

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Конспект лекций

Изложены основные вопросы сопротивления материалов, изучаемые в первом семестре обучения. Отличительной особенностью книги является наличие обобщающих иллюстраций к каждой теме, служащих лучшему усвоению и закреплению материала. Краткость изложения достигается за счет тщательного отбора материала и нетрадиционного построения книги.

Предназначен для студентов высших технических учебных заведений.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ	5
1.1. Цель и задачи курса	5
1.2. История возникновения	6
1.3. Реальная конструкция и ее расчетная схема	7
1.4. Внутренние силы	11
1.5. Перемещения и деформации	17
1.6. Общие принципы расчета элементов конструкций	19
Иллюстрации к теме “Основные положения”	23
2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ	24
2.1. Внутренние силы и напряжения в поперечных сечениях. Расчет на прочность	24
2.2. Деформации и перемещения. Расчет на жесткость	28
2.3. Учет собственного веса	31
2.4. Потенциальная энергия упругой деформации	35
2.5. Статически определимые и статически неопределимые системы	35
2.6. Механические свойства материалов	40
2.7. Запас прочности и допускаемые напряжения	50
Иллюстрации к теме “Растяжение и сжатие”	54
3. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ	57
3.1. Общие сведения	57
3.2. Линейное напряженное состояние	59
3.3. Плоское напряженное состояние	60
3.4. Зависимости между напряжениями и деформациями	63
3.5. Удельная потенциальная энергия упругой деформации	66
3.6. Гипотезы прочности	68
Иллюстрации к теме “Теория напряженного состояния и гипотезы прочности”	72

4.	ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ	73
4.1.	Статические моменты. Определение центра тяжести	73
4.2.	Моменты инерции	74
4.3.	Преобразование моментов инерции при параллельном переносе осей	75
4.4.	Преобразование моментов инерции при повороте осей	77
4.5.	Некоторые практические выводы и рекомендации	79
5.	КРУЧЕНИЕ	81
5.1.	Кручение стержней круглого сечения	81
5.2.	Кручение стержней некруглого сечения	87
5.3.	Рациональные формы сечений при кручении	91
5.4.	Расчет цилиндрических винтовых пружин с малым шагом	92
	Иллюстрации к теме “Кручение”	97
6.	ПЛОСКИЙ ПРЯМОЙ ИЗГИБ	98
6.1.	Общие сведения	98
6.2.	Определение напряжений и расчет на прочность	99
6.3.	Определение перемещений и расчет на жесткость	106
6.4.	Экономические аспекты теории изгиба	117
	Иллюстрации к теме “Плоский прямой изгиб”	123
	ПРИЛОЖЕНИЕ 1	
	ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ	125
1.	ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ И ОСНОВНЫЕ ВИДЫ НАГРУЖЕНИЯ	126
2.	ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ	127
3.	ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ	129
3.1.	Линейное напряженное состояние	130
3.2.	Плоское напряженное состояние	130
4.	ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ	131

5.	КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫХ ВАЛОВ	132
6.	ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ	133
7.	ПЛОСКИЙ ПРЯМОЙ ИЗГИБ	134
7.1.	Определение напряжений и расчет на прочность	135
7.2.	Определение перемещений и расчет на жесткость	136
8.	СИЛОВЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ НЕКОТОРЫХ БАЛОК	138
9.	СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ	139
10.	СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ	140
10.1.	Косой изгиб	140
10.2.	Изгиб с кручением	141
10.3.	Внецентренное продольное нагружение	141
11.	УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ	142
11.1.	Продольный изгиб	142
11.2.	Продольно-поперечный изгиб	143
11.3.	Устойчивость труб	143
12.	ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ	144
12.1.	Учет сил инерции	144
12.2.	Действие удара на конструкцию	144
12.3.	Колебания упругих систем с одной степенью свободы	144
13.	ПЕРЕМЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ	145
14.	ТОНКОСТЕННЫЕ СОСУДЫ	146
15.	ТОЛСТОСТЕННЫЕ ТРУБЫ	147
15.1.	Труба, нагруженная внутренним и внешним давлением (задача Ламе)	147
15.2.	Составные соединенные с натягом цилиндры	148
16.	ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ СТЕРЖНИ	148
	ПРИЛОЖЕНИЕ 2	
	РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	150

ПРИЛОЖЕНИЕ 3	
БАНК ДИАГРАММ РАСТЯЖЕНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ	166
ПРИЛОЖЕНИЕ 4	
СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ	188

ПРЕДИСЛОВИЕ

Кто бы ни взялся писать учебное пособие типа настоящего конспекта лекций, посвященного столь обширной области, как наука о прочности материалов и конструкций, он всегда будет чувствовать, что критически настроенные читатели найдут в нем и ошибки, и упущения и вообще недостатки, присущие всякому продукту человеческой деятельности. Тем не менее, автор рискнул вынести на суд читателей свой труд в силу нескольких обстоятельств.

Во-первых, это естественное желание обобщить свой опыт преподавания и сделать его достоянием коллег, в особенности молодых преподавателей, начинающих свою педагогическую карьеру в области прочности.

Во-вторых, для многих специальностей объем курса существенно сокращен и студенты не имеют реальной возможности проработать солидные учебники. Они нуждаются в очень кратких руководствах, которые содержали бы тщательно отобранную информацию первостепенной важности. Сюда же следует отнести и студентов вечерней и заочной форм обучения, которые, сочетая учебу с работой на производстве, вынуждены изучать эту непростую науку в условиях острейшего дефицита времени.

В-третьих, сокращение объема аудиторных занятий при возрастающих год от года требованиях к качеству подготовки специалистов диктует необходимость широкого внедрения в учебный процесс новых и интенсивных форм обучения. Существенную роль в решении проблемы интенсификации обучения и подготовки специалистов XXI века призвана сыграть аудиовизуальная технология ведения учебного процесса, которая открывает новые возможности для наглядного самораскрытия студентами изучаемых дисциплин. Внедрению этой технологии обучения предшествует разработка аудиовизуального курса, в основе которого лежит компактно представленная информационная часть, раздаваемая студентам в виде конспекта лекций.

Настоящее пособие содержит материалы базового курса, к которому относятся разделы, посвященные основным видам деформации (растяжению, сжатию, кручению и изгибу), механическим свойствам важнейших конструкционных материалов, теории напряженного состояния и гипотезам прочности. В завершение каждого раздела, для активизации самостоятельной работы студентов и обеспечения глубокого и сознательного изучения предмета, даются вопросы для самопроверки.

Для читателей, желающих глубже и полнее изучить предмет или тот или иной раздел, имеется обширный список рекомендуемой литературы, насчитывающий 50 литературных источников. Все они снабжены необходимыми библиографическими данными и краткими аннотациями, что облегчает поиск подходящей книги.

Данное пособие, безусловно, несет на себе отпечаток авторской индивидуальности. Это касается и его построения, и отбора материала, и методики изложения. Автор писал так, как подсказывал ему многолетний опыт преподавания, сформировавшийся на протяжении 45 лет работы в высшей школе. Надеюсь, его за это не осудят. И все же, автор критически оценивает свой труд, ибо не всегда намерение получило должное исполнение. Но главная цель будет достигнута, если в рамках этой небольшой по объему книги автору удалось передать смысл и дух удивительной науки под названием “Сопротивление материалов”.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Это научная поэма.

В. Гамильтон

1.1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ КУРСА

Все современные сооружения, машины и приборы должны удовлетворять трем основным требованиям. Они должны быть *надежными, долговечными* и *экономичными*. Термин надежность интуитивно понятен, хотя чуть ниже мы раскроем его более подробно.

Под *долговечностью* понимают свойство системы, обеспечивающее ее длительную работоспособность в заданных условиях эксплуатации. Долговечностью называют и продолжительность надежной работы конструкции. Экономичность достигается путем минимизации суммарных затрат на проектирование, изготовление и эксплуатацию конструкций и машин.

Под *надежностью* понимают способность механической системы выполнять заданные ей функции в заданных условиях эксплуатации в течение установленного срока. Прекращение выполнения хотя бы одной из этих функций называют *отказом*. К отказам, имеющим механическое происхождение, относятся:

- 1) *разрушение вследствие исчерпания прочности* (рис. 1.1, а);
- 2) *возникновение слишком больших деформаций из-за недостаточной жесткости конструкции* (рис. 1.1, б);
- 3) *потеря устойчивости первоначальной формы равновесия* (рис. 1.1, в).

Прочность есть свойство твердых тел воспринимать действие сил без разрушения. *Жесткость* – свойство твердых тел незначительно менять свои размеры и форму под действием сил. Под *устойчивостью* понимается способность конструкции или ее элементов сохранять первоначальную форму.

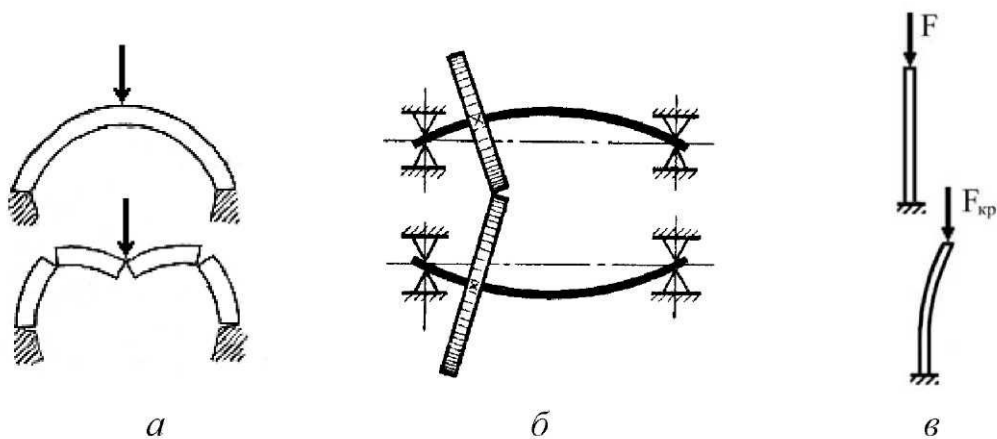


Рис. 1.1

Сопротивление материалов – это наука о расчете элементов конструкций и деталей машин на механическую надежность (прочность, жесткость, устойчивость).

Из данного определения вытекают и задачи, которые последовательно решаются в данном курсе. Среди наук, занимающихся вопросами надежности инженерных сооружений, сопротивление материалов как учебная дисциплина занимает вполне определенное место. Это – своего рода азбука расчетов на механическую надежность. Поэтому изучение этой науки, вернее сказать ее основ, совершенно необходимо для формирования инженера любой специальности.

1.2. ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ

Родоначальником науки о сопротивлении материалов по праву является Галилео Галилей, заложивший основы этой науки в своей знаменитой книге “Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению”. Книга была отпечатана фирмой Эльзевиров в Лейдене в 1638 г. Часть книги, посвященная механическим свойствам строительных материалов и исследованию прочности балок, представляет собой первый печатный труд в области сопротивления материалов.

1.3. РЕАЛЬНАЯ КОНСТРУКЦИЯ И ЕЕ РАСЧЕТНАЯ СХЕМА

В сопротивлении материалов, как и во всех естественных науках, исследование реального объекта начинается с выбора расчетной схемы, или, как еще говорят, с выбора расчетной модели. С этой целью необходимо произвести схематизацию объекта и отбросить все несущественные факторы.

Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, носит название *расчетной схемы*.

Расчетная схема в сопротивлении материалов включает в себя допущения, касающиеся внешних сил, структуры и свойств конструктивных материалов, формы элементов конструкций, а также характера протекания деформационных процессов.

Остановимся более подробно на этих допущениях.

Схематизация внешних сил. Реально существующие силы относятся либо к объемным (например, силы тяжести, силы инерции, силы магнитного притяжения), либо к поверхностным (например, давление жидкости и газа на стенки сосуда, давление ветра). В инженерных расчетах их упрощают и представляют в виде:

1. *Сосредоточенных сил* (рис. 1.2, а). Рисуя вектор силы тяжести \vec{G} , приложенный к центру тяжести C стержня, мы заменяем систему параллельных сил тяжести, распределенных по объему тела, равнодействующей силой. Аналогично поступают и с поверхностными силами. Например, при расчете рельса можно фактическую нагрузку от колеса, распределенную по небольшой площадке контакта по некоторому закону, заменить сосредоточенной равнодействующей силой \vec{F} . Сосредоточенные силы выражают в ньютонах (Н), килоньютонах (кН) или меганьютонах (МН).

2. *Сил, распределенных по линии*, иначе называемых погонной нагрузкой (рис. 1.2, б). Например, собственный вес стержня постоянного поперечного сечения представляется в виде равномерно распределенной погонной нагрузки постоянной интенсивно-

сти $q = \gamma A$, где γ – удельный вес материала стержня, A – площадь поперечного сечения. К погонной нагрузке приводится также система поверхностных сил, выражающих контактное взаимодействие между роликом и наружным или внутренним кольцом подшипника качения. Размерность погонной нагрузки: Н/м, кН/м.

3. *Сосредоточенных моментов M* , представляющих собой, как правило, момент присоединенной пары при параллельном переносе силы \vec{F} (рис. 1.2, в). Размерность момента: Н·м, кН·м.

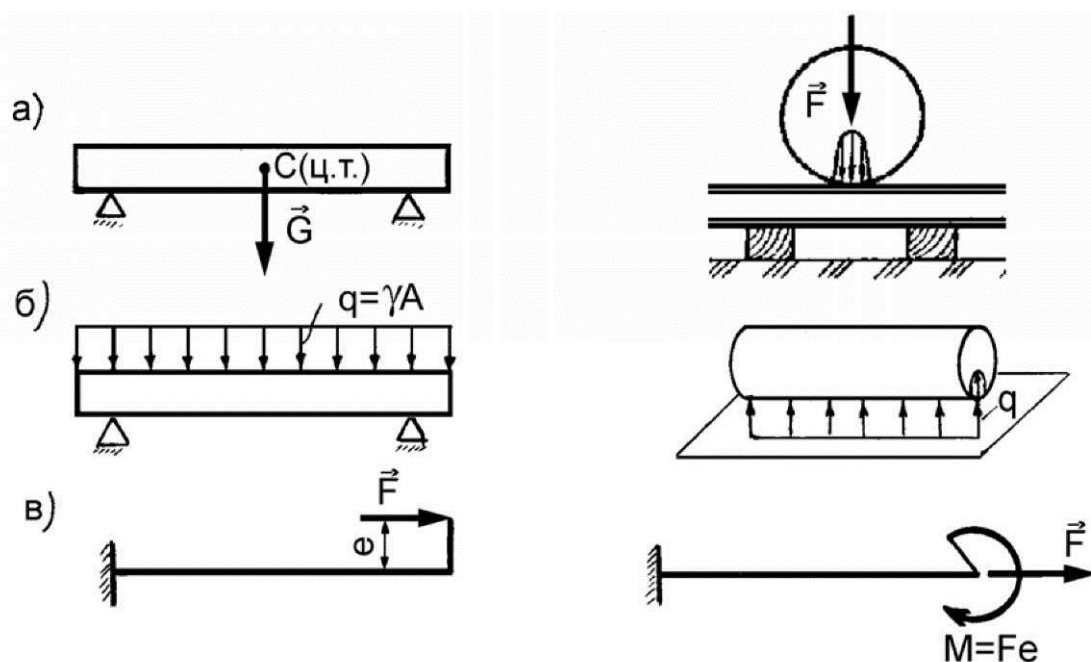


Рис. 1.2

Схематизация структуры и свойств конструкционных материалов. Она базируется на следующих фундаментальных гипотезах, согласно которым материал считается *сплошным* (не принимается во внимание корпускулярное строение материи), *однородным* (свойства одинаковы во всех точках), *изотропным* (свойства одинаковы во всех направлениях), *идеально упругим*, *подчиняющимся закону Гука*.

Схематизация формы. Все многообразие форм элементов конструкций сводится к 4 основным типам: стержню (брусу), пластине, оболочке и массиву.

В сопротивлении материалов изучают в основном методы расчетов на прочность, жесткость и устойчивость *стержня*, т.е. тела, одно измерение которого (длина) велико по сравнению с другими. Представим себе плоскую фигуру, перемещающуюся вдоль некоторой линии таким образом, что центр тяжести фигуры находится на этой линии, а плоскость фигуры ей перпендикулярна. Полученное в результате такого движения тело и есть стержень (рис. 1.3). Плоская фигура, движением которой стержень образован, является его *поперечным сечением*, а линия, вдоль которой перемещается центр тяжести, – осью стержня.

Ось стержня – это геометрическое место центров тяжести его поперечных сечений. В зависимости от формы оси стержня и того, как изменяется (или остается постоянным) его поперечное сечение, различают *прямые* и *кривые* стержни с постоянным, непрерывно или ступенчато изменяющимся поперечным сечением (рис. 1.4). В качестве некоторых примеров деталей, рассчитываемых как прямые стержни, можно указать приводной вал (рис. 1.5), любой из стержней фермы мостового или башенного крана; крюк крана рассчитывают как кривой стержень.

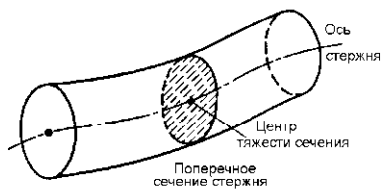


Рис. 1.3

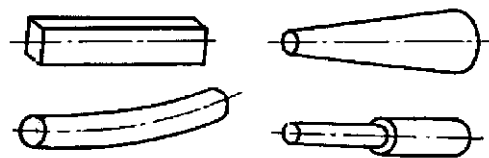


Рис. 1.4

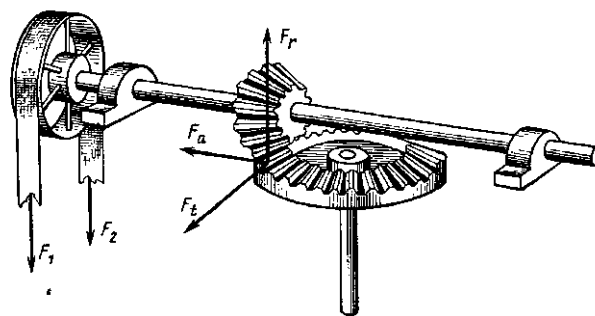


Рис. 1.5

Пластина и оболочка (рис. 1.6) характеризуются тем, что их толщина невелика по сравнению с другими размерами. Пластину можно рассматривать как частый случай оболочки, так сказать “распрявленную” оболочку. Примерами деталей, рассматриваемых как оболочки и пластины, являются различные резервуары для жидкостей и газов, элементы обшивки корпусов кораблей, фюзеляжей самолетов.

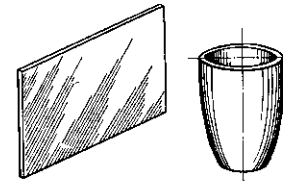


Рис. 1.6

Массивом называют тело, все три измерения которого – величины одного порядка, например, фундамент под машину, шарик или ролик подшипника качения.

Схематизация деформационных процессов. Она реализуется с помощью *трех принципов*:

- *малости деформаций* (перемещения точек тела, обусловленные его упругими деформациями, весьма малы по сравнению с размерами самого тела; на практике они отличаются на три порядка и более);

- *независимости действия сил* (результат действия системы сил не зависит от последовательности нагружения ими конструкции и равен сумме результатов действия каждой из сил в отдельности; это положение называют также принципом сложения действия сил или принципом суперпозиции);

- *Сен-Венана* (способ приложения внешних сил сказывается лишь вблизи места нагружения; подробно этот принцип будет рассмотрен ниже в теме “Растяжение и сжатие”);

и *двух рабочих гипотез*:

- сечения стержня, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и после деформации; это положение называют гипотезой плоских сечений или гипотезой Я. Бернулли;

- отсутствует взаимное надавливание продольных волокон стержня (под волокном понимается линейный элемент, образованный совокупностью точек, равноудаленных от оси стержня).

1.4. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ

Целостность любого упругого тела обеспечивается внутренними силами связи, которые существуют как в нагруженном, так и в ненагруженном состоянии тела. В последнем случае внутренние силы нам неизвестны и, чтобы обойти это обстоятельство, примем их за условный ноль. Поэтому в дальнейшем под внутренними силами мы будем понимать не их абсолютные значения, а только приращения этих сил, вызванные действием внешних сил.

Для расчета конструкций на прочность необходимо уметь определять внутренние силы по заданным внешним. Основным прием, который при этом используется, известен как *метод сечений*. Суть его заключается в следующем.

Исследуемое тело (рис. 1.7, а) мысленно рассекается какой-либо поверхностью (например, плоскостью П) на две части, одна из частей отбрасывается, а ее действие на оставшуюся заменяется неизвестными внутренними силами, которые с помощью этого приема переходят в разряд внешних. Согласно гипотезе о сплошности внутренние силы непрерывно распределяются по плоскости сечения, поэтому их представление, приведенное на рис. 1.7, б, является достаточно условным.

Напряжения. Для количественной оценки внутренних сил введем их меру, которую называют *напряжением*.

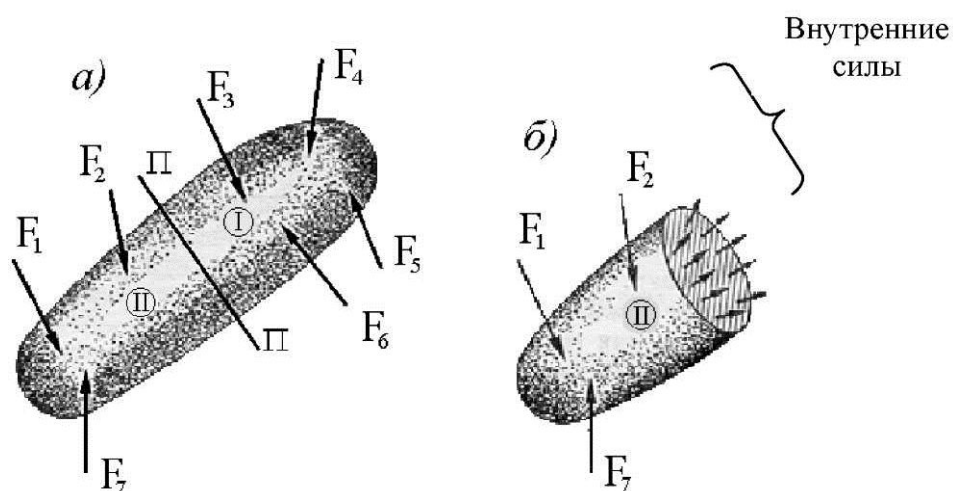


Рис. 1.7

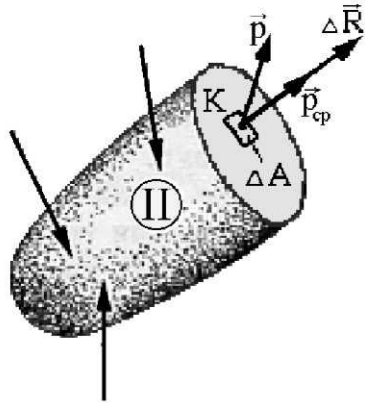


Рис. 1.8

Выделим в окрестности произвольной точки K сечения (рис. 1.8) элементарную площадку ΔA . Результирующую внутренних сил, действующих на эту площадку, представим вектором $\Delta \vec{R}$. Разделив $\Delta \vec{R}$ на ΔA , получим новый вектор \vec{p}_{cp} , направленный так же, как $\Delta \vec{R}$ и называемый *средним напряжением* на площадке ΔA , т.е.

$$\vec{p}_{cp} = \Delta \vec{R} / \Delta A. \quad (1.1)$$

В пределе при стремлении площадки ΔA к нулю (стягивании ее в точку K) получим *истинное напряжение* в данной точке рассматриваемого сечения:

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta \vec{R} / \Delta A. \quad (1.2)$$

Вектор напряжения \vec{p} имеет размерность: сила, деленная на площадь. В Международной системе единиц (СИ) в качестве единицы напряжения принят паскаль ($\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$), но эта единица очень мала, поэтому на практике используется кратная ей единица – мегапаскаль ($1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$).

Вектор напряжения может быть разложен:

а) на две составляющие по двум ортогональным направлениям, одно из которых является нормалью \vec{n} к площадке, а второе \vec{i} принадлежит площадке (рис. 1.9)

$$\vec{p} = \vec{\sigma}_n + \vec{\tau}_n, \quad (1.3)$$

где $\vec{\sigma}_n$ – нормальное напряжение, а $\vec{\tau}_n$ – касательное напряжение.

