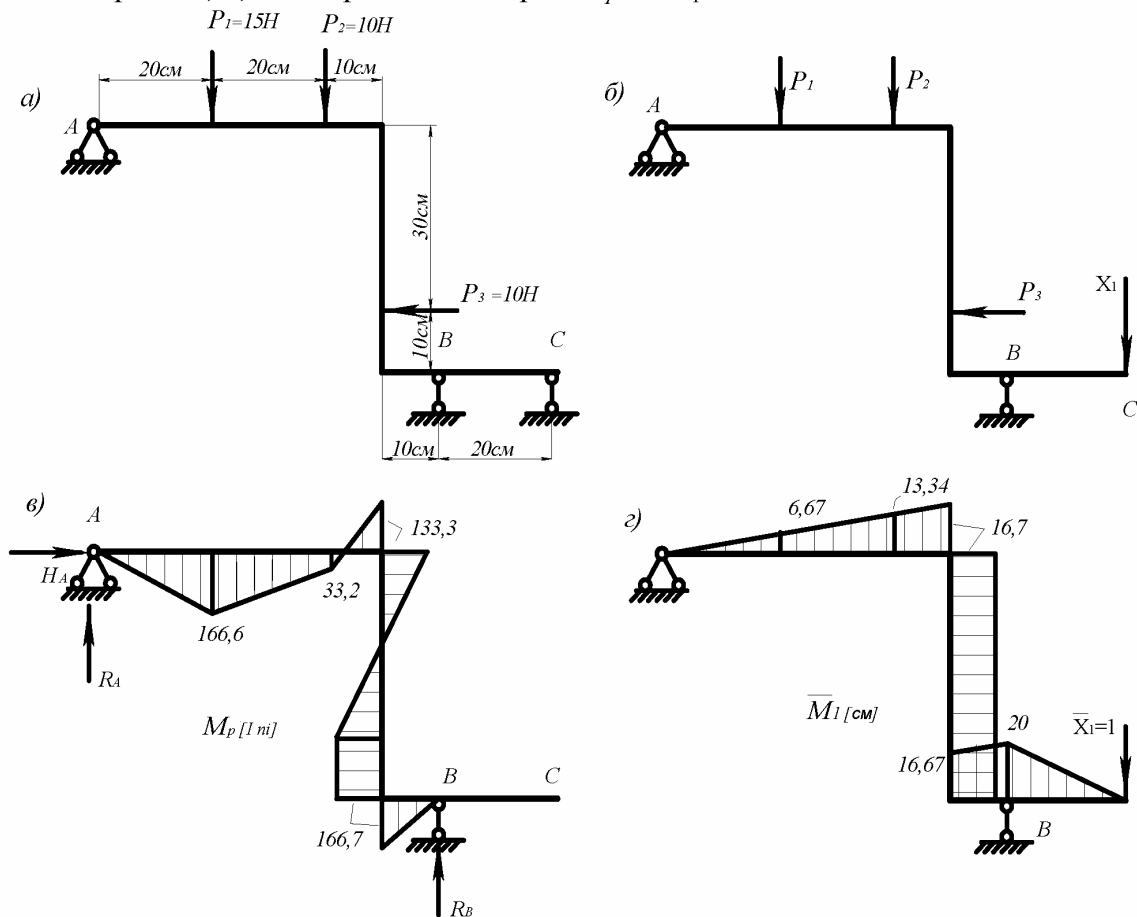


Рис. 38. Определение опорной реакции статически неопределимой рамы: а – исходная система; б – основная; в – эпюра моментов от внешней нагрузки; г – эпюра моментов от единичной силы.

Перемещение точки C от единичной силы, приложенной в той же точке, будет равно

$$\delta_{11} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} [\bar{M}_1 \times \bar{M}_1] = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 16,67 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16,67 + 16,67 \cdot 40 \cdot 16,67 + \right. \\ \left. + \frac{10}{3} (16,67^2 + 20^2 + 16,67 \cdot 20) + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 20 \right] = \frac{21784}{EJ}.$$

Перемещение в точке C от внешней нагрузки определяем с помощью метода Мора, перемножая эпюры по правилу Верещагина:

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \int_s \frac{M_p \bar{M}_1}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \int_s M_p \bar{M}_1 ds = \frac{1}{EJ} [M_p \times \bar{M}_1] = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} \cdot 166,6 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6,67 - \frac{20}{6} (2 \cdot 166,6 \cdot 6,67 + 2 \cdot 33,2 \cdot 13,33 + 166,7 \cdot 13,33 + 33,2 \cdot 6,67) + \right. \\ &+ \frac{10}{6} (-2 \cdot 33,2 \cdot 13,33 + 2 \cdot 133,3 \cdot 16,67 + 13,33 \cdot 133,3 - 33,2 \cdot 16,67) + \frac{1}{2} \cdot 133,3 \cdot 30 \cdot 16,67 - \\ &\left. - \frac{1}{2} \cdot 166,7 \cdot 30 \cdot 16,67 - 166,7 \cdot 10 \cdot 16,67 - \frac{10}{6} (2 \cdot 166,7 \cdot 16,67 + 166,7 \cdot 20) \right] = -\frac{68889}{EJ}. \end{aligned}$$

Неизвестное значение опорной реакции X_1 находим из канонического уравнения:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} &= 0, \\ X_1 &= 3,16H. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы.

1. Какие системы называются статически неопределимыми?
2. Что называется степенью статической неопределимости системы?
3. Какая система называется геометрически изменяемой?
4. Что представляет собой основная система и как она выбирается?
5. Что выражает каждое из канонических уравнений?
6. Каков физический смысл произведений $X_1 \delta_{11}$, $X_2 \delta_{12}$?