б) на три составляющие по осям прямоугольной декартовой системы координат x, y, z (рис. 1.10)

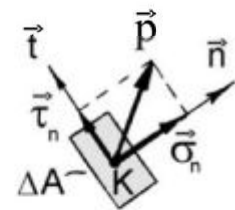


Рис. 1.9

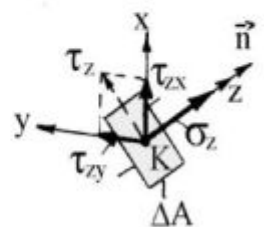


Рис. 1.10

$$\vec{p} = \vec{\sigma}_z + \vec{\tau}_{zx} + \vec{\tau}_{zy} \quad (1.4)$$

Для нахождения вектора напряжения в точке K мы рассекаем тело плоскостью, проходящей через точку K . Но через точку K может проходить сколь угодно различных сечений. Определяя вектор \vec{p} для той же точки K , но для другого сечения, мы получим иной результат. Таким образом, беря различные сечения, проходящие через данную точку, можно определить бесконечное множество относящихся к этой точке векторов напряжений. Совокупность векторов напряжений для всего множества площадок, проходящих через данную точку, характеризует напряженное состояние в точке, изучение которого является одной из основных задач курса.

Напряженное состояние в точке количественно описывается сложной физической величиной, называемой тензором напряжений T_H , компонентами которого являются нормальные и касательные напряжения, действующие на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности точки K (рис. 1.11).

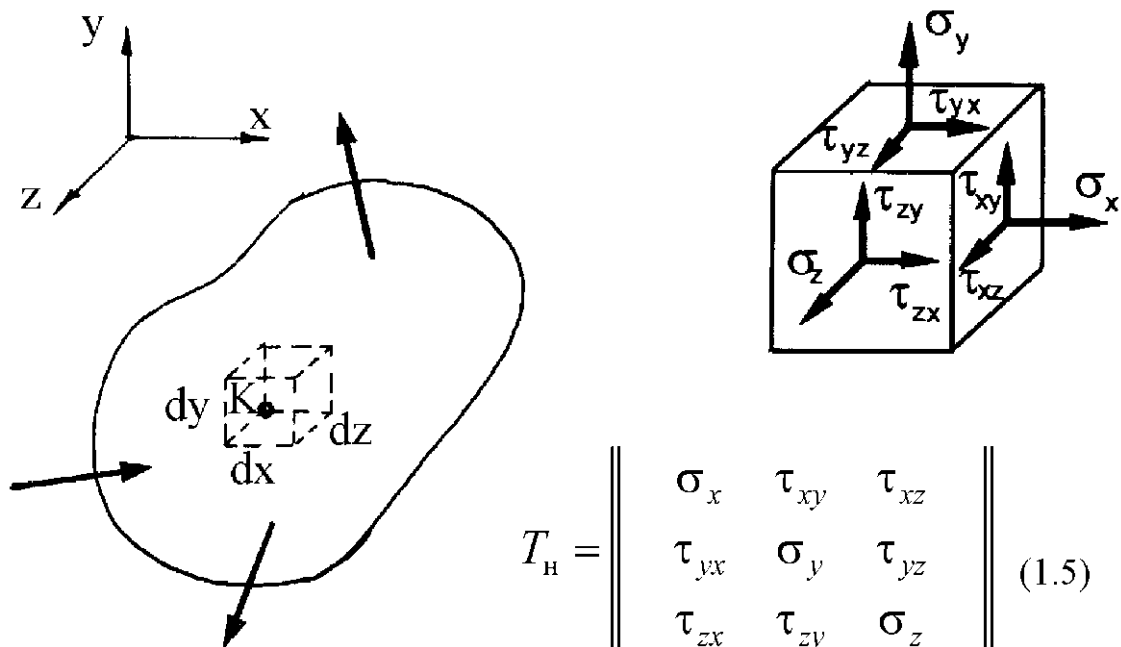


Рис. 1.11

Внутренние силовые факторы в поперечных сечениях стержня.

Рассмотрим стержень, обладающий хотя бы одной плоскостью симметрии и нагруженный произвольной системой сил (рис. 1.12, а). Свяжем с ним прямоугольную декартову систему координат. Ось z направим вдоль оси стержня, а две другие (x и y) расположим в плоскости поперечного сечения, совместив ось y с осью симметрии последнего.

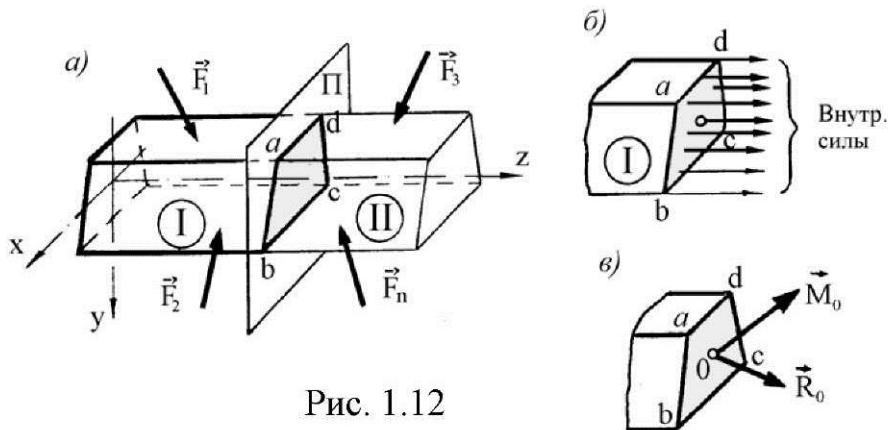


Рис. 1.12

Расsectем стержень плоскостью Π , перпендикулярной к оси z , на две части и одну из частей, например Π , отбросим, заменив ее действие на оставшуюся внутренними силами (рис. 1.12, б). Выбрав в качестве центра приведения центр тяжести сечения $abcd$, заменим внутренние силы их интегральными характеристиками – главным вектором \vec{R}_0 и главным моментом \vec{M}_0 . Раскладывая \vec{R}_0 и \vec{M}_0 по осям x, y, z , получим (рис. 1.13)

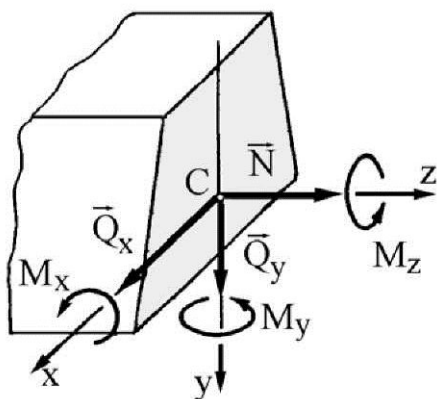


Рис. 1.13

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_0 &= \vec{N}_z + \vec{Q}_x + \vec{Q}_y, \\ \vec{M}_0 &= \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z, \end{aligned} \right\} (1.6)$$

где N_z – продольная сила,

Q_x (Q_y) – поперечные силы,

M_x (M_y) – изгибающие моменты,

M_z – крутящий момент.

Это и есть внутренние силовые факторы в поперечном сечении стержня, с которыми связаны приведенные ниже основные виды нагрузки (рис. 1.14). Там же дается и правило знаков для них.

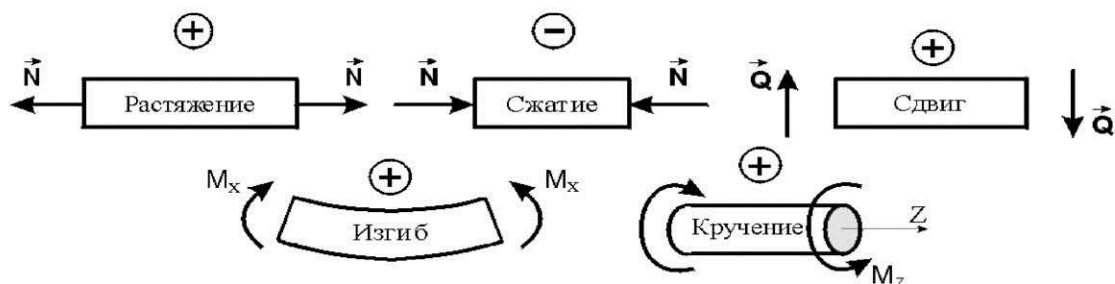


Рис. 1.14

Величины внутренних силовых факторов определяются из уравнений равновесия статики, составленных для оставшейся части. Как известно, таких уравнений шесть: три уравнения проекций, из которых определяются продольная сила N_z и поперечные силы Q_x (Q_y), и три уравнения моментов, позволяющие определить изгибающие моменты M_x (M_y) и крутящий момент M_z .

Для расчета конструкций на прочность необходимо знать, как изменяются внутренние силовые факторы по длине стержня. С этой целью строятся их графики, называемые эпюрами, при построении которых широко используются дифференциальные и интегральные зависимости между ними и распределенной внешней нагрузкой.

1. Дифференциальные зависимости.

Рассмотрим стержень, обладающий вертикальной плоскостью симметрии и нагруженный в этой плоскости силами, перпендикулярными к его оси, а также распределенной продольной нагрузкой интенсивности q_z (рис. 1.15, а).

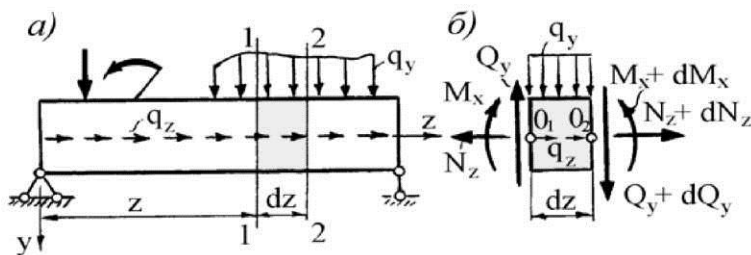


Рис. 1.15

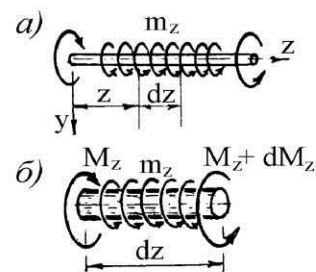


Рис. 1.16

В этом случае в поперечных сечениях стержня возникают три внутренних силовых фактора: продольная сила N_z , поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x .

Выделим из стержня бесконечно малый элемент (рис. 1.15, б) и рассмотрим его равновесие:

$$\sum Z_i = 0, N_z + dN_z - N_z + q_z dz = 0,$$

$$\sum Y_i = 0, Q_y + dQ_y - Q_y + q_y dz = 0,$$

$$\sum m_{O_2} = 0, M_x + dM_x - M_x - Q_y dz + q_y dz \cdot 0,5 dz = 0,$$

откуда после небольших преобразований получим искомые зависимости

$$dN_z / dz = -q_z, \quad dQ_y / dz = -q_y, \quad dM_x / dz = Q_y. \quad (1.7)$$

Для скручиваемого стержня (рис. 1.16), действуя по аналогии, получим зависимость между крутящим моментом M_z и интенсивностью распределенной моментной нагрузки m_z

$$dM_z / dz = -m_z. \quad (1.8)$$

2. Интегральные зависимости. Они получаются путем интегрирования дифференциальных уравнений (1.7) и (1.8)

$$N = N_0 - \int_0^z q_z dz, \quad Q_y = Q_0 - \int_0^z q_y dz,$$

$$M_z = M_0 - \int_0^z m_z dz, \quad M_x = M_0 + \int_0^z Q_y dz = M_0 + \omega_Q.$$

Частные случаи

$q_z(q_y) = \pm q, \quad m_z = \pm m$	$q_z(q_y) = 0, \quad m_z = 0$
$N = N_0 \pm qz$	$N = N_0 = \text{const}$
$Q_y = Q_0 \pm qz$	$Q_y = Q_0 = \text{const}$
$M_z = M_0 \pm mz$	$M_z = M_0 = \text{const}$
$M_x = M_0 + Q_0 z \pm 0,5 qz^2$	$M_x = M_0 + Q_0 z$

Связь между напряжениями и внутренними силовыми факторами. Она устанавливается следующими интегральными соотношениями, вытекающими непосредственно из определения внутренних усилий

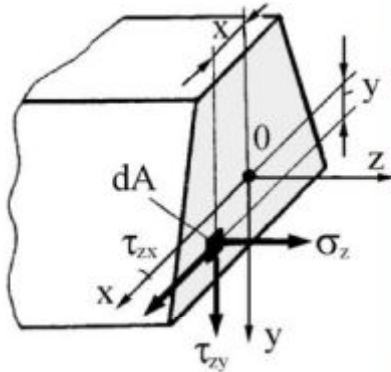


Рис. 1.17

$$\begin{aligned}
 N_z = R_z &= \int_A \sigma_z dA, \\
 Q_x = R_x &= \int_A \tau_{zx} dA, \quad Q_y = R_y = \int_A \tau_{zy} dA, \\
 M_x &= \int_A \sigma_z y dA, \quad M_y = \int_A \sigma_z x dA, \quad (1.9) \\
 M_z &= \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA.
 \end{aligned}$$

Исходя из этих интегральных уравнений (1.9), можно найти элементарными методами напряжения через внутренние силовые факторы, если сделать определенные предположения о характере распределения напряжений. Именно с этой целью в сопротивлении материалов вводятся так называемые рабочие гипотезы, о которых мы говорили выше (гипотеза плоских сечений, гипотеза об отсутствии взаимного надавливания продольных волокон стержня).

1.5. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

Все существующие в природе твердые тела не являются абсолютно жесткими и под действием внешних сил в какой-то мере меняют свою форму и размеры (деформируются). Точки тела при его деформации меняют свое положение в пространстве. Так, например, точка K (рис. 1.18, a) переходит в положение K' . Вектор $\overline{KK'}$, имеющий начало в точке недеформированного тела, а конец в той же точке деформированного тела, называется вектором *полного перемещения*.

щения точки. Его проекции на оси x , y , и z носят название *перемещений по осям* и обозначаются через u , v и w (рис. 1.18, б).

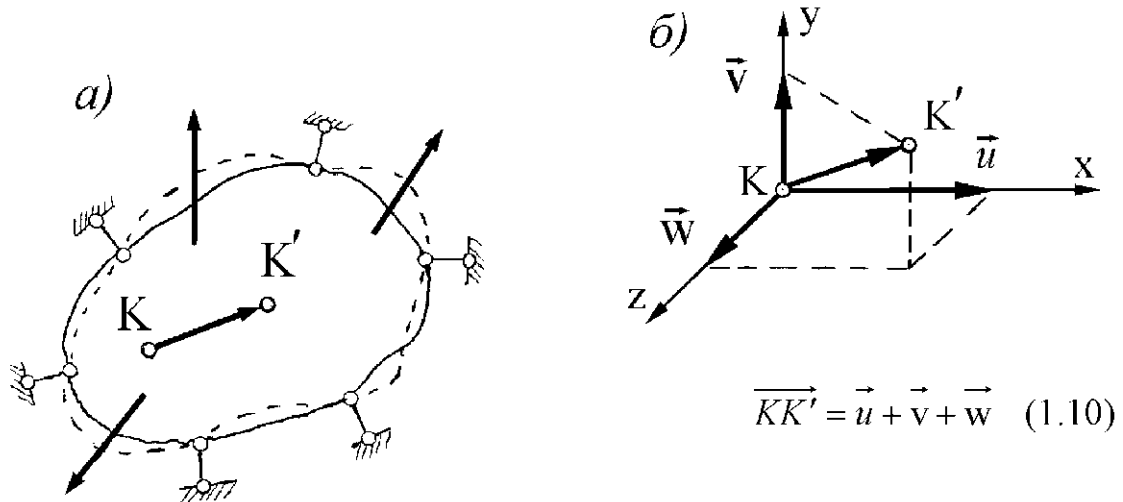


Рис. 1.18

Для количественного описания деформации тела поступим следующим образом. Мысленно разобьем тело на элементарные параллелепипеды и проследим, какие изменения претерпевает любой из них, например, выделенный в окрестности точки K (рис. 1.19, а), в процессе деформации всего тела.

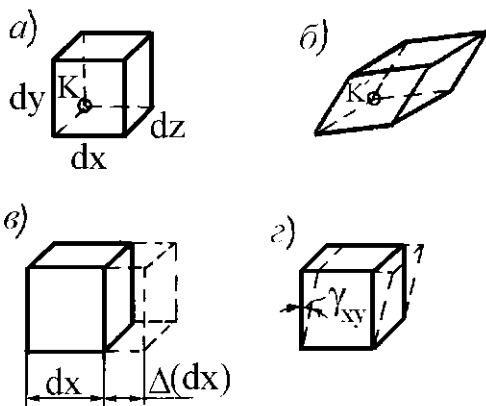


Рис. 1.19

$$\epsilon_x = \Delta(dx)/dx, \quad \epsilon_y = \Delta(dy)/dy, \quad \epsilon_z = \Delta(dz)/dz,$$

а интенсивность изменения формы характеризуется сдвиговыми деформациями γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} (рис. 1.19, г). Совокупность шести величин: ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} — образует *тензор деформации*, который

количественно описывает деформированное состояние в окрестности произвольной точки K .

Линейные деформации измеряются в отвлеченных величинах или в процентах. Обычно они малы по сравнению с единицей. Для упругого тела это – десятитысячные или тысячные доли, а если в процентах, то сотые или десятые доли процента.

Опыт показывает, что деформации могут после снятия нагрузки или полностью исчезнуть, или исчезнуть лишь частично. Деформации, исчезающие после разгрузки тела, называют *упругими*, а свойство тел принимать после разгрузки свою первоначальную форму называется *упругостью*. Деформации же, сохраняемые телом и после удаления нагрузки, называются *остаточными* или *пластическими*, а свойство материалов получать остаточные деформации называется *пластичностью*.

Зная деформации тела во всех его точках и условия закрепления, можно определить перемещения всех точек тела. Для нормальной эксплуатации сооружения деформации его отдельных элементов должны быть, как правило, упругими, а вызванные ими перемещения не должны превосходить по величине определенных допускаемых значений. Эти условия, выраженные в форме тех или иных уравнений, называют *условиями жесткости*.

1.6. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

В результате расчета нужно получить ответ на вопрос, удовлетворяет или нет конструкция тем требованиям надежности, которые к ней предъявляются. Этих требований, как известно, три: прочность, жесткость и устойчивость. Но в зависимости от условий работы и назначения конструкции определяющим может быть одно из них. Чаще всего на первое место выступает требование прочности, которое сводится к выполнению так называемых *условий прочности*.

Расчет на прочность. Он выполняется либо по методу допускаемых напряжений, либо по методу допускаемых нагрузок.

1. *Метод допускаемых напряжений.* В основу этого метода расчета положено предположение, что критерием надежности конструкции является напряжение или, точнее говоря, напряженное состояние в точке. Последовательность расчета при этом выглядит следующим образом.

На основании анализа конструкции выявляется та точка в теле, где возникают наибольшие напряжения. Найденное значение напряжений в этой точке сопоставляется с предельным значением для данного материала, полученным на основании предварительных лабораторных испытаний. Из сопоставления найденных расчетных напряжений и предельных напряжений делается заключение о прочности конструкции.

Условие прочности имеет следующий вид

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{пред}} / [n] = [\sigma],$$

или

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{пред}} / [n] = [\tau],$$

где $\sigma_{\text{пред}}$ и $\tau_{\text{пред}}$ – предельные для данного материала напряжения, определяемые экспериментально, $[n]$ – нормативный коэффициент запаса прочности; $[\sigma]$ и $[\tau]$ – допускаемые напряжения.

2. *Метод допускаемых нагрузок.* В этом методе путем расчета определяются не напряжения, а находится предельная нагрузка, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь или не изменяя существенно свою форму. Предельная (разрушающая) нагрузка сопоставляется с рабочей нагрузкой, и на основании этого делаются выводы о степени прочности конструкции в рабочих условиях.

Условие прочности записывается так

$$F \leq F_{\text{раз}} / [n_F] = [F],$$

где $F_{\text{раз}}$ – предельная для данной конструкции нагрузка; $[n_F]$ – нормативный запас прочности по нагрузкам; $[F]$ – допускаемая величина нагрузки.

Расчет на жесткость. Он выполняется в тех случаях, когда необходимо добиться наименьших изменений формы конструкции, например при проектировании точных приборов и механизмов. Это не исключает, конечно, одновременной проверки системы на прочность по напряжениям.

Условия жесткости заключаются в ограничении перемещений точек конструкции заданными пределами

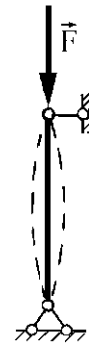
$$u \leq [u], \quad v \leq [v], \quad w \leq [w],$$

где $[u]$, $[v]$, $[w]$ – допускаемые перемещения.

Расчет на устойчивость. Опасность потери устойчивости особенно велика для легких тонкостенных конструкций типа гибких стержней, пластин и оболочек. В нашем курсе мы ограничимся лишь простейшими случаями расчета на устойчивость сжатых стержней, для которых условие устойчивости имеет вид

$$F \leq F_{кр} / [n_y] = [F_y],$$

где $F_{кр}$ – критическая нагрузка, при которой сжатый стержень теряет устойчивость (искривляется); $[n_y]$ – коэффициент запаса устойчивости; $[F_y]$ – допускаемая нагрузка на устойчивость.



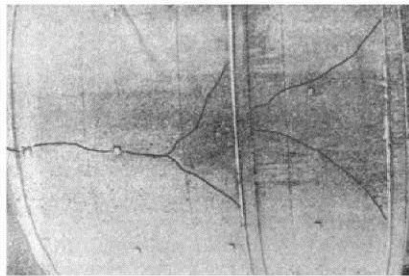
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие основные требования предъявляются к проектируемым машинам и сооружениям?
2. Что понимается под прочностью?
3. Что такое жесткость?
4. Какие основные задачи решаются в курсе сопротивления материалов?
5. Что такое расчетная схема?

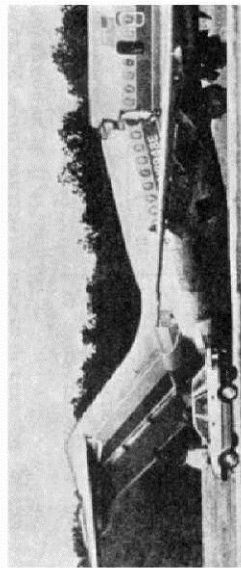
6. Какие нагрузки называются сосредоточенными и распределенными и в каких единицах они измеряются?
7. В чем разница между статическим и динамическим нагружением?
8. Перечислите основные допущения относительно структуры и свойств технических материалов, которые принимаются в сопротивлении материалов?
9. К каким простейшим типам с точки зрения формы сводятся различные элементы конструкций?
10. Что называется стержнем, пластиной и оболочкой?
11. В чем состоит принцип независимости действия сил?
12. Что называется напряжением в точке и какова его размерность?
13. Какое напряжение называется нормальным и какое касательным?
14. Какой метод используется при определении внутренних силовых факторов и в чем заключается его сущность?
15. Сколько внутренних силовых факторов возникает в поперечных сечениях стержня в общем случае нагружения? Назовите их.
16. Какие случаи простого нагружения Вам известны?
17. Что такое деформация? Какие Вам известны простейшие деформации?
18. Что такое упругость тела?
19. Какая деформация называется упругой и какая пластической?
20. Какая конструкция называется прочной?
21. Назовите существующие методы расчета на прочность.
22. Какие напряжения называются предельными?
23. Что такое запас прочности конструкции?
24. Как определяется допускаемое напряжение?
25. Как записывается условие прочности по методу допускаемых напряжений и по методу допускаемых нагрузок?
26. В чем заключается расчет на жесткость?
27. Как записывается условие устойчивости сжатого стержня?

ВИДЫ ОТКАЗОВ ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

1. РАЗРУШЕНИЕ ВСЛЕДСТВИЕ ИСЧЕРПАНИЯ ПРОЧНОСТИ

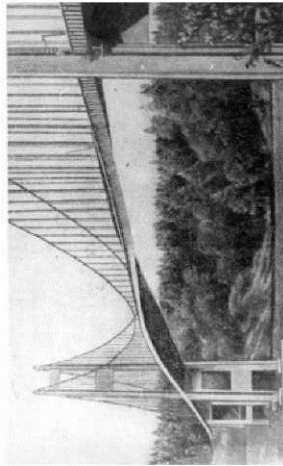


а)
Авария сушильной башни на Череповецком химзаводе (декабрь 1977г.)



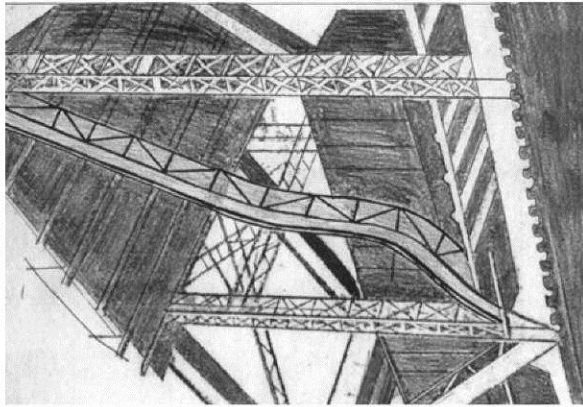
б)
Разрушение фюзеляжа самолета ДС-9 в момент касания взлетно-посадочной полосы в г. Пенсакола (США, 1988г.)

2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ НЕДОПУСТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ



Деформация крутильных колебаний Такомского моста приблизительно за час до крушения (США, 1940 г.)

3. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФОРМЫ



Деформировавшийся раскос фермы Мозырского моста. Вид с низовой стороны (СССР, 1925 г.)

2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ

*Мы должны начинать с опыта и через него восходить к общим принципам.
Леонардо да Винчи*

2.1. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ

Под *растяжением* (*сжатием*) понимают такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня из шести возможных усилий возникает только одно – продольная сила, обозначаемая N_z или N .

Обычным является растяжение стержня силами, приложенными к его концам. Передача усилий к стержню может быть осуществлена различными способами, как это показано на рис. 2.1. Во всех случаях, однако, система внешних сил образует равнодействующую F , направленную вдоль оси стержня. Поэтому независимо от условий крепления растянутого стержня расчетная схема в рассматриваемых случаях оказывается единой. Она показана на рис. 2.1, з.

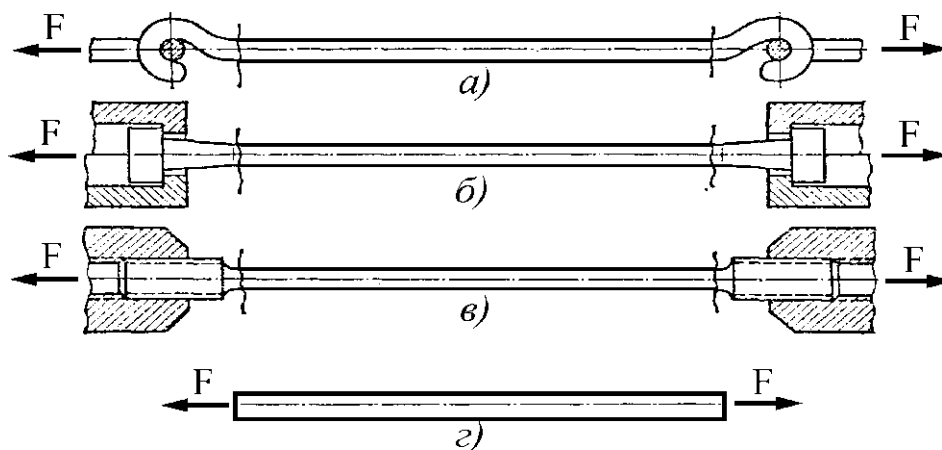


Рис. 2.1

Сжатие отличается от растяжения формально только знаком продольной силы. При растяжении продольная сила положительна и направлена от сечения, а при сжатии – отрицательна и направлена к сечению. Таким образом, при анализе внутренних сил сохраняется единство подхода к вопросам растяжения и сжатия. Вместе с тем между этими двумя типами могут обнаружиться и качественные различия, например, при изучении процесса разрушения материалов или при исследовании поведения длинных и тонких стержней, для которых сжатие сопровождается, как правило, изгибом.

Рассмотрим напряжения, возникающие в поперечном сечении растянутого стержня. Между продольной силой N и напряжениями σ_z существует интегральная зависимость

$$N = \int_A \sigma_z dA. \quad (2.1)$$

Согласно гипотезе плоских сечений, которая подтверждается многочисленными экспериментами, в частности, на резиновых моделях (рис. 2.2), поперечные сечения при растяжении (сжатии) перемещаются поступательно, поэтому нормальные напряжения распределены по сечению равномерно ($\sigma = \text{const}$, рис. 2.3).

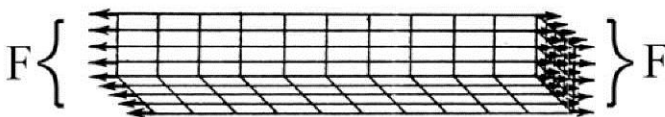


Рис. 2.2

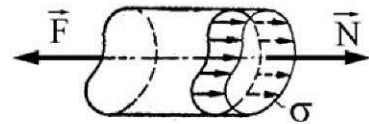


Рис. 2.3

Следовательно, вынося σ_z как постоянную величину за знак интеграла, получаем

$$N = \sigma_z \int_A dA = \sigma_z A,$$

откуда

$$\boxed{\sigma = N / A} \quad (2.2)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

Конечно, формула (2.2) справедлива лишь постольку, поскольку из рассмотрения исключаются особые участки стержня, расположенные в зоне приложения внешних сил и в местах резкого изменения геометрической формы стержня (рис. 2.4).



Рис. 2.4

Выше мы рассмотрели некоторые конкретные способы приложения растягивающей силы F (см. рис. 2.1). Однако в расчетах эти конкретные особенности не учитываются, а принимается во внимание только равнодействующая внешних сил, равная F . При этом руководствуются правилом, которое принято называть *принципом Сен-Венана*, по имени французского ученого (1797–1886), который дал точное решение задач о кручении и изгибе стержней и при этом сформулировал принцип, носящий его имя и приложимый не только к растяжению (сжатию), но также к кручению, изгибу и многим другим задачам сопротивления материалов. Применительно к стержням он может быть сформулирован следующим образом: *особенности приложения внешних растягивающих сил проявляются, как правило (исключение могут составлять тонкостенные стержни), на расстояниях, не превышающих характерных размеров поперечного сечения стержня*. Отбрасывая части стержня, примыкающие к его концам, получаем единую расчетную схему (рис. 2.1, *г*), независимо от способа приложения внешних сил.

Распределение напряжений в зоне приложения внешних сил не является равномерным, но эта неравномерность носит местный, локальный характер и быстро затухает по мере удаления от места нагружения. На расстоянии, равном наибольшему из поперечных размеров стержня, оно становится практически равномерным (рис. 2.5).

В местах резкого изменения формы и размеров поперечного сечения стержня возникают значительные напряжения, также носящие локальный характер (рис. 2.6). Это явление получило название концентрации напряжений. Количественно оно оценивается теоретическим коэффициентом концентрации напряжений

$$\alpha_{\sigma} = \sigma_{\max} / \sigma_{\text{НОМ}}, \quad (2.3)$$

где σ_{\max} – наибольшее местное напряжение, $\sigma_{\text{НОМ}}$ – номинальное напряжение, определяемое без учета эффекта концентрации для наиболее ослабленного сечения по формуле $\sigma_{\text{НОМ}} = F / A_{\text{НЕТТО}}$, $A_{\text{НЕТТО}} = (b - d)t$ – площадь ослабленного отверстием сечения.

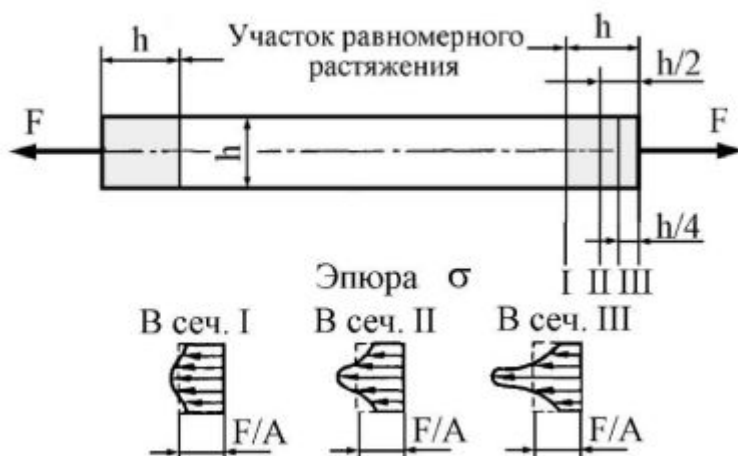


Рис. 2.5

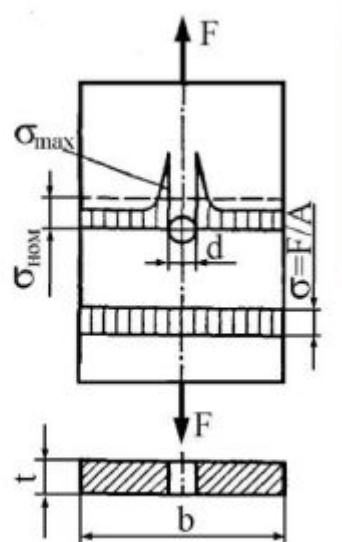


Рис. 2.6

Расчет на прочность. Условие прочности при растяжении или сжатии имеет вид

$$\sigma_{\max} = N_{\max} / A \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad n = \sigma_{\text{пред}} / \sigma_{\max} \geq [n], \quad (2.4)$$

где σ_{\max} – наибольшее напряжение, $[\sigma] = \sigma_{\text{пред}} / [n]$ – допускаемое напряжение, $\sigma_{\text{пред}}$ – предельное для данного материала напряжение, n и $[n]$ соответственно фактический и нормативный коэффициенты запаса прочности. В инженерных расчетах отклонения от основного неравенства (2.4) допустимы в ту или иную сторону в пределах $\pm 5\%$.

Различают три рода задач при расчете на прочность: 1) проверка прочности, 2) подбор сечений, 3) определение допускаемой нагрузки.

В задачах первого типа (по заданной нагрузке и размерам поперечного сечения стержня) определяют фактические напряжения и сравнивают их с допускаемыми. С проверочными расчетами встречаются, в частности, при экспертизе выполненных проектов. Задачи второго типа связаны с определением требуемой площади поперечного сечения стержня A (по известным нагрузке и допускаемому напряжению). При решении третьего типа задач сначала определяют допускаемое значение продольной силы $[N]$ (по заданным размерам поперечного сечения стержня и известному допускаемому напряжению), а затем допускаемую нагрузку.

2.2. ДЕФОРМАЦИИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ. РАСЧЕТ НА ЖЕСТКОСТЬ

Опыты показывают, что при растяжении длина стержня увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются, при сжатии – наоборот (рис. 2.7).

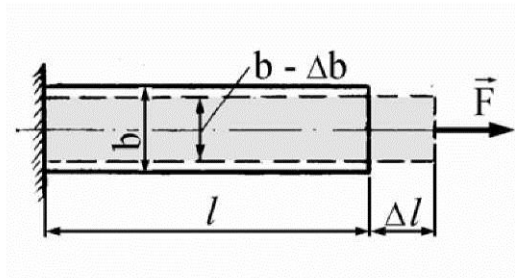


Рис. 2.7

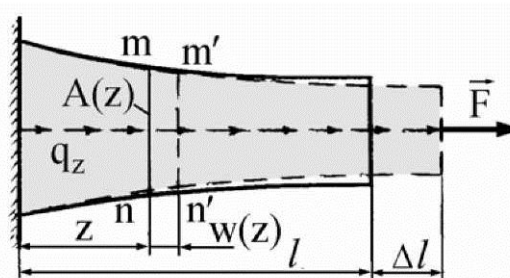


Рис. 2.8

Величины Δl и Δb – абсолютные продольная и поперечная деформации. С ними связаны относительные деформации: продольная $\varepsilon = \Delta l / l$ и поперечная $\varepsilon' = \Delta b / b$.

Между продольной и поперечной деформациями существует установленная экспериментально зависимость

$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon. \quad (2.5)$$

Здесь ν – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона), характеризующий способность материала к поперечным деформациям. Для различных материалов он колеблется в пределах от 0 до 0,5. Минимальное значение соответствует пробке ($\nu = 0$), а максимальное – каучуку ($\nu \approx 0,5$). Для большинства металлов и сплавов он изменяется в узких пределах: от 0,25 до 0,35 (в среднем 0,3).

Для подавляющего большинства конструкционных материалов с достаточной для практики точностью можно считать, что в известных пределах нагружения между продольной деформацией и нормальным напряжением существует линейная зависимость (рис. 2.9).

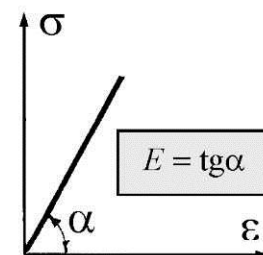


Рис. 2.9

Это положение носит название *закона Гука* и записывается в виде

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.6)$$

Коэффициент пропорциональности E , называемый модулем продольной упругости или модулем Юнга, – физическая постоянная данного материала, характеризующая его *жесткость*, т.е. способность сопротивляться деформированию. Геометрически модуль Юнга представляет собой угловой коэффициент прямой, изображающей закон Гука (рис. 2.9). Следовательно,

$$E = \sigma / \varepsilon = \operatorname{tg}\alpha.$$

Поскольку ε – безразмерная величина, то E имеет ту же размерность, что и напряжение. Обычно он выражается в гигапаскалях (ГПа). В табл. 2.1 даны средние значения E для некоторых материалов.

Таблица 2.1

Материал	Дерево	Бетон	Дюраль	Медь	Титан	Чугун	Сталь	Алмаз
E , ГПа	10	20	70	100	100	120	200	1050

Перейдем теперь к вопросу об определении изменения длины (удлинения или укорочения) стержня. По определению линейной деформации

$$\varepsilon_z = \Delta(dz) / dz, \quad (2.7)$$

откуда, учитывая, что $\varepsilon_z = \sigma_z / E$ и $\sigma_z = N / A$, получаем

$$\Delta(dz) = Ndz / (EA).$$

Абсолютное удлинение стержня на длине l будет равно (см. рис. 2.8)

$$\Delta l = \int_0^l Ndz / (EA). \quad (2.8)$$

В частном случае для стержня постоянного поперечного сечения, нагруженного на конце силой F (рис. 2.7), приходим к следующему выражению

$$\Delta l = Fl / (EA). \quad (2.9)$$

Величины EA и $c = EA / l$ называются соответственно жесткостью сечения и жесткостью стержня при растяжении (сжатии). Величину, обратную жесткости, называют податливостью

$$\alpha = 1 / c = l / (EA).$$

Пользуясь понятиями жесткости и податливости, формулу (2.9) можно представить так

$$\Delta l = \alpha F \quad \text{или} \quad F = c \Delta l. \quad (2.10)$$

Перемещение произвольного сечения z стержня равно изменению длины участка, заключенного между этим сечением и заделкой (рис. 2.8), поэтому

$$w(z) = \Delta z = \int_0^z N_z dz / (EA) = \int_0^z \sigma_z dz / E. \quad (2.11)$$

Иногда при проектировании стержневых систем возникает необходимость в ограничении перемещений некоторых точек. Пусть,

например, речь идет о точке B (рис. 2.10). Это ограничение выражается условием жесткости

$$\delta_B \leq [\delta_B]. \quad (2.12)$$

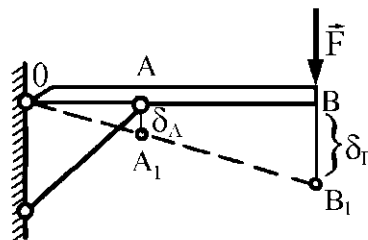


Рис. 2.10

Исходя из зависимости (2.12) могут быть решены задачи трех типов, аналогичных расчету на прочность (проверка жесткости, подбор сечений, определение допускаемой нагрузки).

Если наряду с внешними силами конструкция подвергается также температурному воздействию, то, пользуясь способом наложения, деформацию ε определяют как сумму силовой и температурной составляющих:

$$\varepsilon = \sigma / E + \alpha \Delta t, \quad (2.13)$$

где α – температурный коэффициент линейного расширения.

Для однородного стержня, нагруженного по концам силой F и равномерно нагретого, получаем

$$\Delta l = Fl / (EA) + \alpha l \Delta t. \quad (2.14)$$

Это справедливо, конечно, при умеренном нагреве (до температуры порядка $300 - 400^\circ\text{C}$), пока E слабо меняется с температурой.

2.3. УЧЕТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

В машиностроении влияние собственного веса, как правило, не учитывается, так как детали машин имеют сравнительно небольшие размеры. Однако для крупных металлических конструкций, а также массивных сооружений из бетона и камня (заводские трубы, стены высоких зданий, плотины) собственный вес приходится учитывать. Он также учитывается при расчете канатов шахтных подъемников, буровых колонн и штанг.

Рассмотрим стержень постоянного сечения, закрепленный верхним концом и нагруженный, помимо силы F , также силами собственного веса (рис. 2.11).

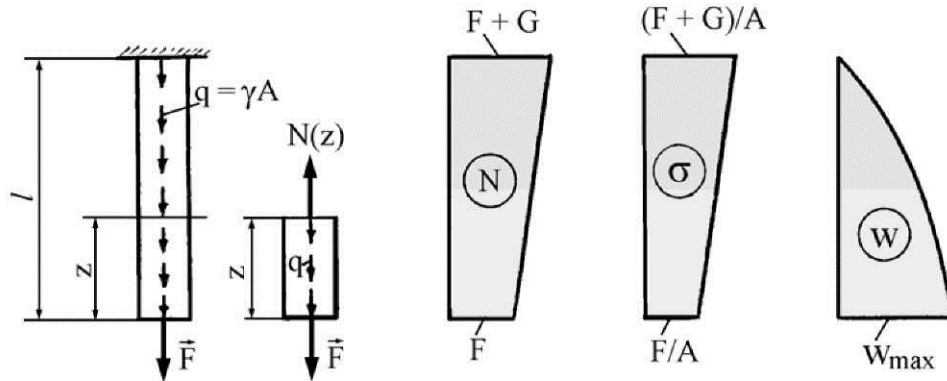


Рис. 2.11

Из условия равновесия части стержня, расположенной ниже сечения z , находим продольную силу в этом сечении

$$N(z) = F + \gamma Az = \begin{cases} F & \text{при } z = 0, \\ (F + G) & \text{при } z = l, \end{cases}$$

где γ – удельный вес материала, $G = \gamma Al$ – вес стержня.

Нормальное напряжение в сечении z равно

$$\sigma(z) = N(z) / A = F / A + \gamma z = \begin{cases} F/A & \text{при } z = 0, \\ (F + G)/A & \text{при } z = l. \end{cases}$$

Перемещение w находим по формуле (2.11) как удлинение части стержня, расположенной выше сечения z

$$w(z) = \frac{1}{E} \int_z^l \sigma(z) dz = \frac{F}{EA} (l - z) + \frac{\gamma}{2E} (l^2 - z^2),$$

$$w_{\max} = w(0) = \Delta l = (F + 0,5G) l / (EA).$$

Стержень равного сопротивления. Материал в конструкции используется наиболее эффективно только в случае ее равнопрочности (равенства напряжений во всех ее точках). Поставим перед собой задачу подобрать такую конфигурацию стержня, чтобы напряжения

во всех сечениях были одинаковы и равны допусжаемому. Такой стержень называется *стержнем равного сопротивления*.

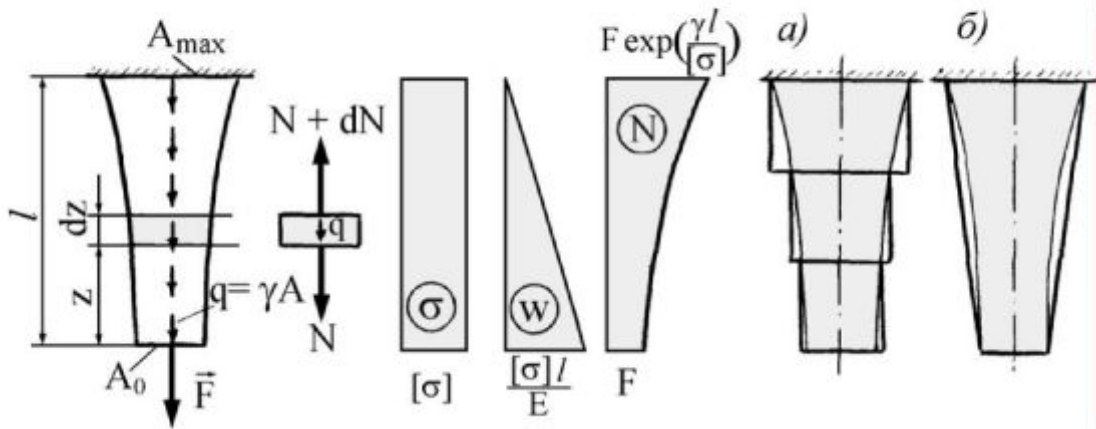


Рис. 2.12

Рис. 2.13

Из условия равновесия элемента dz имеем

$$N + dN - N - \gamma A dz = 0, \quad \text{откуда} \quad dN / dz = \gamma A. \quad (a)$$

Согласно условию равнопрочности

$$N / A = [\sigma], \quad \text{откуда} \quad N = [\sigma] A. \quad (b)$$

Подставляя (b) в (a), получим $dA / A = \gamma dz / [\sigma]$.

После интегрирования
$$\int_{A_0}^A dA / A = (\gamma / [\sigma]) \int_0^z dz$$

находим
$$A = A_0 \exp(\gamma z / [\sigma]) = \begin{cases} A_0 = F / [\sigma] & \text{при } z = 0, \\ A_{\max} = A_0 \exp(\gamma l / [\sigma]) & \text{при } z = l. \end{cases} \quad (2.15)$$

Продольная сила в сечении z равна

$$N = [\sigma] A = F \exp(\gamma z / [\sigma]) = \begin{cases} F & \text{при } z = 0, \\ F \exp(\gamma l / [\sigma]) & \text{при } z = l. \end{cases} \quad (2.16)$$

Реализация зависимости (2.15) требует значительных затрат на изготовление. Поэтому на практике слегка отступают от идеальной теоретической формы, умышленно допуская некоторый перерасход материала, но достигая при этом существенного упрощения конструк-

ции (рис. 2.13). Вариант *a* применяется в буровых колоннах, в фундаментах под колонны, при возведении стен высотных зданий. Вариант *б* реализуется в высоких заводских трубах.

В истории техники имеется один уникальный случай, когда само решение технической проблемы потребовало практической реализации стержня равного сопротивления. Речь идет о проектировании троса, поддерживающего батискаф, в котором два акванавта (профессор Жак Пикар и инженер-исследователь Джон Уолш) в 1960 г. достигли наибольшей глубины мирового океана (Марианская впадина, 11034 м).

Выполним количественную оценку параметров троса, используя следующие данные, приводимые в литературе: вес батискафа вместе с экипажем равен $F = 98$ кН, удельный вес материала троса $\gamma = 89$ кН/м³, предел прочности материала троса $\sigma_{\text{пч}} = 1960$ МПа, коэффициент запаса прочности $n_{\text{пч}} = 4$, длина троса $l = 11$ км.

Вычисляя допускаемое напряжение $[\sigma] = \sigma_{\text{пч}} / n_{\text{пч}} = 490$ МПа и пренебрегая архимедовой силой, что идет в запас прочности (примерно 10%), по формуле (2.15) находим:

$$A_0 = F / [\sigma] = 98 \cdot 10^3 / 490 \cdot 10^6 = 200 \text{ мм}^2 \quad (d_0 = 16 \text{ мм}),$$

$$A_{\text{max}} = A_0 \exp(\gamma l / [\sigma]) = 1475 \text{ мм}^2 \quad (d_{\text{max}} = 43 \text{ мм}).$$

Заметим, что применение троса постоянного сечения $A = A_{\text{max}}$ позволяет опускать батискаф лишь на глубину

$$H_{\text{пред}} = l_{\text{пред}} = ([\sigma] - F / A_{\text{max}}) / \gamma = 4760 \text{ м.}$$

Более того, если чисто теоретически взять трос бесконечно большого сечения, то предельная глубина опускания составит

$$H_{\text{пред}}^* = l_{\text{пред}}^* = [\sigma] / \gamma = 5500 \text{ м.}$$

Как видим, трос постоянного сечения не позволяет достичь требуемой глубины 11 км.

2.4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Упругое тело, будучи деформированным, накапливает некоторую потенциальную энергию. Если нагрузка прикладывается статически (медленно возрастает от нуля до заданного значения), то работа внешних сил целиком преобразуется в потенциальную энергию деформации, т.е. $W = U$.

В силу линейной зависимости между силой и перемещением работа силы F на перемещении Δl численно равна площади заштрихованного треугольника (рис. 2.14), поэтому

$$U = W = F\Delta l / 2.$$

Исключая Δl , найдем

$$U = F^2 l / (2EA). \quad (2.17)$$

Если продольная сила N

меняется вдоль оси стержня, то потенциальная деформация должна определяться суммированием по участкам dz (рис. 2.14). Для элементарного участка $dU = N^2 dz / (2EA)$, а для всего стержня

$$U = \int_0^l N^2 dz / (2EA). \quad (2.18)$$

Потенциальная энергия деформации пропорциональна квадрату продольной силы N , поэтому она всегда положительна.

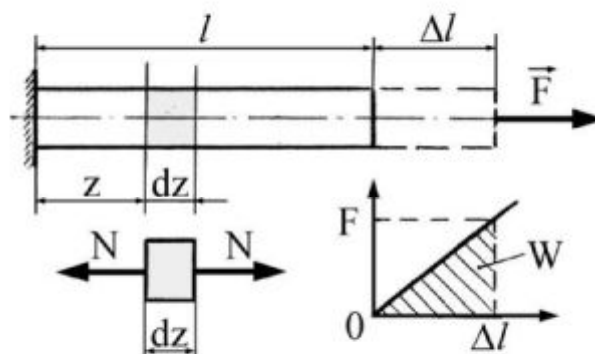


Рис. 2.14

2.5. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Системы, усилия в которых определяются только из уравнений статики, называются *статически определенными*. На практике широко встречаются также конструкции, в которых для определения внутренних усилий уравнений равновесия оказывается недостаточно. Такие системы называются *статически неопределимыми*. Разность между числом неизвестных и числом независимых уравнений статики, которые можно составить для рассматриваемой системы, характеризует ее *степень статической неопределимости*. В зависимости от этого числа различают системы один, два, ..., n раз статически неопределимые.

Некоторые примеры статически неопределимых систем приведены на рис. 2.15 (первые три конструкции относятся к категории один раз статически неопределимых систем, а две последние – дважды статически неопределимых систем).

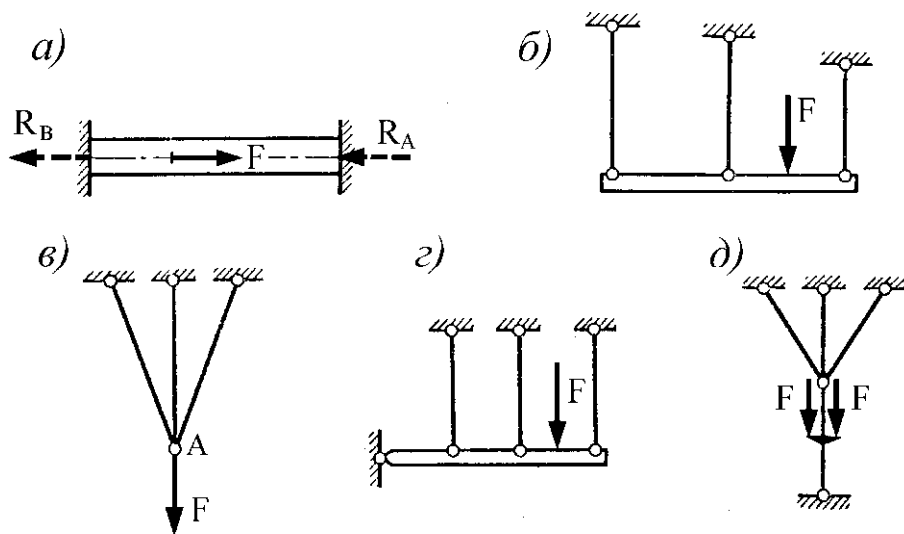


Рис. 2.15

Определение всех неизвестных сил, или, как говорят, раскрытие статической неопределимости, возможно только путем составления уравнений, дополняющих число уравнений статики до числа неизвестных. Эти дополнительные уравнения отражают особенности гео-

метрических связей, наложенных на деформируемые системы, и называют *уравнениями совместности деформаций*.

Статически неопределимые системы (в отличие от статически определимых) обладают следующими особенностями:

1) распределение усилий в них зависит не только от внешних сил, но и от соотношения жесткостей отдельных элементов, а именно: чем больше жесткость элемента, тем больше усилие, на него приходится;

2) при смещении опор, неточном изготовлении элементов, колебаниях температуры возникают дополнительные усилия.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие отмеченные особенности, а также общие принципы расчета статически неопределимых систем.

Распределение усилий. Определим усилия в системе, состоящей из стального стержня и медной трубки, при ее нагружении осевой силой F посредством жесткой плиты (рис. 2.16, а).

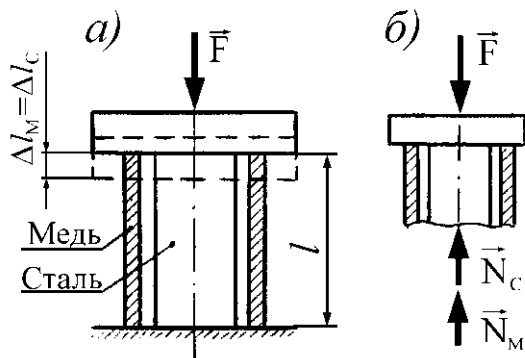


Рис. 2.16

жесткой плиты (рис. 2.16, а).

Система, очевидно, один раз статически неопределима, поскольку два усилия N_C и N_M не могут быть определены из одного уравнения равновесия (рис. 2.16, б): $N_C + N_M = F$.

Уравнение совместности деформаций должно выразить тот факт, что в силу симметрии конструкции и нагружения плита перемещается поступательно и деформации стержня и трубки совпадают, т.е. $\Delta l_C = \Delta l_M$. Выражая деформации через усилия, получим

$$N_C l / (E_C A_C) = N_M l / (E_M A_M), \quad \text{или} \quad N_M = N_C (E_M A_M / E_C A_C).$$

Решая это уравнение совместно с уравнением равновесия, находим:

$$N_C = F / (1 + E_M A_M / E_C A_C), \quad N_M = F / (1 + E_C A_C / E_M A_M).$$

Анализ полученных результатов показывает, что при равенстве жесткостей элементов ($E_C A_C = E_M A_M$) усилия в них совпадают ($N_C = N_M = 0,5F$); если же $E_C A_C > E_M A_M$, то $N_C > N_M$ и наоборот, т.е. с увеличением жесткости данного элемента увеличивается усилие в этом элементе и уменьшается в другом.

Температурные напряжения. Определим температурные напряжения в стержне BC

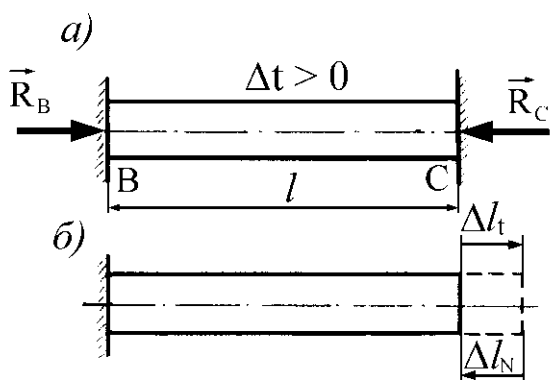


Рис. 2.17

длиной l и площадью поперечного сечения A . Модуль упругости материала E , коэффициент линейного температурного расширения α_t . Стержень зашпемлен по концам и равномерно нагрет по всей длине на величину Δt .

При повышении температуры стержень стремится удлиниться. Этому препятствуют жесткие опоры, в результате чего возникают реакции, направленные вдоль оси стержня (рис. 2.17, а). Для определения их составляем уравнение равновесия

$$\sum Z_i = 0, \quad R_B - R_C = 0, \quad \text{откуда} \quad R_B = R_C = R_t.$$

Продольная сила в стержне $N_t = -R_t$.

Вследствие закрепления концов стержня его длина не изменяется

$$\Delta l = \Delta l_N + \Delta l_t = 0 \quad \text{или} \quad -R_t l / (EA) + \alpha_t l \Delta t = 0,$$

откуда $R_t = \alpha_t EA \Delta t$.

Температурные напряжения

$$\sigma_t = N_t / A = -R_t / A = -\alpha_t E \Delta t.$$

Полученный результат позволяет сделать очень важный для практики вывод: в подобных системах температурные напряжения не зависят ни от формы, ни от размеров стержня.

Монтажные напряжения. При сборке стержневой системы (рис. 2.18, а) было обнаружено несоответствие длин стержней. Сборка была произведена путем принудительного совмещения шарниров B_1 и B_2 . Определим усилия в стержнях после сборки, полагая жесткости

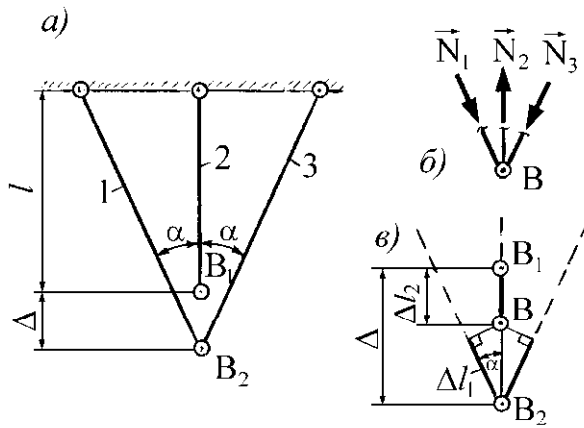


Рис. 2.18

всех стержней одинаковыми.

Имеем три стержня и, следовательно, три искоемых усилия. Для узла B (рис. 2.18, б) может быть составлено два уравнения равновесия, поэтому система один раз статически неопределима.

Из условий равновесия узла B (рис. 2.18, б) получаем

$$N_1 = N_3, \quad N_2 - 2N_1 \cos \alpha = 0.$$

Составляем уравнение совместности деформаций, пользуясь геометрическим построением, приведенным на рис. 2.18, в. Имеем

$$\Delta l_1 = (\Delta - \Delta l_2) \cos \alpha.$$

Преобразуем это уравнение, выразив деформации через усилия

$$N_1 / \cos^2 \alpha + N_2 = (EA/l)\Delta.$$

После совместного решения этого уравнения с уравнением равновесия получим

$$N_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \frac{EA}{l} \Delta, \quad N_2 = \frac{2 \cos^3 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \frac{EA}{l} \Delta.$$

Разделив найденные усилия на площади поперечных сечений стержней, определим монтажные напряжения.

Регулирование усилий. Выше мы рассмотрели пример возникновения случайных, непредвиденных и нерегулируемых монтажных усилий. На практике очень часто они заранее создаются с таким расчетом, чтобы устранить люфты и создать запланированный натяг. Во многих механизмах для этой цели устанавливаются упругие элементы – пружины. В дальнобойных артиллерийских системах используется

посадка стволы с определенным натягом, чтобы создать предварительные напряжения сжатия во внутренней части ствола. В строительной практике широко применяется предварительно напряженный бетон. Стальная арматура железобетонной колонны растягивается с определенным усилием и в напряженном состоянии заливается бетоном. После того, как бетон затвердел, арматура разгружается и в бетоне возникают напряжения сжатия. В результате прочностные показатели железобетонной конструкции повышаются. Затяжка болтов при сборке машины также может рассматриваться как один из способов создания регулируемых монтажных усилий.

2.6. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

2.6.1. Назначение и виды испытаний. Конструктор, выбирая материал для проектируемой детали, а затем рассчитывая ее на прочность (жесткость, устойчивость), должен располагать данными о механических свойствах материала, т.е. его прочности, пластичности, твердости, а также знать значения упругих постоянных – модуля продольной упругости E и коэффициента Пуассона ν . Поэтому механические испытания материалов отличаются большим разнообразием.

По характеру нагружения различают испытания статические, динамические и испытания при переменных напряжениях.

По виду деформации различают испытания на растяжение, сжатие, срез, кручение, изгиб. Реже проводят испытания при сложном нагружении, например, на совместное действие изгиба и кручения.

Большинство испытаний проводится при нормальной (комнатной) температуре, но для деталей паровых котлов, турбин, реактивных двигателей и т.п. необходимо знать их свойства при высоких температурах.

В некоторых случаях возникает необходимость в испытании конструкционных материалов при низких температурах, например, при проектировании криогенной техники.

Механические испытания имеют большое значение не только для расчета на прочность, но и для контроля качества материала или выпускаемых изделий. При этом испытаниям могут подвергаться как специально изготовленные образцы, так и сами изделия (детали и узлы).

Широко применяют механические испытания и в процессе создания новых конструкционных материалов, которые должны обладать определенными механическими свойствами.

Так как результаты испытаний зависят от формы и размеров образца, скорости его деформирования, температуры при испытании и т.д., то эксперимент обычно ведут в условиях, предусмотренных ГОСТами.

Испытания производят на специальных машинах, разнообразных по конструкции и мощности.

Для измерения деформаций применяют специальные приборы (тензометры), имеющие высокую чувствительность.

2.6.2. Испытания на растяжение. Они являются основными и наиболее распространенными, так как с их помощью удается получить наиболее важные характеристики материала, находящие прямое применение в расчетной практике.

Образцы. Для испытания на растяжение используют специально изготовленные образцы, которые большей частью вытачиваются из прутковых заготовок или вырезаются из листа. Основной особенностью таких образцов является наличие усиленных мест захвата и плавного перехода к сравнительно узкой ослабленной рабочей части. На рис. 2.19 показано несколько типов применяемых в нашей стране образцов.

Применяют как цилиндрические образцы диаметром 3 мм и более (рис. 2.19, а, б, в), так и плоские (рис. 2.19, г) толщиной 0,5 мм и более. Характерными размерами образцов являются: длина расчетной части l_0 , где реализуется однородное напряженное состояние материа-

ла, и диаметр d_0 (для цилиндрических образцов) или диаметр равно-
 великого круга $d_{\text{рав}} = 1,13\sqrt{A_0}$ (для плоских образцов). Образцы назы-
 ваются *длинными (нормальными)*, если $l_0 = 10d_0$ (для плоских
 $l_0 = 10d_{\text{рав}} = 11,3\sqrt{A_0}$), или *короткими*, если $l_0 = 5d_0$ (для плоских
 $l_0 = 5,65\sqrt{A_0}$).

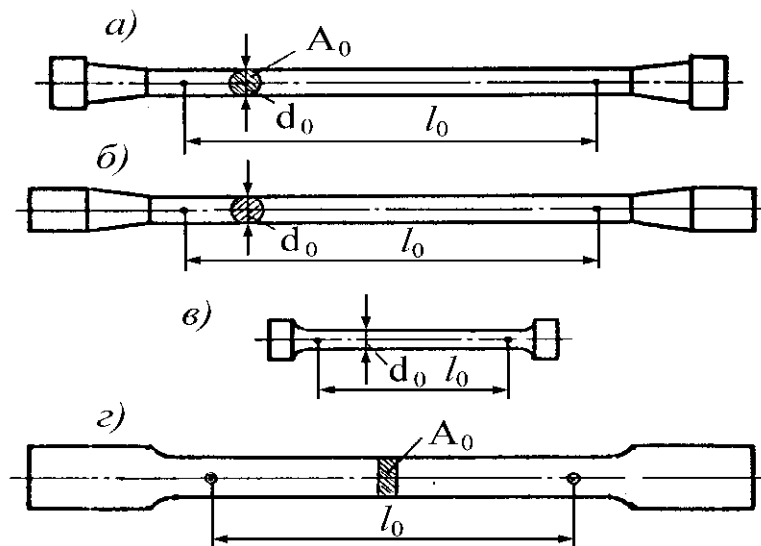
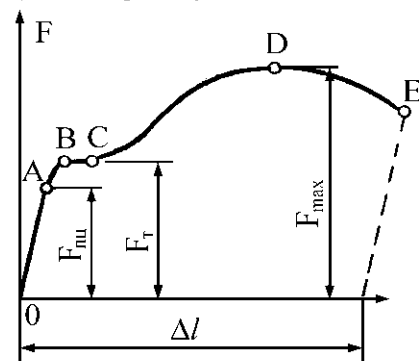


Рис. 2.19

При испытании цилиндрических образцов в качестве основных
 применяют образцы диаметром $d_0 = 10$ мм.

1. Пластичные материалы

а) малоуглеродистая сталь



б) дюралюминий

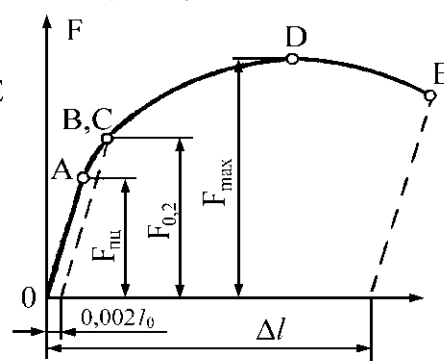


Рис. 2.20

2. Хрупкие материалы
(чугун)

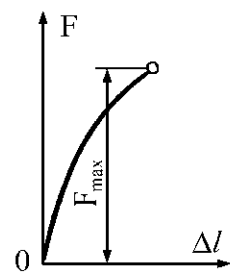


Рис. 2.21

Диаграмма растяжения. Основной задачей испытания на растяжение является построение диаграмм растяжения, т.е. зависимости между растягивающей образец силой F и его удлинением Δl .

На рис. 2.20, а показана диаграмма растяжения, типичная для малоуглеродистой стали. Полученная кривая условно может быть разбита на следующие четыре зоны: OA – зона упругости, где материал подчиняется закону Гука; BC – площадка текучести; CD – зона упрочнения, в которой на образце намечается место будущего разрыва и образуется местное сужение, называемое шейкой; DE – зона местной текучести.

Наличие площадки BC для металлов не является характерным. В большинстве случаев она не обнаруживается и диаграмма растяжения имеет вид кривой, показанной на рис. 2.20, б.

Для хрупких материалов типичной является диаграмма, приведенная на рис. 2.21.

Условная диаграмма напряжений. Для количественной оценки механических свойств материала перестроим диаграмму растяжения в координатах σ и ϵ , разделив ординаты на A_0 и абсциссы на l_0 , где A_0 и l_0 – соответственно площадь поперечного сечения и расчетная длина образца до нагружения. Так как эти величины постоянны, то диаграмма напряжений (рис. 2.22) имеет тот же вид, что и диаграмма растяжения, но характеризует уже не свойства образца, а свойства материала.

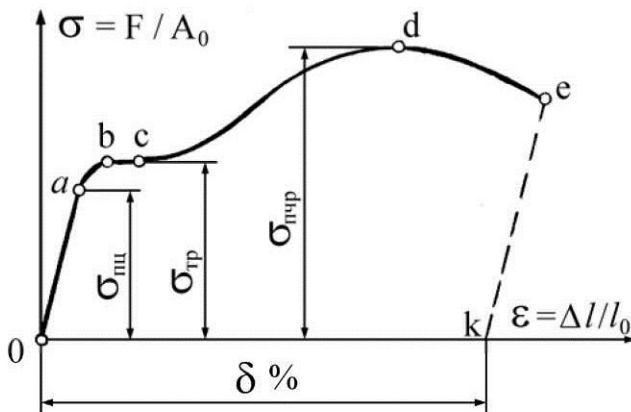


Рис. 2.22

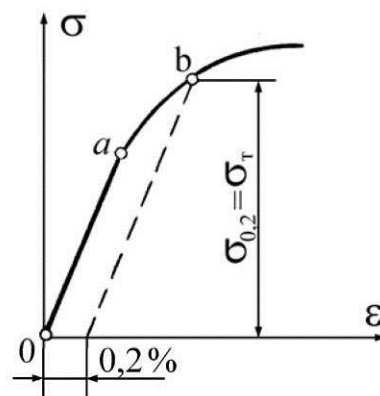


Рис. 2.23

Основные механические характеристики материала. Они делятся на две группы: характеристики прочности и характеристики пластичности.

1. Характеристики прочности:

Предел пропорциональности – наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука.

$$\sigma_{\text{пц}} = F_{\text{пц}} / A_0$$

Предел текучести – напряжение, при котором происходит рост деформации без заметного увеличения нагрузки.

$$\sigma_{\text{т}} = F_{\text{т}} / A_0$$

Предел прочности – отношение максимальной силы, которую способен выдержать образец, к его начальной площади поперечного сечения.

$$\sigma_{\text{лчр}} = F_{\text{max}} / A_0$$

Выше мы ввели понятие физического предела текучести, которое применимо только для материалов, обладающих площадкой текучести. В тех случаях, когда на диаграмме отсутствует явно выраженная площадка текучести, за предел текучести принимается условно величина напряжения, при котором остаточная деформация равна 0,2% (рис. 2.23).

2. Характеристики пластичности:

Относительное остаточное удлинение при разрыве

$$\delta = [(l_1 - l_0) / l_0] \cdot 100\%.$$

Относительное остаточное сужение при разрыве

$$\psi = [(A_0 - A_1) / A_0] \cdot 100\%.$$

Пластичные и хрупкие материалы. Способность материала без разрушения получать большие остаточные деформации носит название *пластичности*. Свойство пластичности имеет решающее значение для таких технологических операций как штамповка, вытяжка, волочение, гибка и др. Мерой пластичности является удлинение δ при разрыве: при $\delta > 5\%$ материалы относятся к пластичным, а при $\delta < 5\%$ – к хрупким.

К числу пластичных материалов относятся отожженная медь, алюминий, латунь, малоуглеродистая сталь и др. Менее пластичными являются дюраль и бронза. К числу слабо пластичных материалов относятся многие легированные стали.

Противоположным свойству пластичности является свойство *хрупкости*, т.е. способность материала разрушаться без образования заметных остаточных деформаций. Материалы, обладающие этим свойством, называются хрупкими. К хрупким материалам относится чугун, высокоуглеродистая инструментальная сталь, стекло, кирпич, камни и др.

Разгрузка и повторное нагружение. Наклеп. Если при нагружении образца не был превышен предел упругости, то при разгрузке все деформации полностью исчезнут и при повторном нагружении этот образец будет вести себя так же, как и при первом нагружении.



Рис. 2.24

Если же образец был нагружен до напряжения, большего предела упругости, например, до напряжения, соответствующего точке *m* (рис. 2.24), то разгрузка пойдет по прямой *mn*, параллельной линии *oa*. Упругая часть деформации (отрезок *np*) исчезнет, пластическая же часть деформации (отрезок *on*) останется.

При повторном нагружении образца диаграмма напряжений принимает вид прямой *mt* и далее – кривой *mde*, как будто промежуточной разгрузки и не было. Следовательно, в результате предварительного нагружения повышаются упругие свойства материала ($\sigma'_{мт} > \sigma_{мт}$) и снижается его пластичность ($\delta' < \delta$).

Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования носит название *наклепа* и широко используется в технике.

Например, провода, цепи, тросы часто подвергаются предварительной вытяжке силами, превышающими рабочие, с тем, чтобы избежать остаточных удлинений в дальнейшем. В некоторых случаях явление наклепа оказывается нежелательным, как, например, в процессе штамповки многих тонкостенных деталей. В этом случае для того, чтобы избежать разрыва листа, вытяжку производят в несколько ступеней. Перед очередной операцией вытяжки деталь подвергают отжигу, в результате которого наклеп снимается.

Влияние температуры и фактора времени. Все сказанное выше о свойствах материала относилось к испытаниям в так называемых нормальных условиях, т.е. при температуре 20°C и при сравнительно небольших скоростях изменения нагрузок и удлинений, которые обеспечиваются обычными испытательными машинами.

Диапазон температур, в пределах которого реально работают конструкционные материалы, выходит далеко за рамки указанных нормальных условий. Есть конструкции, где материал находится под действием чрезвычайно высоких температур, как, например, в авиационных реактивных двигателях она превышает 1000°C. Имеются конструкции, где, напротив, рабочие температуры оказываются низкими. Это элементы холодильных установок и резервуары, содержащие жидкие газы.

У большинства материалов с повышением температуры понижается прочность и повышается пластичность. Мягкая сталь ведет себя несколько иначе: при температурах 200...300°C ее прочность увеличивается, а пластичность уменьшается. Это явление называется *синеломкостью*, потому что в указанном интервале температур на поверхности нагретого стального изделия появляется синий цвет побежалости. При дальнейшем повышении температуры прочность начинает резко снижаться.

При статическом нагружении, начиная с некоторых значений температур, резко сказывается фактор времени. Для одних материалов это происходит при более низких, для других – при более высоких температурах. Влияние фактора времени обнаруживается и при нор-

мальных температурах. Однако для металлов его влиянием можно пренебречь.

Изменение во времени деформаций и напряжений, возникающих в нагруженной детали, носит название *ползучести*.

Частным проявлением ползучести является рост необратимых деформаций при постоянном напряжении. Это явление носит название *последствия*. Например, лопатки газовой турбины, работая при высокой температуре и находясь под действием больших центробежных сил, непрерывно удлиняются. Это удлинение может привести к разрушению лопаток или опасному задеванию их за корпус, что иногда и наблюдается на практике.

Другим частным проявлением свойств ползучести является *релаксация* – самопроизвольное изменение во времени напряжений при неизменной деформации. Релаксацию можно наблюдать, в частности, на примере ослабления затяжки болтовых соединений, работающих в условиях высоких температур.

Основными механическими характеристиками материала в условиях ползучести являются предел длительной прочности и предел ползучести.

Пределом длительной прочности называется отношение нагрузки, при которой происходит разрушение растянутого образца через заданный промежуток времени, к первоначальной площади сечения.

Таким образом, предел длительной прочности зависит от заданного промежутка времени до момента разрушения. Последний выбирается равным сроку службы детали и меняется в пределах от десятков часов до сотен тысяч часов. С увеличением времени он, естественно, падает.

Пределом ползучести называется напряжение, при котором пластическая деформация за заданный промежуток времени достигает заданной величины.

Как видим, для определения предела ползучести необходимо знать интервал времени (который определяется сроком службы дета-

ли) и интервал допустимых деформаций (который определяется условиями эксплуатации детали).

Пределы длительной прочности и ползучести сильно зависят от температуры. С увеличением температуры они уменьшаются.

2.6.3. Испытание на сжатие. Согласно ГОСТ 25503-80 испытанием на сжатие определяют механические характеристики только хрупких материалов. При этом определению подлежит лишь предел прочности $\sigma_{\text{пчс}}$. Поэтому таким испытаниям подвергают, главным образом, хрупкие материалы, которые, как правило, лучше сопротивляются сжатию, чем растяжению. Например, отношение предела прочности на сжатие $\sigma_{\text{пчс}}$ к пределу прочности на растяжение $\sigma_{\text{пчр}}$ для чугуна лежит в пределах 2,5...5; для керамических материалов – 5...10.

Форма и размеры образца зависят от материала:

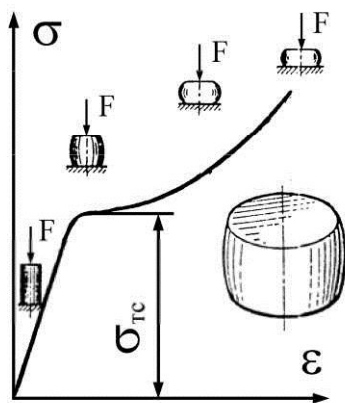
- для металлов (чугун, сталь) применяют образцы в форме невысоких цилиндров ($h/d = 1 \dots 3$), так как при более длинных образцах может произойти их изгиб;
- для строительных материалов, включая дерево, берут образцы в форме кубиков.

Образцы помещают между параллельными плитами прессы или универсальной испытательной машины и подвергают сжатию возрастающей нагрузкой.

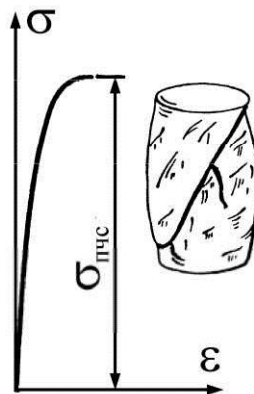
Для малоуглеродистой стали диаграмма сжатия имеет вид кривой, показанной на рис. 2.25, а. Здесь, как и для растяжения, обнаруживается площадка текучести с последующим переходом к зоне упрочнения. В дальнейшем, однако, нагрузка не падает, как при растяжении, а резко возрастает. Происходит это в результате того, что площадь поперечного сечения сжатого образца увеличивается; сам образец вследствие трения на торцах принимает бочкообразную форму. Довести такой образец до разрушения практически не удастся. Испытуемый цилиндр сожмется в тонкий диск, и дальнейшее испыта-

ние ограничивается возможностями машины. Поэтому предел прочности при сжатии для такого рода материалов не может быть найден. Из опытов определяются только пределы пропорциональности и текучести, а также упругие константы материала (модуль упругости и коэффициент Пуассона); при растяжении и сжатии они практически одинаковы.

а– малоуглеродистая сталь



б – чугун



в– дерево

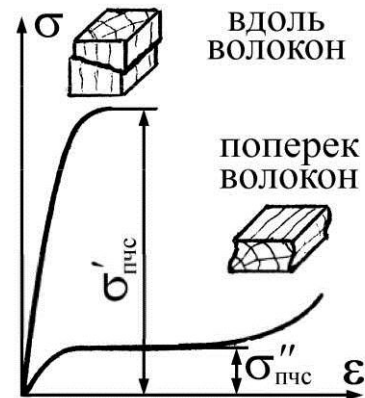


Рис. 2.25

Иначе ведут себя при испытании на сжатие хрупкие материалы. На рис. 2.25, б приведена диаграмма сжатия и показан характер разрушения образца из серого чугуна (трещины, появляющиеся на образце в начале разрушения, направлены под углом примерно 45° к его оси). Единственная характеристика, получаемая в результате этого испытания, – предел прочности при сжатии $\sigma_{пчс}$.

Дерево, как анизотропный материал, обладает различной прочностью вдоль и поперек волокон, что наглядно представлено на рис. 2.25, в. При сжатии вдоль волокон диаграмма внешне похожа на диаграмму сжатия чугуна. Разрушение происходит с образованием поперечных складок и обмятием торцов. Сжатие поперек волокон сопровождается уплотнением древесины без видимых признаков разрушения образца. Уловить момент потери несущей способности не представляется возможным. Поэтому за разрушающую нагрузку ус-

ловно принимают такую силу, при достижении которой высота кубика уменьшается на 1/3 первоначального значения. Различие механических свойств дерева вдоль и поперек волокон характеризуется коэффициентом анизотропии $K_a = \sigma'_{\text{пче}} / \sigma''_{\text{пче}}$, который для сосны лежит в пределах 7...10.

2.6.4. Испытание на твердость. Под *твердостью* понимается способность материала противодействовать механическому проникновению в него посторонних тел. Понятно, что такое определение твердости повторяет, по существу, определение прочности. В материале при вдавливании в него постороннего тела возникают местные пластические деформации, сопровождающиеся при дальнейшем увеличении сил местным разрушением. Поэтому показатели прочности и твердости связаны между собой.

Наиболее широкое распространение получили пробы по Бринеллю и по Роквеллу. В первом случае в поверхность исследуемой детали вдавливается стальной шарик диаметром 10 мм, во втором – алмазный острый наконечник. По обмеру полученного отпечатка судят о твердости материала.

Между пределом прочности материала при растяжении и числом твердости по Бринеллю существует следующая эмпирическая зависимость: для стали $\sigma_{\text{пчр}} = 0,34 \text{ НВ}$; для медных сплавов $\sigma_{\text{пчр}} = 0,45 \text{ НВ}$; для алюминиевых сплавов $\sigma_{\text{пчр}} = 0,35 \text{ НВ}$. Таким образом, определение предела прочности материала путем изготовления специальных образцов и разрыва их можно заменить определением твердости. Этим способом широко пользуются на практике.

2.7. ЗАПАС ПРОЧНОСТИ И ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Понятие допускаемого напряжения, лежащего в основе наиболее распространенного метода расчета на прочность (метода допускаемых напряжений), мы ввели в вводном разделе курса, определив его как отношение предельного для данного материала напряжения $\sigma_{\text{пред}}$, определяемого экспериментально, на нормативный коэффициент запаса прочности $[n]$, т.е.

$$[\sigma] = \sigma_{\text{пред}} / [n].$$

Для пластичных материалов в качестве предельного напряжения принимается предел текучести ($\sigma_{\text{тр}}$ или $\sigma_{0,2}$), а для хрупких – предел прочности ($\sigma_{\text{пчр}}$).

Коэффициент запаса определяется в первую очередь из опыта, накопленного в процессе создания аналогичных конструкций. В каждой отрасли техники сложились свои подходы и свои традиции, а точнее – свой опыт. В общем машиностроении требуемый коэффициент запаса для типовых деталей машин колеблется в пределах от 1,5 до 2,5. В авиационной технике требования минимального веса заставляют брать от конструкции максимум резервов прочности и там коэффициент запаса для многих узлов лежит в пределах полутора единиц, а иногда бывает и меньше, но зато налагаются требования натуральных испытаний. В процессе создания опытной конструкции отдельные узлы самолета и весь самолет в сборе (опытный образец, конечно) подвергают испытаниям до разрушения в типичных условиях наиболее опасных режимов. Для строительных сооружений, рассчитанных на долгие сроки службы, коэффициенты запаса принимаются довольно большими ($[n_{\text{пч}}] = 2 \dots 5$). Для многих ответственных конструкций величина требуемого коэффициента запаса регламентируется нормами прочности, нарушение которых преследуется по закону. Нормы прочности существуют в самолетостроении, в судостроении. Широко распространены нормы прочности Госгортехнадзора, в соответствии с

требованиями которых проектируются сосуды высокого давления и лифты.

В “Справочнике машиностроителя” коэффициент запаса прочности рекомендуется определять как произведение трех частных коэффициентов

$$[n] = [n_1][n_2][n_3],$$

где $[n_1]$ – коэффициент, учитывающий неточность в определении нагрузок и напряжений (при повышенной точности определения действующих напряжений его принимают равным 1,2...1,5; при меньшей точности расчетов – 2...3); $[n_2]$ – коэффициент, учитывающий неоднородность материала, повышенную его чувствительность к недостаткам механической обработки (он принимается равным: для пластичных материалов – 1,4...2,0; для малопластичных высокопрочных сталей при расчете по пределу прочности – 2...3; для хрупких материалов – 3...4; для весьма хрупких материалов – 4...6; для древесины – 3,5...6,0); $[n_3]$ – коэффициент условий работы, учитывающий степень ответственности детали, равный 1,0...1,5.

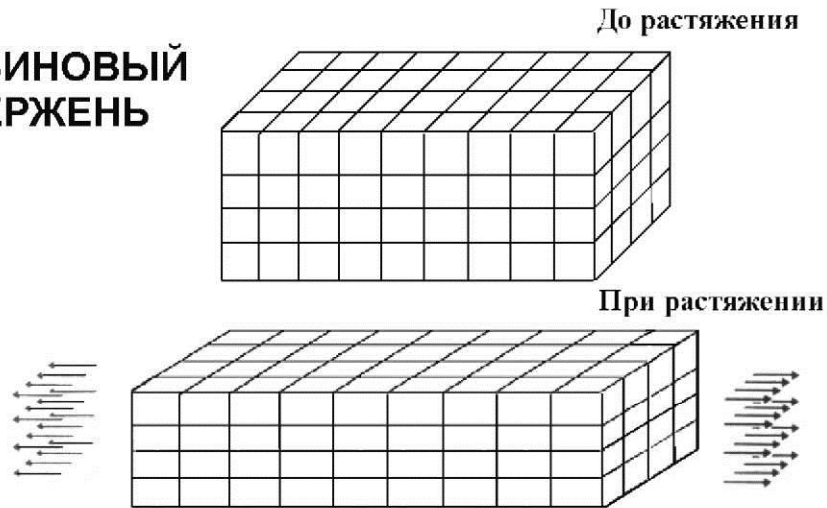
В заключение приведем ориентировочные значения допускаемых напряжений на растяжение для некоторых конструкционных материалов, выраженные в мегапаскалях: сталь углеродистая – 140...250; сталь легированная – 100...400; чугун серый в отливках – 30...80; латунь – 70...140; бронза – 60...120; дюралюминий – 80...150; текстолит – 30...40; сосна вдоль волокон – 7...10; кирпичная кладка – до 0,2; бетон – 0,2...1,4.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какой вид нагружения называется растяжением?
2. Чему равна продольная сила?
3. Как вычисляются напряжения в поперечном сечении растянутого стержня?
4. В каких частях растянутого стержня распределение напряжений не является равномерным?
5. Зависит ли распределение напряжений от способа приложения внешних сил?
6. Как записывается условие прочности растянутого стержня? Какие задачи можно решать с помощью этого условия?
7. Как записывается закон Гука при растяжении (сжатии)?
8. Каков физический и геометрический смысл модуля Юнга?
9. Что такое коэффициент Пуассона? В каких пределах он измеряется для изотропных материалов?
10. Характеристиками каких свойств материала являются модуль Юнга и коэффициент Пуассона?
11. Что такое пластичность материала?
12. Какие величины характеризуют пластические свойства материала и как они определяются?
13. По какому критерию конструкционные материалы делятся на пластические и хрупкие?
14. Как изменяются механические качества стали с повышением и понижением температуры?
15. Что такое ползучесть материала и как она проявляется?
16. Перечислите основные механические характеристики материала в условиях ползучести и дайте их определения?
17. Что такое наклеп?
18. Каковы особенности испытаний на сжатие?
19. Какое напряжение принимается в качестве предельного для пластичных и хрупких материалов?
20. Каковы особенности, присущие статически неопределимым системам?

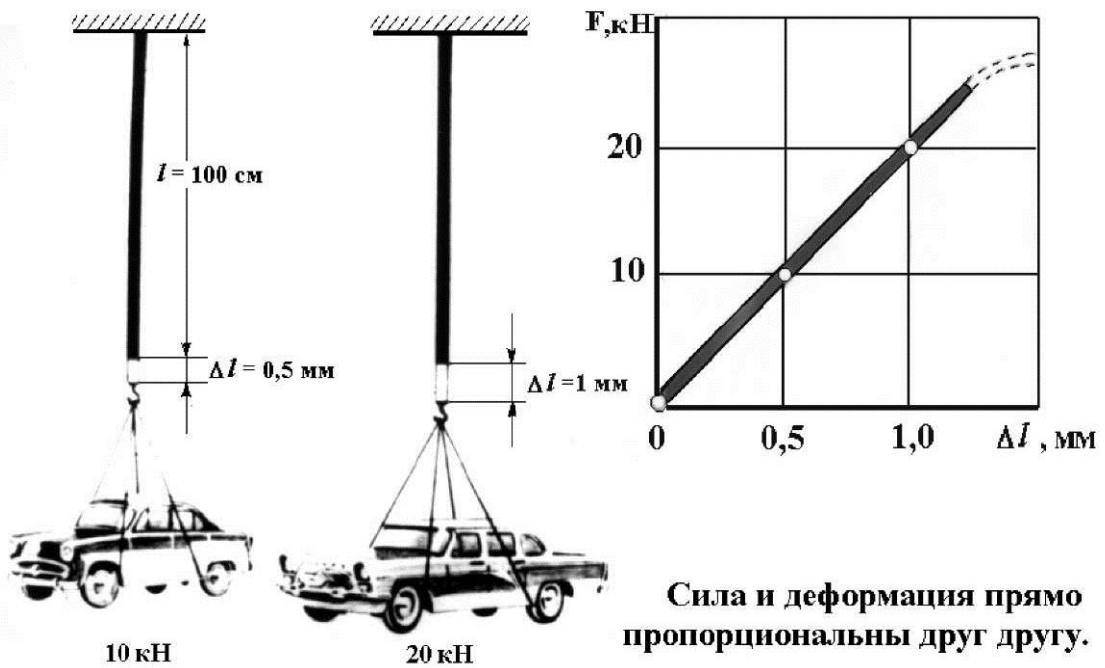
1. ХАРАКТЕР ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ ПРИ ОСЕВОМ РАСТЯЖЕНИИ

РЕЗИНОВЫЙ СТЕРЖЕНЬ



Поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации

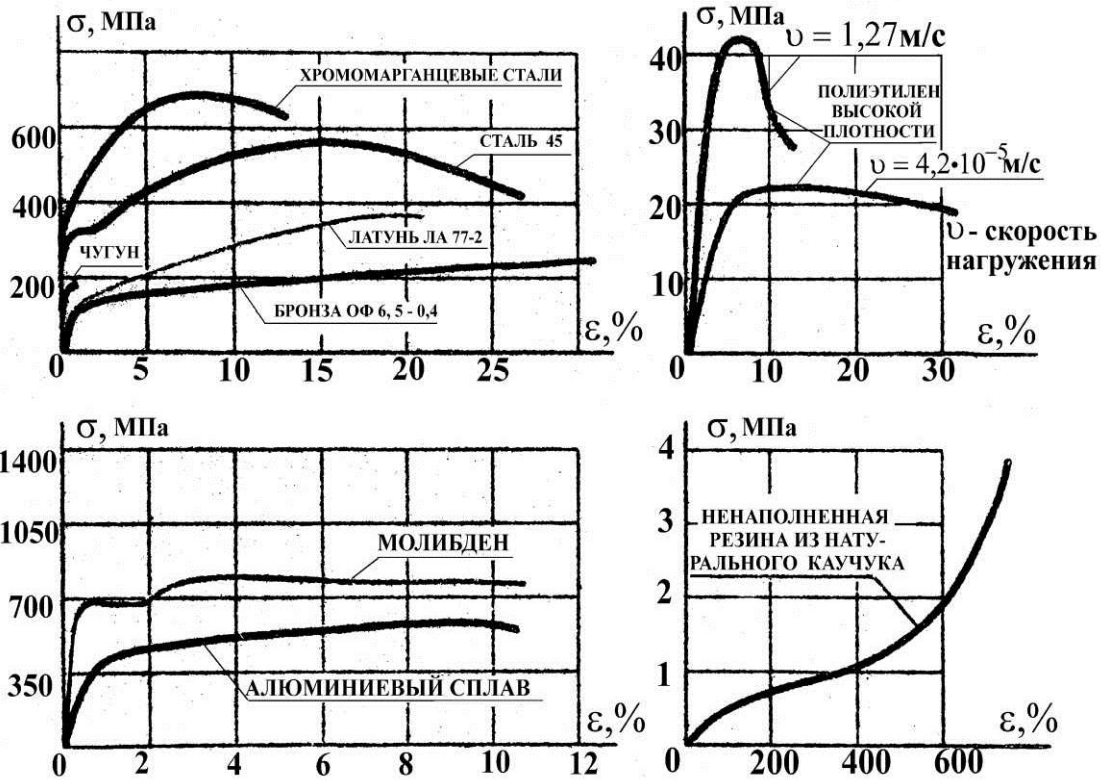
2. ЗАКОН ГУКА



Сила и деформация прямо пропорциональны друг другу.

3. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

3.1. Диаграммы растяжения различных материалов



3.2. Диаграммы растяжения и сжатия ПЛАСТИЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ



ХРУПКИЕ МАТЕРИАЛЫ



4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

4.1. Проверка прочности



Сила, растягивающая шток

$$F = p \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 200 \text{ кН.}$$

Площадь поперечного сечения

$$A = \pi d^2 / 4 = \pi \cdot 4^2 / 4 = 12,56 \text{ см}^2.$$

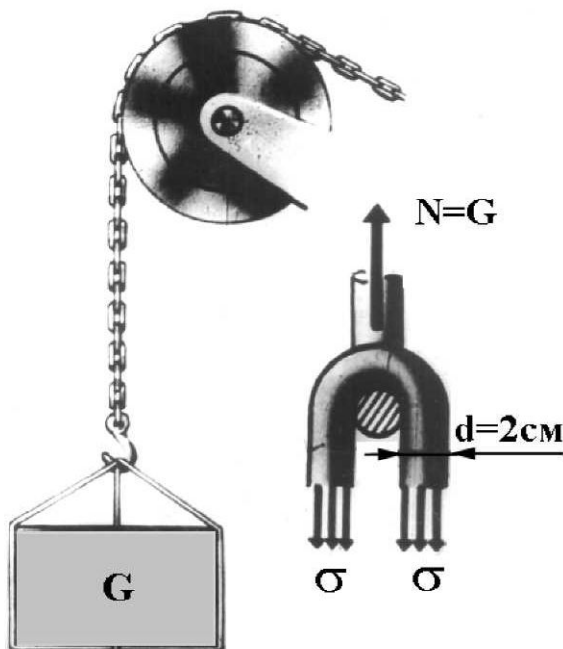
Допускаемое напряжение

$$[\sigma] = 180 \text{ МПа.}$$

Фактическое напряжение

$$\sigma = N/A = 162,5 \text{ МПа.}$$

4.2. Определение допускаемой нагрузки



Допускаемое напряжение

$$[\sigma] = 100 \text{ МПа.}$$

Площадь поперечного сечения

$$A = 2\pi d^2 / 4 = 6,28 \text{ см}^2.$$

Допускаемая нагрузка

$$[G] = [N] = [\sigma] A = 62,8 \text{ кН.}$$

3. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

Число есть сущность всех вещей.

Пифагор

3.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

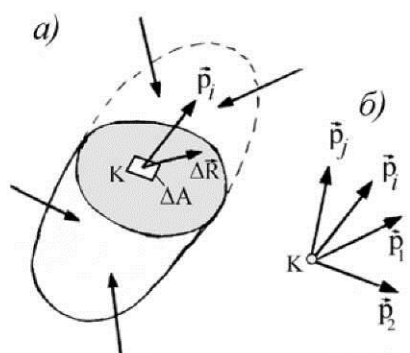


Рис. 3.1

Напряжение в точке, равное

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\Delta \vec{R} / \Delta A), \quad (3.1)$$

зависит от ориентации площадки. Каждой площадке с нормалью \vec{n}_i соответствует свой вектор напряжения \vec{p}_i .

Совокупность векторов напряжений для всевозможных площадок, проходящих через данную точку, представляет напряженное состояние в этой точке. Итак, если напряжение – это одиночный вектор, то напряженное состояние – пучок векторов (рис. 3.1, б).

представляет напряженное состояние в этой точке. Итак, если напряжение – это одиночный вектор, то напряженное состояние – пучок векторов (рис. 3.1, б).

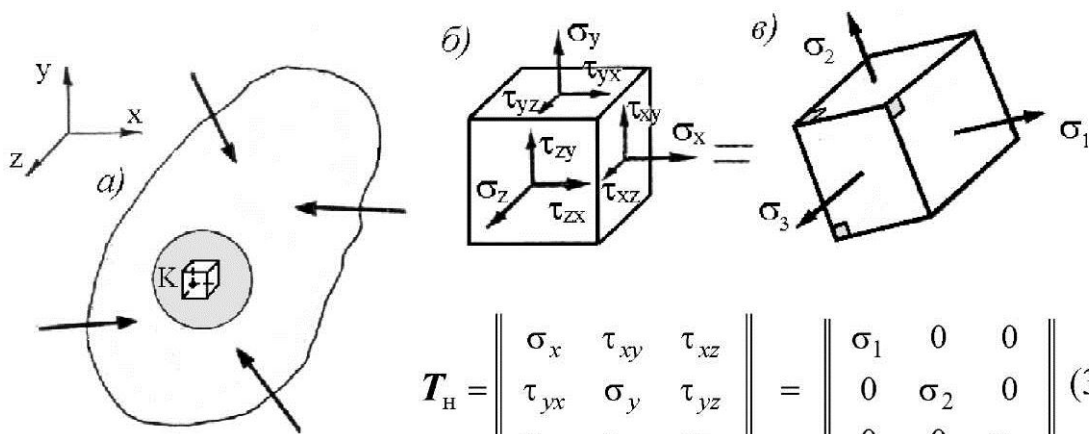
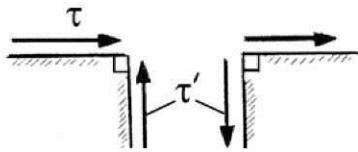


Рис. 3.2

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

Количественной характеристикой напряженного состояния выступает тензор напряжения T_H , компонентами которого являются нормальные и касательные напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках (рис. 3.2).

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения; $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ – касательные напряжения (первый индекс означает нормаль к площадке, а второй – параллельную касательному напряжению ось).



Касательные напряжения подчиняются закону парности, согласно которому $\tau = \tau'$ или в общем виде $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. (3.3)

В каждой точке тела существуют, по крайней мере, три взаимно перпендикулярные площадки, свободные от касательных напряжений и называемые главными (рис. 3.2, в). Действующие на них главные напряжения обладают экстремальными свойствами и связаны между собой

соотношением $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (с учетом знака!) (3.4)

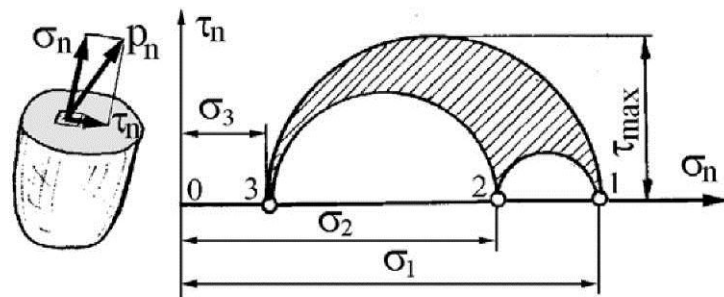


Рис. 3.3

помощью круговой диаграммы Мора. Геометрическим образом напряженного состояния является криволинейный треугольник 123. Из рис. 3.3 наглядно

видно, что наибольшее касательное напряжение равно

$$\tau_{\max} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (3.5)$$

Классификация напряженных состояний:

1. Объемное (все три главных напряжения отличны от нуля).
2. Плоское (одно из главных напряжений равно нулю).
3. Линейное (два главных напряжения равны нулю).

3.2. ЛИНЕЙНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

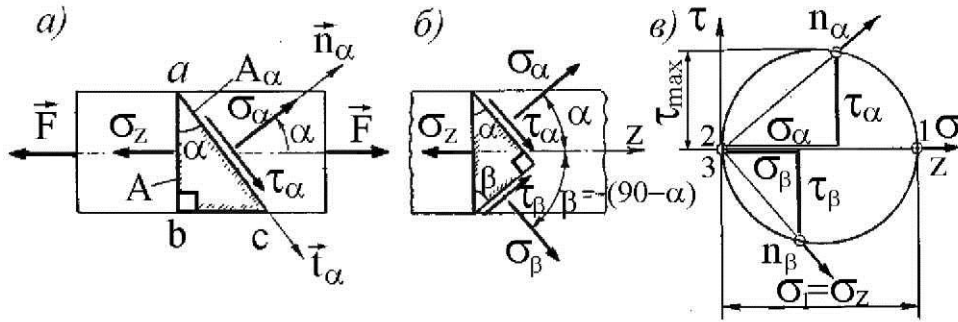


Рис. 3.4

Оно реализуется при центральном растяжении и сжатии прямолинейного стержня (рис. 3.4, а). Для определения напряжений на произвольной наклонной площадке выделим элемент и рассмотрим его равновесие:

$$\sum F_{in} = 0, \quad \sigma_{\alpha} A_{\alpha} = \sigma_z A \cos \alpha,$$

откуда
$$\sigma_{\alpha} = \sigma_z \cos^2 \alpha;$$

$$\sum F_{it} = 0, \quad \tau_{\alpha} A_{\alpha} = \sigma_z A \sin \alpha,$$

откуда
$$\tau_{\alpha} = \sigma_z \sin \alpha \cos \alpha = 0,5 \sigma_z \sin 2\alpha.$$

Итак,
$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= 0,5 \sigma_z (1 + \cos 2\alpha), \\ \tau_{\alpha} &= 0,5 \sigma_z \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

На площадке, перпендикулярной к данной, с нормалью, наклонной к оси z под углом $\beta = -(90^{\circ} - \alpha)$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\beta} &= \sigma_z \sin^2 \alpha, \\ \tau_{\beta} &= -0,5 \sigma_z \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Из формул (3.6) и (3.7) вытекают следующие выводы:

1. Наибольшее нормальное напряжение возникает в поперечном сечении стержня
$$\sigma_{\max} = \sigma_{\alpha=0} = \sigma_z = N_z / A.$$

2. Наибольшее касательное напряжение возникает на площадке, наклоненной под углом 45° к оси стержня $\tau_{\max} = \tau_{\alpha=45^\circ} = 0,5\sigma_z$.

3. На двух любых взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по величине $|\tau_\alpha| = |\tau_\beta|$, а сумма нормальных напряжений постоянна $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_z = \text{const}$.

Исключая из формул (3.6) угол α , получим

$$(\sigma_\alpha - 0,5\sigma_z)^2 + \tau_\alpha^2 = (0,5\sigma_z)^2. \quad (3.8)$$

Это уравнение круговой диаграммы Мора для линейного напряженно-состояния (рис. 3.4, в).

Линейная деформация в произвольном направлении, образующем угол α с осью z , определяется по закону Гука следующим выражением:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \nu\sigma_\beta) = \frac{\sigma_z}{E}(\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha). \quad (3.9)$$

3.3. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

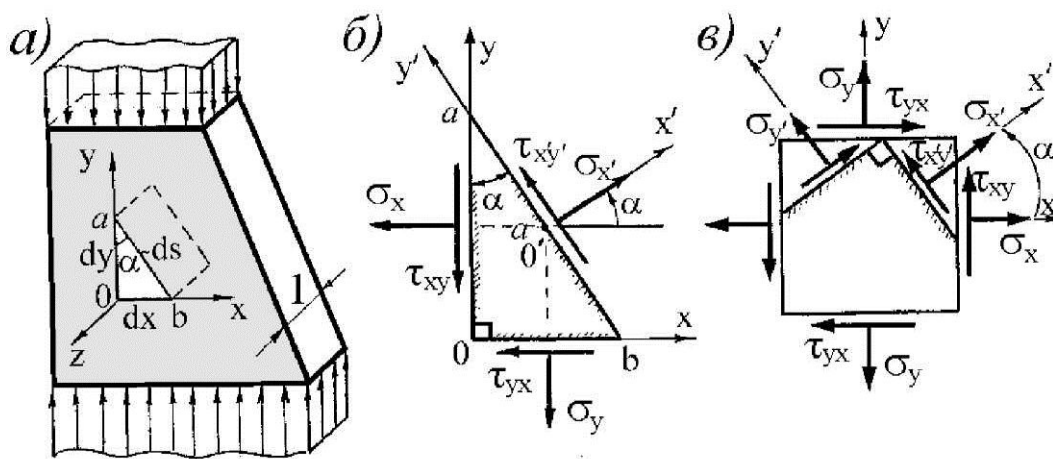


Рис. 3.5

Оно реализуется, например, в тонкой пластине, нагруженной по контуру силами, равномерно распределенными по ее толщине (рис. 3.5).

Зная напряжения на площадках, совпадающих с координатными плоскостями xz и yz , определим напряжения на произвольной наклонной площадке, а также наибольшие нормальные и касательные напряжения, возникающие в данной точке. Выделим из пластины бесконечно малый элемент aob и рассмотрим его равновесие:

$$\sum m_{o'} = 0, \quad \tau_{xy} dy \cdot 1 \cdot dx / 2 = \tau_{yx} dx \cdot 1 \cdot dy / 2, \quad \text{откуда} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad (3.10)$$

$$\sum X'_i = 0,$$

$$\sigma_{x'} ds \cdot 1 - \sigma_x dy \cos \alpha - \sigma_y dx \sin \alpha - \tau_{xy} dy \sin \alpha - \tau_{yx} dx \cos \alpha = 0,$$

откуда после сокращения на ds

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \quad (a)$$

$$\sum Y'_i = 0, \quad \tau_{x'y'} ds + \sigma_x dy \sin \alpha - \sigma_y dx \cos \alpha - \tau_{xy} dy \cos \alpha + \tau_{yx} dx \sin \alpha = 0,$$

откуда после упрощения

$$\tau_{x'y'} = -0,5(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (б)$$

Итак,

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = 0,5(\sigma_x + \sigma_y) + 0,5(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \tau_{x'y'} = -0,5(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{cases} \quad (3.11)$$

Если заменить в формуле (a) угол α на $90^\circ + \alpha$, то получим

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha. \quad (в)$$

Исключая в формулах (3.11) угол α , получим уравнение круговой диаграммы Мора для плоского напряженного состояния (рис. 3.6)

$$[\sigma_{x'} - 0,5(\sigma_x + \sigma_y)]^2 + \tau_{x'y'}^2 = [0,5(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2. \quad (3.12)$$

Это уравнение типа $(x - a)^2 + y^2 = R^2$,

где $a = 0,5(\sigma_x + \sigma_y)$, $R^2 = [0,5(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2$.

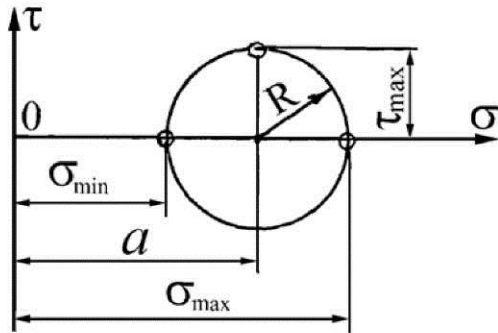


Рис. 3.6

Непосредственно из круговой диаграммы находим величины главных напряжений:

$$\sigma_{\max/\min} = a \pm R = 0,5 [(\sigma_x - \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}] . \quad (3.13)$$

Ориентация главных осей определяется из условия $\tau_{x'y'} = 0$,

откуда
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y) . \quad (3.14)$$

Более удобна следующая формула:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max/\min} = (\sigma_{\max/\min} - \sigma_x) / \tau_{xy} . \quad (3.15)$$

Экстремальные касательные напряжения равны по величине радиусу круговой диаграммы

$$\tau_{\max/\min} = \pm R = \pm 0,5 \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.16)$$

и действуют на площадках, равнонаклоненных к главным осям.

Частный случай – чистый сдвиг (рис. 3.7)

Так как $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$, то по формулам (3.13) и (3.14)

получим

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \tau ,$$

следовательно,

$$\sigma_1 = +\tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau ;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \pm \infty, \text{ откуда}$$

$$2\alpha_0 = \pm 90^\circ \text{ и } \alpha_0 = \pm 45^\circ .$$

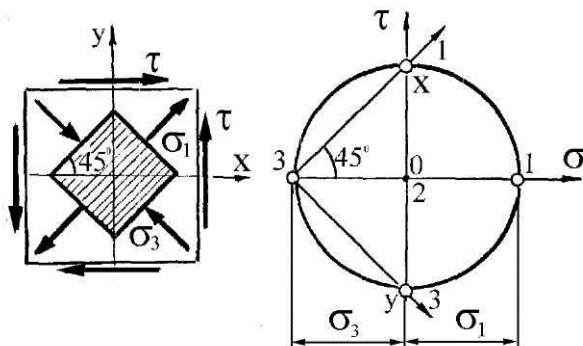


Рис. 3.7

Зависимости между напряжениями и деформациями определяются законом Гука:

- *прямая форма*

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E, \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E, \end{aligned} \right\} \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G; \quad (3.17)$$

- *обратная форма*

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)/(1 - \nu^2), \\ \sigma_y &= E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)/(1 - \nu^2), \end{aligned} \right\} \tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (3.18)$$

3.4. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

Для установления зависимостей напряжений и деформаций от внешних сил, нагружающих тело, необходимо знать связь между напряжениями и деформациями в общем случае напряженного состояния. С целью получения искомых аналитических выражений воспользуемся принципом независимости действия сил и законом Гука при простом растяжении. Начнем со случая трехосного растяжения.

Закон Гука в главных осях. Рассмотрим элемент, вырезанный из тела и имеющий форму параллелепипеда, ребра которого направлены по главным осям (рис. 3.8). Относительное удлинение в направлении оси 1, обусловленное напряжением σ_1 , равно σ_1/E . Напряжениям σ_2 и σ_3 соответствуют удлинения по оси 1 обратного знака, равные $-\nu\sigma_2/E$ и $-\nu\sigma_3/E$. Складывая, получим

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E - \nu\sigma_2/E - \nu\sigma_3/E.$$

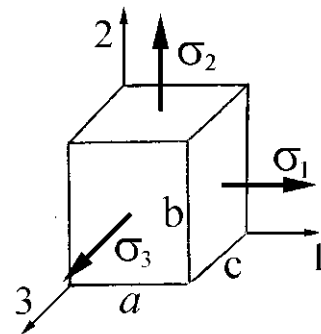


Рис. 3.8

Такие же выражения получаются по аналогии для ε_2 и ε_3 .

$$\text{В итоге} \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{cases} \quad (3.19)$$

Объемная деформация. Упругая деформация вообще сопровождается изменением объема. Так, объем изображенного на рис. 3.8 параллелепипеда до деформации равен $V_0 = abc$. В результате деформации ребра параллелепипеда стали

$$a + \Delta a = a(1 + \varepsilon_1), \quad b + \Delta b = b(1 + \varepsilon_2), \quad c + \Delta c = c(1 + \varepsilon_3)$$

и новый объем $V_1 = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = abc(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)$.

Следовательно, относительное изменение объема равно

$$\varepsilon_V = (V_1 - V_0)/V_0 = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3). \quad (3.20)$$

Поскольку деформации малы по сравнению с единицей, то, выполняя перемножение трех скобок в правой части (3.20), мы сохраним только первые степени деформаций, отбросив их произведения (члены второго и третьего порядка малости). Таким образом, для малых деформаций

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (3.21)$$

Желая связать относительное изменение объема с напряжениями, сложим три уравнения (3.19). Получим:

$$\varepsilon_V = \frac{1}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(1 - 2\nu),$$

или в компактной форме $\varepsilon_V = \sigma/K$, (3.22)

где $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ – среднее напряжение, K – модуль объемной деформации, равный $K = E/[3(1 - 2\nu)]$.

При положительном σ величина ε_V должна быть также положительной, при отрицательном σ – отрицательной. Это возможно только

в том случае, если $\nu \leq 0,5$. Следовательно, значение коэффициента Пуассона для изотропного материала не может превышать 0,5.

Закон Гука при сдвиге. Прямоугольный параллелепипед, на гранях которого действуют касательные напряжения, перекашивается. Первоначально прямые углы между гранями искажаются, как показано на рис. 3.9. Та величина, на которую изменился первоначально прямой угол между гранями, называется углом сдвига или просто сдвигом и является мерой деформации, вызванной касательными напряжениями. Величина касательного напряжения связана с соответствующим сдвигом соотношением

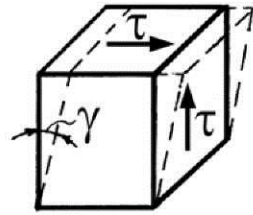


Рис. 3.9

$$\tau = G\gamma \quad (3.23)$$

Формула (3.23) по структуре вполне подобна формуле закона Гука для растяжения; выражаемый этой формулой закон носит название *закона Гука при сдвиге*. Величина G , имеющая размерность напряжения, называется модулем сдвига. Как оказывается, закон Гука при сдвиге не является выражением нового экспериментального факта; формула (3.23) вытекает из закона Гука для растяжения и величина G выражается через ранее введенные упругие постоянные E и ν

$$G = E/[2(1 + \nu)]. \quad (3.24)$$

Обобщенный закон Гука. В самом общем случае, когда на гранях элементарного параллелепипеда действуют как нормальные, так и касательные напряжения (рис. 3.10), деформации от нормальных и от касательных напряжений определяются независимо. Удлинения находятся по формулам (3.19) так, как если бы σ_x , σ_y , σ_z были главными напряжениями, сдвиги вычисляются по формуле (3.23). Таким образом, уравнения закона Гука для произвольных осей имеют следующий вид:

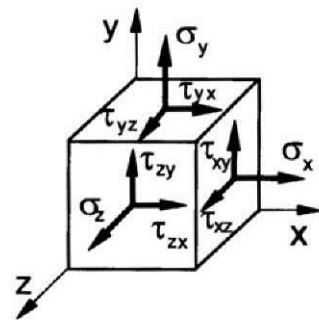


Рис. 3.10

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G, \\ \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G, \\ \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G. \end{array} \quad (3.25)$$

3.5. УДЕЛЬНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Упругое тело, будучи деформировано, становится аккумулятором энергии, которая численно равна работе, совершаемой внешними силами при деформации тела. Речь, конечно, идет о статическом нагружении. Это свойство упругих тел широко используется, например, в заводных пружинах часовых механизмов и в различных упругих амортизирующих элементах (рессоры, пружины, торсионные валы и др.). Вычислим энергию, которая накапливается в единичном объеме тела, и называется удельной потенциальной энергией упругой деформации. Для этого рассмотрим куб единичных размеров, ребра которого ориентированы по главным осям. Площадь каждой грани равна единице площади, а объем – единице объема. Напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 представляют собой действующие на грани силы, которые совершают работу на перемещениях, равных деформациям ε_1 , ε_2 и ε_3 .

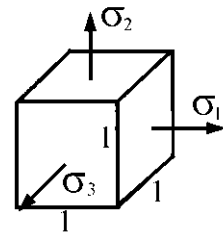


Рис. 3.11

При простом растяжении искомая энергия, как известно, равна

$$u = \sigma \varepsilon / 2.$$

В случае объемного напряженного состояния удельная потенциальная энергия получится как сумма трех слагаемых:

$$u = (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) / 2. \quad (3.26)$$

Используя обобщенный закон Гука, получаем

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (3.27)$$

При деформации элемента (рис. 3.11) изменяется, вообще говоря, как его объем, так и форма (из кубика он превращается в параллелепипед). В соответствии с этим полная энергия упругой деформации может быть представлена в виде двух слагаемых

$$u = u_{об} + u_{\phi}, \quad (3.28)$$

где $u_{об}$ – энергия изменения объема, u_{ϕ} – энергия изменения формы или энергия формоизменения.

Каждое из главных напряжений представляем в виде суммы двух величин $\sigma_i = \sigma + \sigma'_i$, в результате чего напряженное состояние разбивается на два. Первое из них представляет собой всестороннее растяжение, а второе является дополнительным к нему до заданного напряженного состояния. Подставляя в выражение (3.27) вместо σ_1, σ_2 и σ_3 величину σ , получим для энергии изменения объема

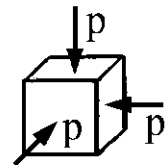
$$u_{об} = \frac{3}{2E} (1 - 2\nu) \sigma^2 = \sigma^2 / (2K). \quad (3.29)$$

Энергию формоизменения найдем, вычитая $u_{об}$ из u . После несложных преобразований получим

$$u_{\phi} = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / (12G). \quad (3.30)$$

Частные случаи. При всестороннем сжатии, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$, получаем

$$u_{об} = p^2 / (2K), \quad u_{\phi} = 0.$$



При чистом сдвиге:

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Следовательно, $u_{об} = 0, \quad u_{\phi} = \tau^2 / (2G).$



3.6. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

Назначение. Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности детали по известному напряженному состоянию, т.е. по известным главным напряжениям в точках тела. Наиболее просто эта задача решается для простых видов деформации (растяжение, кручение, изгиб), так как в этих случаях значения предельных напряжений легко установить экспериментально.

При сложном напряженном состоянии такой подход совершенно неприемлем прежде всего из-за неисчерпаемости возможных типов напряженных состояний, а затем – в связи с чисто техническими затруднениями, возникающими при постановке испытаний материалов. Поэтому приходится изыскивать обходные пути решения этой непростой проблемы.

В настоящее время на практике применяется такой подход, при котором любое сложное напряженное состояние заменяется эквивалентным ему одноосным растяжением. Такая замена производится из условия равенства некоторого определяющего параметра, именуемого в последующем критерием прочности $K_{пч}$, для сравниваемых напряженных состояний (рис. 3.12).

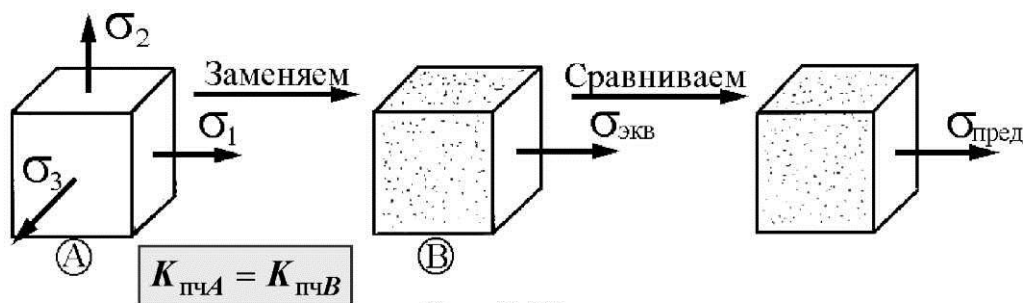


Рис. 3.12

Эквивалентное напряжение – это такое напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его состояние было равноопасно с заданным напряженным состоянием.

Вводя понятие эквивалентного напряжения, мы сводим расчет на прочность в сложном напряженном состоянии к расчету на обычное растяжение, т.е. условие прочности представляется в виде одного из следующих неравенств:

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma_p] = \sigma_{\text{пред}} / [n] \quad \text{или} \quad n = \sigma_{\text{пред}} / \sigma_{\text{экв}} \geq [n],$$

где $\sigma_{\text{пред}}$ – предельное для данного материала напряжение, полученное при испытаниях на растяжение и равно пределу текучести $\sigma_{\text{тр}}$ для пластичных материалов или пределу прочности $\sigma_{\text{пчр}}$ для хрупких материалов; n и $[n]$ – фактический и нормативный коэффициенты запаса прочности.

Основные гипотезы. Установление критериев прочности является основной задачей так называемых гипотез прочности, наиболее известные из которых приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

№	Название, автор	Критерий прочности	Эквивалентное напряжение, $\sigma_{\text{экв}}$	Область применения
1	Наибольших нормальных напряжений, Галилей, 1686г	σ_{max}	σ_1	Не рекомендуется
2	Наибольших линейных деформаций, Мариотт, 1682г.	ε_{max}	$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$	
3	Наибольших касательных напряжений, Кулон, 1773 г.	τ_{max}	$\sigma_1 - \sigma_3$	Для пластичных материалов, у которых $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}}$
4	Энергии формоизменения, Губер, 1904 г.	$u_{\text{ф}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$	
5	О. Мора, Мор, 1882 г.	$\tau_n = f(\sigma_n)$	$\sigma_{\text{экв}_M} = \sigma_1 - m\sigma_3$ $m = \begin{cases} \sigma_{\text{тр}}/\sigma_{\text{тс}} - \text{пластичные мат.} \\ \sigma_{\text{пчр}}/\sigma_{\text{пчс}} - \text{хрупкие мат.} \end{cases}$	Для пластичных и хрупких материалов

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое напряженное состояние в точке и как оно количественно оценивается?
2. Какие площадки называются главными? Как они взаимно ориентированны?
3. Какое существует соотношение между главными напряжениями?
4. В чем заключается закон парности касательных напряжений?
5. Что представляет собой круговая диаграмма Мора?
6. Чему равно наибольшее касательное напряжение в точке тела и на каких площадках оно действует?
7. Дайте классификацию напряженных состояний.
8. Как вычислить напряжения на наклонных площадках растянутого стержня? Чему равна сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках?
9. На каких площадках растянутого стержня возникают наибольшие нормальные и на каких – наибольшие касательные напряжения?
10. Какой вид имеет круговая диаграмма Мора для растяжения и сжатия?
11. Какое напряженное состояние называется чистым сдвигом? Чему в этом случае равны главные напряжения и как ориентированы главные площадки?
12. Какой вид имеет круговая диаграмма Мора для чистого сдвига?
13. Что представляет собой обобщенный закон Гука?

14. Как вычисляется объемная деформация для изотропного тела?

15. Как выражается удельная потенциальная энергия упругой деформации через напряжения? На какие составляющие она может быть разбита?

16. Чему равна энергия изменения объема при чистом сдвиге?

17. Чему равна энергия изменения формы при всестороннем (гидростатическом) сжатии?

18. Какие существуют типы предельных состояний материала в локальной области?

19. Что такое гипотеза прочности?

20. Какие Вам известны классические гипотезы разрушения?

21. Какие Вам известны классические гипотезы пластичности?

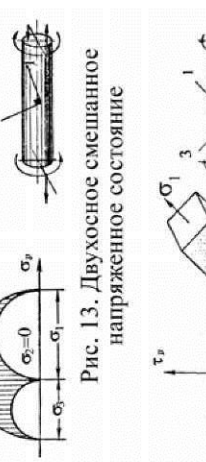
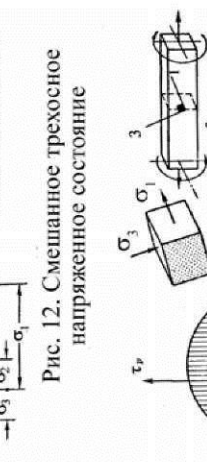
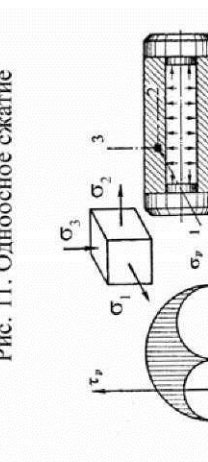
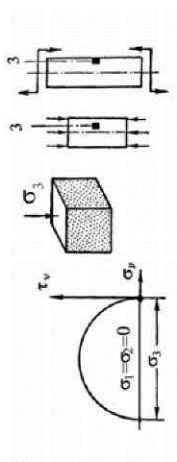
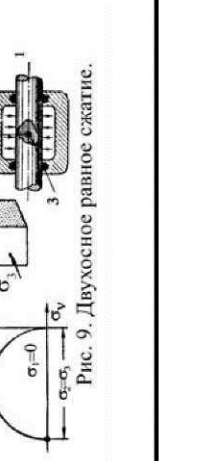
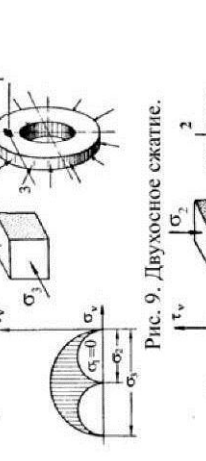
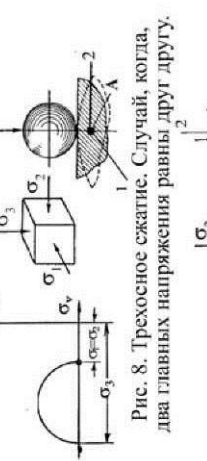
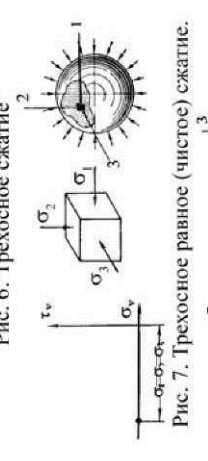
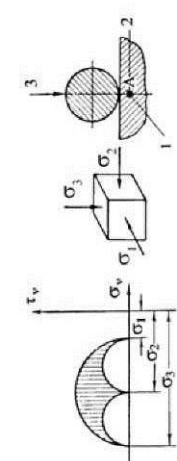
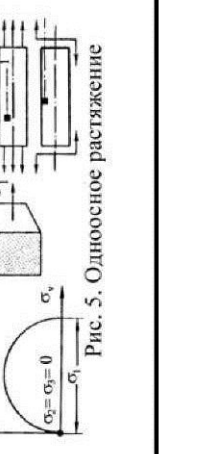
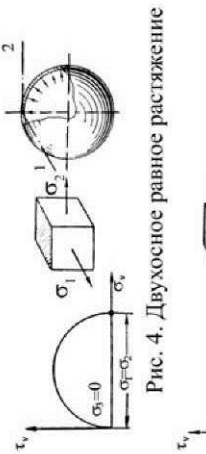
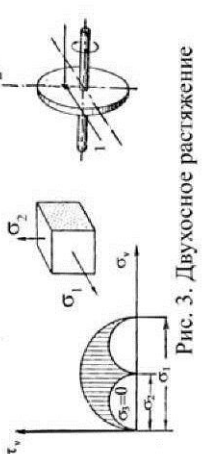
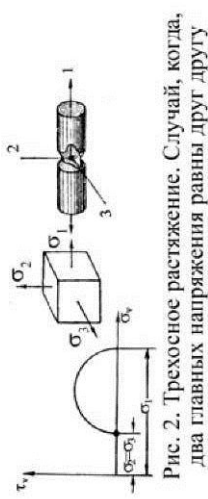
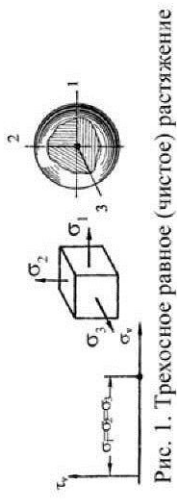
22. Каковы преимущества и недостатки гипотезы Мора?

23. Какие напряженные состояния называются равноопасными?

24. Что такое критерий прочности? Какой критерий прочности лежит в основе первой, второй, третьей и четвертой гипотез прочности?

25. Что понимается под эквивалентным напряжением?

ОБЗОР РАЗЛИЧНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ



4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Воображение принимает не менее участия в творчестве геометра, чем у поэта в минуты его вдохновения.
Д а л а м б е р

В расчете конструкций на механическую надежность очень часто приходится оперировать такими характеристиками плоских фигур, как статический момент, осевой и полярный моменты инерции. Хотя вычисление вышеназванных геометрических характеристик относится к числу простейших задач интегрального исчисления, тем не менее, в силу их узкого прикладного значения они практически не рассматриваются во втузовском курсе высшей математики. По установившейся традиции геометрические характеристики плоских фигур изучаются в курсе сопротивления материалов.

4.1. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

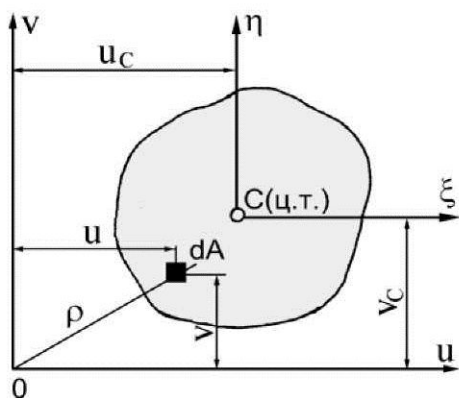


Рис. 4.1

Выражения

$$S_u = \int_A v dA, \quad S_v = \int_A u dA \quad (4.1)$$

называются статическими моментами площади относительно осей u и v (рис. 4.1). Статический момент имеет размерность L^3 . Через статические моменты определяются координаты

центра тяжести (точка C) сечения:

$$u_C = S_v / A, \quad v_C = S_u / A. \quad (4.2)$$

Из формул (4.2) вытекает, что статические моменты относительно осей ξ и η , проходящих через центр тяжести (центральные оси), равны нулю:

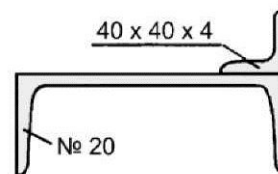
$$S_{\xi} = 0, \quad S_{\eta} = 0.$$

В тех случаях, когда сечение может быть разбито на простейшие составные части, площади и координаты центров тяжести которых известны, положение центра тяжести всего сечения определяется по формулам

$$u_C = \frac{\sum_{i=1}^n u_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad v_C = \frac{\sum_{i=1}^n v_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (4.3)$$

где A_i – площадь i -й части сечения ($i = 1, 2, 3, \dots, n$); u_i и v_i – координаты ее центра тяжести.

Для сечений, составленных из профилей стандартного проката, площадь каждого профиля и остальные необходимые для расчетов размеры принимаются по таблицам ГОСТов на прокатную сталь.



4.2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Моментами инерции площади называются интегралы вида

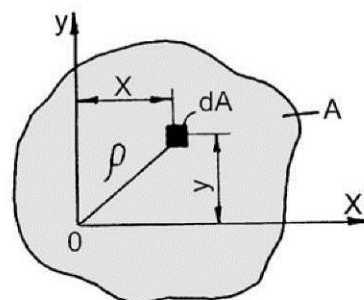


Рис. 4.2

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_{xy} = \int_A xy dA, \quad (4.4)$$

где I_x , I_y – осевые моменты инерции относительно осей x и y , I_{xy} – центробежный момент инерции.

Полярный момент инерции

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_y + I_x. \quad (4.5)$$

Размерность моментов инерции – L^4 . С моментами инерции тесно связаны радиусы инерции:

$$i_x = \sqrt{I_x / A}, \quad i_y = \sqrt{I_y / A}. \quad (4.6)$$

4.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ

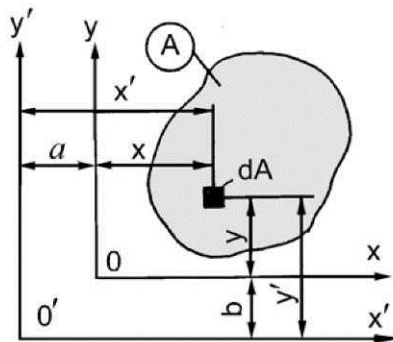


Рис. 4.3

Пусть нам известны моменты инерции относительно осей xOy , а требуется определить те же величины относительно осей $x'O'y'$. Связь между координатами:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

По определению $I_{x'} = \int_A y'^2 dA$ или

$$I_{x'} = \int_A (y + b)^2 dA = \int_A y^2 dA + \int_A 2by dA + \int_A b^2 dA.$$

Следовательно, $I_{x'} = I_x + 2bS_x + b^2 A$, (4.7)

и аналогично $I_{y'} = I_y + 2aS_y + a^2 A$. (4.8)

Центробежный момент инерции относительно новых осей

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' dA = I_{xy} + aS_x + bS_y + abA. \quad (4.9)$$

Для центральных осей статические моменты равны нулю и формулы преобразования приобретают простой вид:

$$I_x = I_{\xi} + y_C^2 A, \quad I_y = I_{\eta} + x_C^2 A, \quad I_{xy} = I_{\xi\eta} + x_C y_C A. \quad (4.10)$$

Момент инерции сечения сложной формы относительно данной оси определяется как сумма моментов инерции составляющих его частей относительно той же оси

$$I_x = \sum_{i=1}^n (I_{\xi_i} + y_i^2 A_i), \quad I_y = \sum_{i=1}^n (I_{\eta_i} + x_i^2 A_i), \quad I_{xy} = \sum_{i=1}^n (I_{\xi_i\eta_i} + x_i y_i A_i), \quad (4.11)$$

где x_i, y_i – координаты i -й части в осях x, y ; $I_{\xi_i}, I_{\eta_i}, I_{\xi_i \eta_i}$ – моменты инерции каждой части относительно своих центральных осей ξ_i и η_i .

Моменты инерции простейших фигур.

Прямоугольник

По определению
$$I_x = \int_A y^2 dA.$$

Элемент площади равен $dA = b dy,$

следовательно,
$$I_x = b \int_0^h y^2 dy = bh^3 / 3.$$

По формуле (4.10) $I_x = I_{\xi} + y_C^2 A,$

откуда, учитывая что $A = bh, \quad y_C = 0,5h,$

находим
$$I_{\xi} = I_x - y_C^2 A = bh^3 / 3 - (h/2)^2 bh = bh^3 / 12.$$

Аналогично получим $I_y = b^3 h / 3$ и $I_{\eta} = b^3 h / 12.$

Треугольник

Момент инерции относительно оси x , совпадающей с основанием,
$$I_x = \int_A y^2 dA.$$

Но $dA = b(y) dy, \quad b(y) = (b/h)(h-y).$ Следова-

тельно,
$$I_x = (b/h) \int_0^h y^2 (h-y) dy = bh^3 / 12.$$

По формуле параллельного переноса $I_x = I_{\xi} + y_C^2 A,$

откуда
$$I_{\xi} = I_x - y_C^2 A = bh^3 / 12 - (h/3)^2 (bh/2) = bh^3 / 36.$$

Круг

Для любых центральных осей $I_{\xi} = I_{\eta}$, поэтому $I_p = 2I_{\xi}.$ Как известно, полярный момент инерции круга равен $I_p = \pi d^4 / 32.$ Следова-

тельно,
$$I_{\xi} = I_{\eta} = I_p / 2 = \pi d^4 / 64.$$

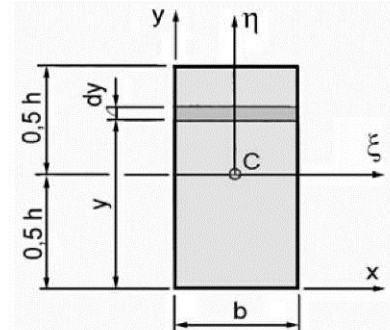


Рис. 4.5

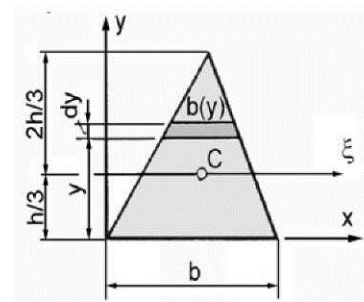


Рис. 4.6

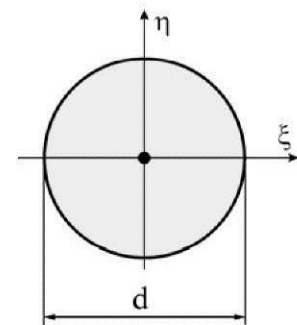


Рис. 4.7

4.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

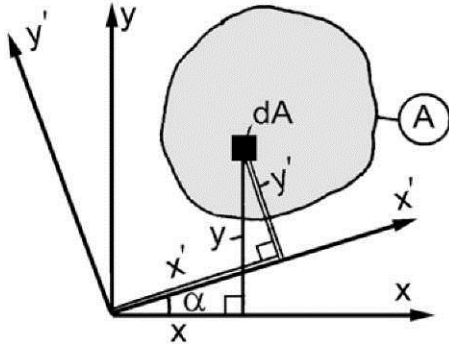


Рис. 4.8

Пусть нам известны моменты инерции относительно осей xOy , а требуется определить те же величины относительно осей $x'O'y'$ (рис. 4.8).

Связь между координатами

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha ,$$

$$y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha .$$

По определению осевого момента инерции $I_{x'} = \int_A y'^2 dA$ или

$$I_{x'} = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha . \quad (4.12)$$

Аналогично $I_{y'} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha . \quad (4.13)$

Центробежный момент для новых осей $I_{x'y'} = \int_A x'y' dA ,$

$$\begin{aligned} I_{x'y'} &= \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA = \\ &= 0,5(I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha . \end{aligned} \quad (4.14)$$

С целью последующего анализа перепишем формулу (4.12) в виде

$$I_{x'} = 0,5(I_x + I_y) + 0,5(I_x - I_y) \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha . \quad (4.15)$$

Исключая из формул (4.15) и (4.14) параметр α , получим зависимость между моментами инерции $I_{x'}$ и $I_{x'y'}$:

$$(I_{x'} - a)^2 + I_{x'y'}^2 = R^2 , \quad (4.16)$$

где $a = 0,5(I_x + I_y), \quad R = 0,5\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} . \quad (4.17)$

Из формулы (4.16) следует, что точки, изображающие совокупность осевого и центробежного моментов инерции для разных осей,

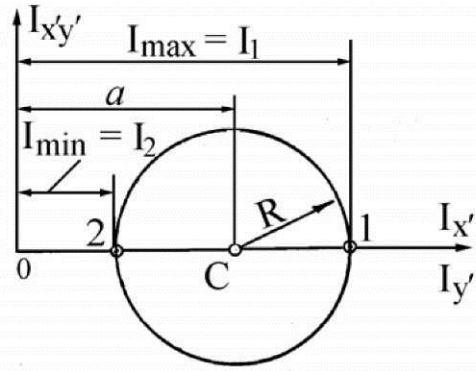


Рис. 4.9

оказываются точками одной и той же окружности (рис. 4.9). Это и есть круговая диаграмма Мора применительно к моментам инерции. Из рассмотрения круговой диаграммы видно, что *существуют две взаимно перпендикулярные оси, для которых центробежный момент равен нулю* и осевые моменты инерции при-

нимают наибольшее и наименьшее значения. Оси эти называются *главными осями* инерции, а соответствующие осевые моменты – *главными моментами* инерции.

Будем считать, что I_1 есть наибольший момент инерции, а I_2 – наименьший. Они определяются по следующим формулам:

$$I_{\max} = I_{1,2} = a \pm R = 0,5[(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}]. \quad (4.18)$$

Полагая, что $I_{x'y'} = 0$, найдем положение главных осей инерции:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = 2I_{xy} / (I_x - I_y). \quad (4.19)$$

Эта формула не является однозначной, так как определяет в зависимости от величин I_x , I_y , I_{xy} либо ось 1, либо ось 2. Положение максимальной оси однозначно определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = (I_x - I_1) / I_{xy}. \quad (4.20)$$

Эллипс, построенный в главных осях, с полуосями, равными главным радиусам инерции

$$i_{\max} = \sqrt{I_{\max} / A}, \quad i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A},$$

принято называть *эллипсом инерции*.

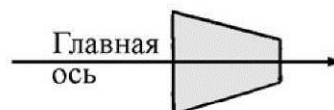
4.5. НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

При выполнении практических расчетов могут оказаться весьма полезными нижеследующие положения, вытекающие из рассмотренной выше теории.

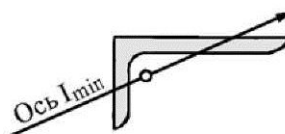
1. Из семейства параллельных осей осевой момент инерции относительно центральной оси принимает наименьшее значение.

2. Полярный момент инерции относительно какой-либо точки равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку.

3. Для сечения, имеющего ось симметрии, эта ось всегда является одной из главных осей.



4. Если сечение вытянуто в некотором направлении, то минимальная главная ось приближается к нему.



5. У всякого сечения, имеющего три и более осей симметрии, все центральные оси являются главными и осевые моменты инерции для них совпадают.

Этим свойством обладают, например, сечения, показанные на рис. 4.10 (квадрат, равносторонний треугольник, криволинейный шестиугольник и др.).

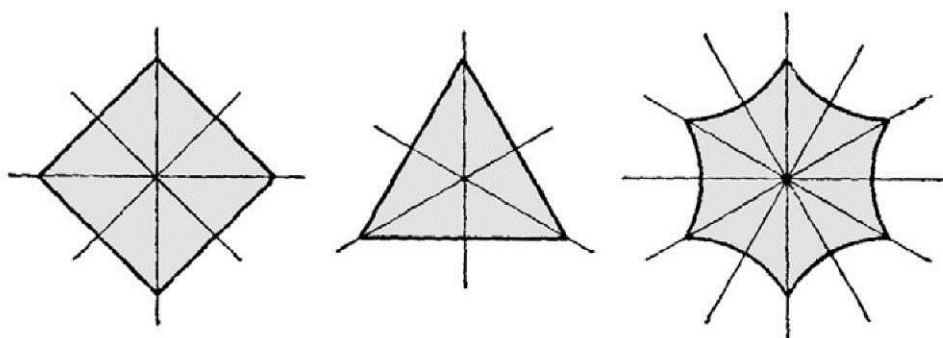


Рис. 4.10

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое статический момент сечения относительно некоторой оси и в каких единицах он измеряется?
2. Чему равен статический момент сечения относительно центральной оси?
3. Что такое центр тяжести сечения и по каким формулам определяются его координаты?
4. Что называется осевым, полярным и центробежным моментами инерции? Какова их размерность?
5. Какая существует связь между полярным и осевыми моментами инерции?
6. Какие моменты инерции всегда положительны?
7. Может ли быть равным нулю центробежный момент инерции?
8. Как изменяются осевые и центробежный моменты инерции при параллельном переносе осей?
9. Относительно какой из множества параллельных осей осевой момент инерции принимает наименьшее значение?
10. Как преобразуются моменты инерции при повороте осей на некоторый угол α ?
11. Каким свойством обладает сумма осевых моментов инерции относительно двух любых ортогональных осей, проходящих через данную точку?
12. Какие оси называются главными осями инерции?
13. В каком случае можно без вычислений определить положение главных осей?
14. Как изменяется центробежный момент инерции при повороте осей координат на 90° ?
15. Почему ось симметрии сечения всегда является одной из главных осей?

5. КРУЧЕНИЕ

*Нет ничего более практичного,
чем хорошая теория.*

Л. Больцман

Кручением называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только один внутренний силовой фактор – *крутящий момент*, обозначаемый M_K или M_z . Стержни, работающие на кручение, называются *валами*. Общая теория кручения принадлежит математической теории упругости и не может быть построена элементарным путем. Поэтому мы ограничимся здесь результатами, относящимися к стержням круглого сечения и тонкостенным стержням. Данные о кручении стержней иного профиля приводятся без доказательств.

5.1. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Напряжения в поперечных сечениях и перемещения. В основу теории кручения круглого стержня положим следующие предположения:

1. *В поперечных сечениях стержня не возникает иных напряжений, кроме касательных.*

2. *Поперечные сечения поворачиваются без искривления радиусов, оставаясь плоскими.*

Двумя плоскостями Π_1 и Π_2 , перпендикулярными к оси стержня и отстоящими друг от друга на расстоянии dz , а также двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями радиусами ρ и $\rho + d\rho$ выделим из стержня трубку (рис. 5.1, б). Вследствие закручивания пра-

вое сечение повернется относительно левого на угол $d\varphi$, а бесконечно малый элемент $mnpq$ претерпит сдвиг, причем $\gamma = nn' / mn$.

$$\text{Но} \quad mn = dz, \quad nn' = (\rho + d\rho)d\varphi \approx \rho d\varphi,$$

$$\text{поэтому} \quad \gamma = \rho d\varphi / dz = \rho\theta, \quad (a)$$

где $\theta = d\varphi / dz$ – относительный угол закручивания.

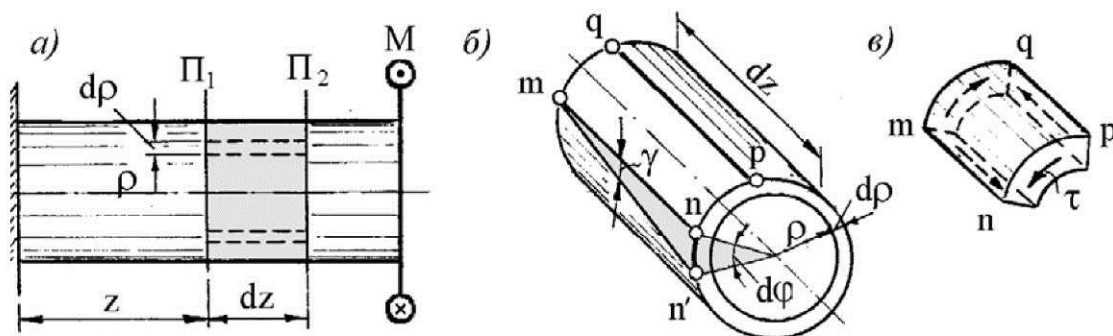


Рис. 5.1

Согласно 1-й гипотезе элемент $mnpq$ (рис. 5.1, в) испытывает чистый сдвиг, следовательно, $\tau = G\gamma$ или с учетом (a)

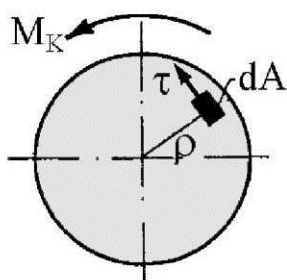


Рис. 5.2

$$\tau = G\theta\rho. \quad (б)$$

По определению крутящего момента

$$M_k = \int_A \tau dA \rho,$$

или с учетом (б)

$$M_k = G\theta \int_A \rho^2 dA = G\theta I_p, \quad (в)$$

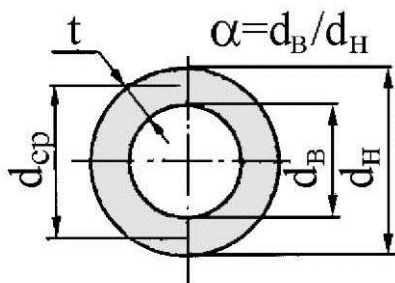


Рис. 5.3

где $I_p = \int_A \rho^2 dA$ – полярный момент инерции. Для вычисления I_p заметим, что в полярных координатах $dA = 2\pi\rho d\rho$. Тогда

для стержня круглого трубчатого сечения получим (рис. 5.3)

$$I_p = \int_{0,5d_B}^{0,5d_H} 2\pi\rho^3 d\rho = (\pi d_H^4 / 32)(1 - \alpha^4).$$

В случае тонкостенной трубки ($\alpha \geq 0,9$) можно пользоваться приближенной формулой

$$I_p \cong 0,25\pi d_{cp}^3 t.$$

Для сплошного круглого сечения ($d_B = 0, d_H = d$)

$$I_p = \pi d^4 / 32 \cong 0,1d^4.$$

Из выражения (в) вытекает, что

$$\theta = M_K / (GI_p). \quad (5.1)$$

Произведение GI_p называют *жесткостью поперечного сечения* стержня при кручении.

Через относительный угол закручивания θ легко определяется и величина взаимного угла поворота сечений φ .

Имеем
$$d\varphi / dz = M_K / GI_p,$$

откуда
$$\varphi = \int_0^l M_K dz / (GI_p), \quad (5.2)$$

где l – расстояние между сечениями, для которых определяется взаимный угол поворота φ . Если крутящий момент по длине стержня не изменяется ($M_K = M$) и если жесткость остается постоянной, то

$$\boxed{\varphi = Ml / (GI_p)}. \quad (5.3)$$

Вернемся теперь к выражению (б). Исключая из него θ , получим

$$\boxed{\tau = (M_K / I_p) \rho}. \quad (5.4)$$

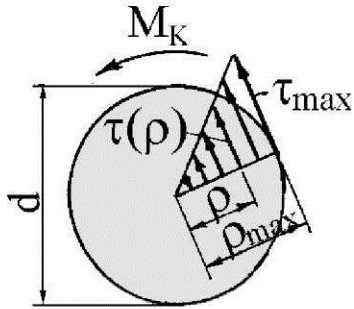


Рис. 5.4

Таким образом, касательные напряжения в поперечном сечении распределены вдоль радиуса по линейному закону и имеют наибольшие значения в точках, наиболее удаленных от оси (рис. 5.4). При этом $\tau_{\max} = (M_k / I_p) \rho_{\max}$. Величина

$I_p / \rho_{\max} = W_p$ называется *полярным моментом сопротивления* и измеряется в см^3 . Окончательно имеем

$$\tau_{\max} = M_k / W_p. \quad (5.5)$$

Для круглого сечения ($\rho_{\max} = 0,5d$)

$$W_p = (\pi d^3 / 32) / (0,5d) = \pi d^3 / 16 \cong 0,2d^3.$$

Для кольцевого сечения ($\rho_{\max} = 0,5d_H$)

$$W_p = (\pi d_H^3 / 16)(1 - \alpha^4) \cong 0,2d_H^3(1 - \alpha^4).$$

Анализ напряженного состояния и разрушения. Как было отмечено выше, при кручении круглого стержня в поперечных сечениях возникают касательные напряжения, направленные в каждой точке перпендикулярно текущему радиусу (рис. 5.5, а). Под действием этих напряжений происходит разрушение стальных образцов. Последние буквально срезаются по поперечному сечению (рис. 5.5, б). Аналогично разрушаются стержни из других пластичных металлов (сплавы алюминия, меди и т.п.).

Наличие касательных напряжений в поперечных сечениях обуславливает (согласно закону парности) существование точно таких же напряжений и в продольных сечениях (рис. 5.5, а), которые обнаруживаются, например, при испытании на кручение деревянных образцов. Дерево, как известно, обладает ярко выраженной анизотропией упругих и прочностных свойств. Древесина, имеет сравнительно

низкую прочность на скалывание вдоль волокон. Поэтому разрушение деревянного образца при кручении начинается с образования продольных трещин (рис. 5.5, в).

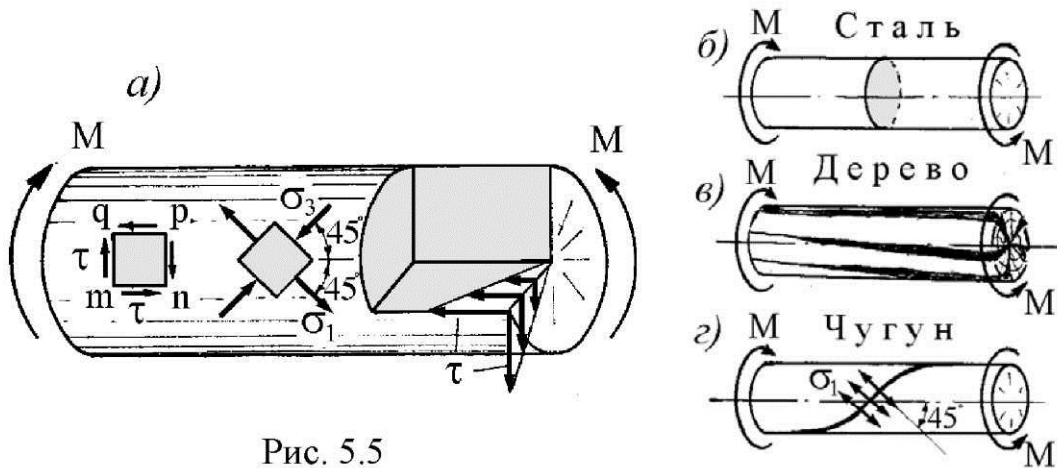


Рис. 5.5

Элемент *mnpq* испытывает чистый сдвиг (рис. 5.5, а), поэтому на площадках, наклоненных под углом 45° к оси стержня, возникают только нормальные напряжения, равные по величине τ . При этом одно из них σ_1 является растягивающим, а второе σ_3 – сжимающим. Если материал плохо сопротивляется растягивающим напряжениям, как, например, чугун, то разрушение произойдет по сложной винтовой поверхности, соответствующей максимальным растягивающим напряжениям. След этой поверхности на поверхности цилиндра представляет собой винтовую линию, наклоненную к оси стержня под углом 45° .

Потенциальная энергия упругой деформации. Рассмотрим участок закрученного стержня длиной dz (рис. 5.6). Энергия, накопленная в этом элементе, равна работе моментов M_k , приложенных по торцам:

$$dU = M_k d\varphi / 2,$$

где $d\varphi$ – взаимный угол поворота сечений.

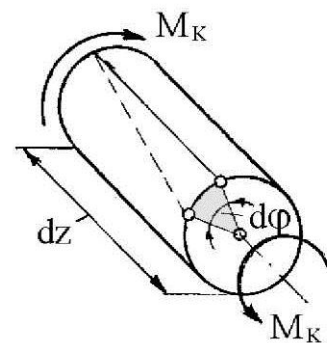


Рис. 5.6

Множитель $\frac{1}{2}$ является следствием линейной зависимости между M_k и $d\varphi$. После подстановки $d\varphi$ получим

$$dU = M_k^2 dz / (2GI_p). \quad (5.6)$$

Потенциальная энергия во всем стержне определяется интегрированием (5.6) по всей длине:

$$U = \int_0^l M_k^2 dz / (2GI_p). \quad (5.7)$$

Если момент M_k по длине не меняется ($M_k = M$) и жесткость постоянна, то

$$U = M^2 l / (2GI_p).$$

Расчет валов. Он сводится к одновременному удовлетворению двух условий:

- *прочности* $\tau_{\max} \leq [\tau],$

$$M_{k \max} / W_p \leq [\tau], \quad \text{откуда} \quad d_{\text{пч}} \geq \sqrt[3]{16M_{k \max} / (\pi[\tau])}; \quad (5.8)$$

- *жесткости* $\theta_{\max} \leq [\theta],$

$$M_{k \max} / (GI_p) \leq [\theta], \quad \text{откуда} \quad d_{\text{ж}} \geq \sqrt[4]{32M_{k \max} / (\pi G[\theta])}. \quad (5.9)$$

Окончательно принимается большее из найденных значений $d = \max\{d_{\text{пч}}, d_{\text{ж}}\}$, которое затем округляется до ближайшего стандартного диаметра.

Допускаемые величины:

- *касательное напряжение* $[\tau] = (0,5 \div 0,6) [\sigma],$

- *относительный угол закручивания* для валов средних размеров в “Справочнике машиностроителя” рекомендуется принимать равным $[\theta] \cong 8$ мрад/м ($0,5^\circ$ на 1 м длины).

5.2. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

В инженерной практике довольно часто кручению подвергаются стержни, имеющие не круглое, а прямоугольное, треугольное, эллиптическое и другие сечения. В этих случаях гипотеза плоских сечений неприменима, так как сечения искривляются (депланируют). Точное решение можно получить только методами теории упругости. Однако, поскольку в настоящем курсе исключается возможность их изложения, приведем здесь только некоторые окончательные результаты.

Весьма интересна и поучительна история создания методов расчета на кручение стержней произвольного сечения.

Расчет на кручение круглых стержней впервые был дан Кулоном в 1784 г. В начале XIX века французский ученый Навье, составляя первый систематический курс сопротивления материалов, допустил серьезную ошибку: он предложил рассчитывать стержни любого сечения по формулам, полученным Кулоном. Авторитет имени Навье обеспечил этому ошибочному предложению всеобщее признание на долгие годы. Лишь в 1855 г. Сен-Венан исправил ошибку и создал правильную теорию расчета стержней произвольного сечения. Им были получены точные решения для ряда практически важных сечений (прямоугольник, эллипс и др.).

Величины, которые нас практически интересуют, – это угол закручивания (погонный и полный) в зависимости от крутящего момента и наибольшее касательное напряжение. Для всех случаев, как рассмотренных нами элементарно, так и изученных методами теории упругости, результаты можно представить в следующей форме:

$$\theta = M_K / (GI_K), \quad \varphi = M_K l / (GI_K), \quad \tau_{\max} = M_K / W_K.$$

Здесь I_K и W_K – некоторые геометрические характеристики, которые условно называют *моментом инерции* и *моментом сопротивления при кручении*. Они имеют размерность см^4 и см^3 соответственно.

Сплошное прямоугольное сечение (рис. 5.7, б).

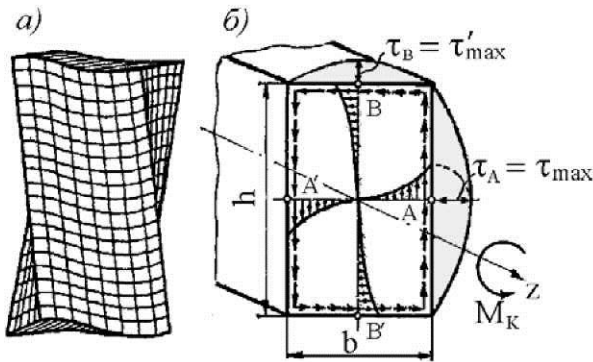


Рис. 5.7

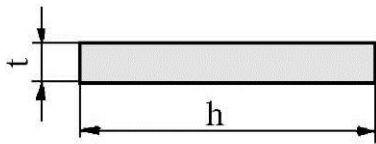
Момент инерции и момент сопротивления

$$\begin{cases} I_K = \alpha hb^3, \\ W_K = \beta hb^2, \end{cases} \quad (5.10)$$

где h – длинная сторона, b – короткая сторона прямоугольника.

Наибольшие напряжения возникают в серединах длинных сторон (точки A и A'), т.е. $\tau_{\max} = \tau_A$. В углах напряжения равны нулю, в серединах коротких сторон (точки B и B') отмечается второй максимум напряжений $\tau'_{\max} = \tau_B = \gamma \tau_{\max}$.

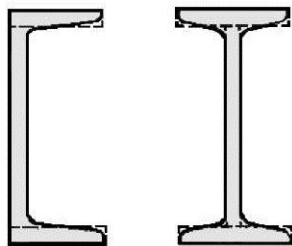
Безразмерные коэффициенты α , β и γ зависят только от отношения h/b и приводятся в специальных таблицах.



Для узких прямоугольных сечений с отношением $h/b \geq 10$ можно принять $\alpha = \beta \approx 1/3$. Тогда

$$I_K = ht^3 / 3, \quad W_K = ht^2 / 3. \quad (5.11)$$

Тонкостенный открытый профиль (рис. 5.8). Разбивая профиль на отдельные узкие прямоугольники, момент инерции всего сечения можно приближенно подсчитать как сумму выражений (5.11) с введением поправочного коэффициента k :



$$I_K = k \sum_{i=1}^n h_i t_i^3 / 3. \quad (5.12)$$

Рис. 5.8 Коэффициент k зависит от формы профиля и принимается равным: для уголков – 1,10; швеллеров – 1,12; тавров – 1,15; двутавров – 1,20.

Так как угол закручивания для всего сечения и его отдельных частей одинаков, т.е.

$$\varphi = M_K l / (GI_K) = M_{ki} l / (GI_{ki}),$$

то крутящий момент распределяется между отдельными частями сечения пропорционально их жесткостям:

$$M_{ki} = (M_K / I_K) I_{ki}.$$

Соответственно в каждой i -й части сечения наибольшее касательное напряжение будет

$$\tau_{ki} = M_{ki} / W_{ki} = (M_K / I_K) (I_{ki} / W_{ki})$$

или, учитывая, что $\alpha_i = \beta_i$ уже при $h/b > 3$,

$$\tau_{ki} = (M_K / I_K) t_i. \quad (5.13)$$

Отсюда следует, что наибольшее касательное напряжение будет у того элемента, который имеет наибольшую толщину t

$$\tau_{\max} = (M_K / I_K) t_{\max}.$$

Тонкостенный замкнутый профиль (рис. 5.9).

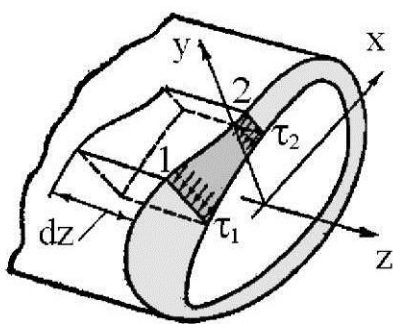


Рис. 5.9

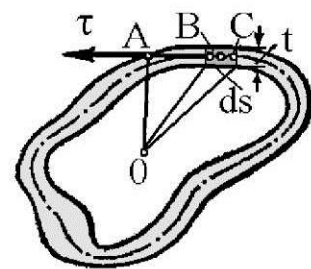
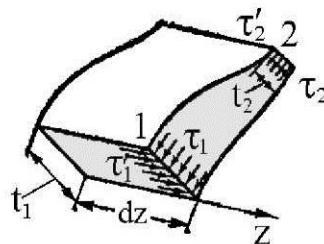


Рис. 5.10

Здесь, в отличие от открытого профиля, напряжения распределены по толщине равномерно. Выделим из стержня элементарную призму длиной dz . Размер призмы в направлении дуги контура, т.е. расстояние между точками 1 и 2, является произвольным. Пусть тол-

щина контура в точке 1 будет t_1 , а в точке 2 – t_2 . Соответственно через τ_1 и τ_2 обозначим напряжения в поперечном сечении. В продольных сечениях возникают парные напряжения $\tau'_1 = \tau_1$ и $\tau'_2 = \tau_2$.

Составим для выделенного элемента уравнение равновесия, спроектировав все силы на направление оси стержня. Очевидно,

$$\tau_1 t_1 dz = \tau_2 t_2 dz .$$

Так как точки 1 и 2 взяты произвольно, то $\tau t = \text{const}$. Таким образом, произведение τt по длине замкнутого контура не изменяется. На участках, имеющих меньшую толщину, напряжения будут большими.

Выразим крутящий момент через напряжения τ , вычислив его как сумму моментов элементарных сил $\tau t ds$ (рис. 5.10) относительно произвольно взятой точки O

$$M_{\text{к}} = \int_s \tau t |OA| ds .$$

Но произведение τt по длине дуги контура не изменяется, поэтому

$$M_{\text{к}} = \tau t \int_s |OA| ds .$$

Произведение $|OA| ds$ представляет собой удвоенную площадь треугольника OBC , а интеграл от этого произведения по длине замкнутого контура дает удвоенную площадь, ограниченную средней линией контура. Обозначим ее через ω , тогда

$$M_{\text{к}} = \tau t 2\omega .$$

Наибольшее напряжение

$$\tau_{\text{max}} = M_{\text{к}} / (2\omega t_{\text{min}}) . \quad (5.14)$$

Для определения углового перемещения φ воспользуемся законом сохранения энергии, согласно которому $U = W$.

Энергия, накопленная в элементарном объеме с размерами ds , dz , t , равна

$$dU = (\tau^2 / 2G) t dz ds .$$

Полную энергию деформации однородного стержня получим, проинтегрировав это выражение по длине стержня l и по дуге замкнутого контура

$$U = (l/2G) \int_s \tau^2 t ds = (l\tau^2 t^2 / 2G) \int_s ds / t.$$

Учитывая, что

$$\tau t = M_k / (2\omega),$$

получим

$$U = (M_k^2 l / 8G\omega^2) \int_s ds / t.$$

Работа, совершаемая моментом M_k на угловом перемещении φ равна

$$W = M_k \varphi / 2.$$

Приравнивая U и W , находим

$$\varphi = (M_k l / 4G\omega^2) \int_s ds / t.$$

Если толщина t по дуге контура не меняется, то

$$\varphi = M_k l s / (4G\omega^2 t), \quad (5.15)$$

где s – длина замкнутого контура.

5.3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СЕЧЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Учитывая, что прочность вала пропорциональна моменту сопротивления W_k , его жесткость – моменту инерции I_k , а расход материала – площади его поперечного сечения A , для количественной оценки экономичности профиля удобно ввести безразмерные величины

$$w_k = W_k / A^{3/2} \quad \text{и} \quad j_k = I_k / A^2,$$

называемые соответственно *удельным моментом сопротивления* и *удельным моментом инерции при кручении*.

Таблица 5.1

Тип сечения	w_k	j_k
Швеллер	0,04-0,05	0,010-0,011
Двутавр	0,05-0,07	0,009-0,015
Прямоугольник, $h/b=10$	0,1	0,031
То же, $h/b=2$	0,18	0,115
Квадрат	0,21	0,14
Круг	0,28	0,16
Кольцо ($\alpha=0,5$)	0,37	0,264
То же ($\alpha=0,9$)	1,16	1,22

В табл. 5.1 приведены значения w_k и j_k для некоторых сечений. Как видим, наименее выгодными при кручении являются швеллеры, двутавры, узкие прямоугольные сечения и наиболее выгодными – круглые кольцевые, особенно при малой толщине стенок.

5.4. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВИНТОВЫХ ПРУЖИН С МАЛЫМ ШАГОМ

Винтовые пружины широко применяются в современной технике. Обычно их изготавливают из стали круглого поперечного сечения, и они подвергаются действию растягивающих или сжимающих сил.

Точный расчет на прочность винтовых пружин достаточно сложен, так как они испытывают одновременно деформации растяжения (сжатия), кручения, сдвига и изгиба. Однако при малых углах наклона витков (меньше 15°) влиянием изгибающего момента и продольной силы можно пренебречь.

Пусть пружина со средним диаметром $D = 2R$, имеющая n витков и диаметр проволоки d , подвергается растяжению центрально приложенной силой F (рис. 5.11, а). Рассечем виток пружины плоскостью, проходящей через ось пружины. Удалим одну часть пружины и рассмотрим равновесие оставшейся (рис. 5.11, б). Чтобы уравновесить

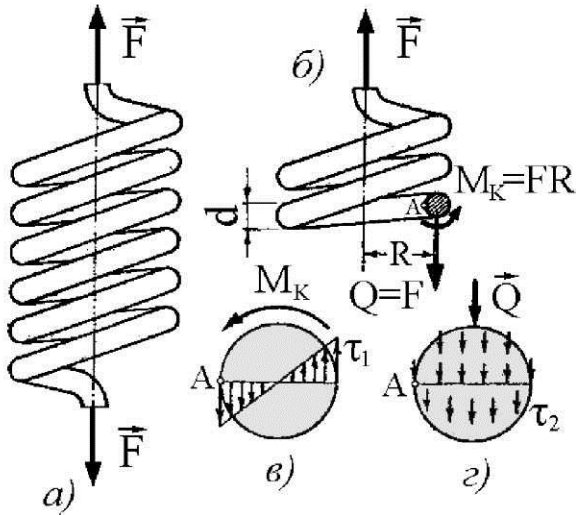


Рис. 5.11

осевую силу F , необходимо приложить в сечении поперечную силу $Q = F$ и крутящий момент $M_k = FR$.

Касательные напряжения кручения (рис. 5.11, б) распределяются по линейному закону и в крайних точках достигают максимального значения, равного

$$\tau_1 = M_k / W_p = 16FR / (\pi d^3).$$

С поперечной силой Q связаны напряжения среза τ_2 (рис. 5.11, з), равномерно распределенные по сечению и равные

$$\tau_2 = Q / A = 4F / (\pi d^2).$$

Наибольшие напряжения возникают на внутренней поверхности витка (точка A , где напряжения τ_1 и τ_2 совпадают по направлению) и определяются по формуле:

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = 16FR / (\pi d^3) + 4F / (\pi d^2),$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{16FR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R} \right). \quad (5.16)$$

При расчете пружин, у которых $R \gg d$, вторым слагаемым, стоящим в скобках, обычно пренебрегают. В этом случае формула (5.16) упрощается и принимает вид

$$\tau_{\max} = 16FR / (\pi d^3), \quad (5.17)$$

т.е. расчет ведется только на кручение.

Условие прочности в этом случае имеет вид

$$\tau_{\max} = 16FR / (\pi d^3) \leq [\tau]. \quad (5.18)$$

Допускаемое напряжение $[\tau]$ для сталей, идущих на изготовление пружин, берется от 300 до 700 МПа.

Пружины рассчитывают не только на прочность, но и на жесткость. С этой целью определяют удлинение или сжатие (осадку) пружины, принимая во внимание только кручение.

Пусть имеется пружина, верхний конец которой закреплен, а к нижнему приложена растягивающая сила F , вызывающая опускание точки приложения силы на величину δ . Работа, совершенная силой, будет равна $W = F\delta/2$. При этом в пружине накапливается потенциальная энергия $U = M_k^2 l / (2GI_p)$.

Согласно закону сохранения энергии

$$W = U \quad \text{или} \quad F\delta/2 = M_k^2 l / (2GI_p).$$

Отсюда, подставляя $M_k = FR$, $l = 2\pi Rn$, $I_p = \pi d^4/32$, находим осадку пружины

$$\delta = \frac{64FR^3 n}{Gd^4} = \frac{8FD^3 n}{Gd^4}. \quad (5.19)$$

Более точный расчет, учитывающий все виды деформаций, испытываемых витками пружины, ведется по формулам:

$$\tau_{\max} = k_1 \frac{8FD}{\pi d^3}, \quad \delta = k_2 \frac{8FD^3 n}{Gd^4}. \quad (5.20)$$

Здесь k_1 и k_2 – поправочные коэффициенты, зависящие от отношения D/d . Они приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Коэф- фициент	D/d					
	3	4	5	6	8	10
k_1	1,58	1,40	1,31	1,25	1,18	1,14
k_2	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какой вид нагружения называется кручением?
2. На каких гипотезах базируется теория кручения круглых валов?
3. По какому закону распределяются касательные напряжения в поперечных сечениях круглого вала?
4. В каких точках поперечного сечения круглого вала возникают наибольшие касательные напряжения и как они определяются?
5. Как записывается условие прочности круглого вала и какие задачи оно позволяет решать?
6. Какая выгода достигается при использовании полых валов?
7. Как формулируется условие жесткости круглого вала?
8. Как определяется диаметр вала?
9. Как должен изменяться диаметр вала, если передаваемая им мощность остается без изменения, а угловая скорость вращения увеличивается?
10. Чему равна потенциальная энергия упругой деформации круглого вала?
11. Какое напряженное состояние возникает при кручении круглого вала? По каким площадкам действуют максимальные касательные напряжения и по каким – максимальные нормальные?
12. Почему разрушение круглого деревянного стержня при кручении происходит по продольным площадкам, а стального – по площадкам, совпадающим с поперечным сечением?
13. Почему поверхность излома чугунного вала наклонена к оси под углом 45° ?

14. Как определяются наибольшее касательное напряжение и угол закручивания для валов некруглого сечения?

15. В каких точках прямоугольного вала возникают наибольшие касательные напряжения?

16. Как распределяются касательные напряжения по толщине узкого прямоугольного сечения?

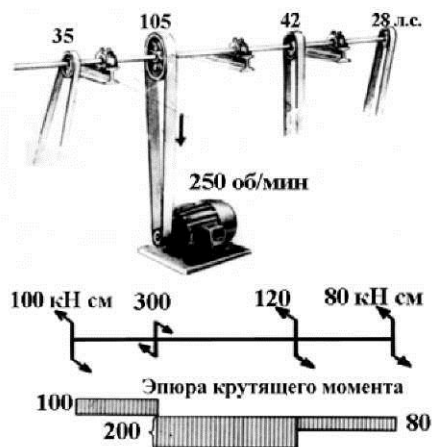
17. Где возникают наибольшие касательные напряжения при кручении стержня тонкостенного открытого профиля и как они определяются?

18. Какая форма поперечного сечения стержней является наиболее рациональной при кручении?

19. Какие напряжения возникают в витках цилиндрической винтовой пружины при ее растяжении и сжатии?

20. Из каких соображений и по какой формуле определяется осадка цилиндрической винтовой пружины?

1. РАСЧЕТ ВАЛА НА ПРОЧНОСТЬ



Максимальный крутящий момент

$$M_{K \max} = 200 \text{ кН}\cdot\text{см.}$$

Допускаемое напряжение

$$[\tau] = 40 \text{ МПа.}$$

Диаметр вала

$$d_{\text{пр}} = \sqrt[3]{\frac{16M_{K \max}}{\pi[\tau]}} = 50 \text{ мм.}$$

2. РАСЧЕТ ВАЛА НА ЖЕСТКОСТЬ

Крутящий момент

$$M_K = 60 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Модуль сдвига

$$G = 80 \text{ ГПа.}$$

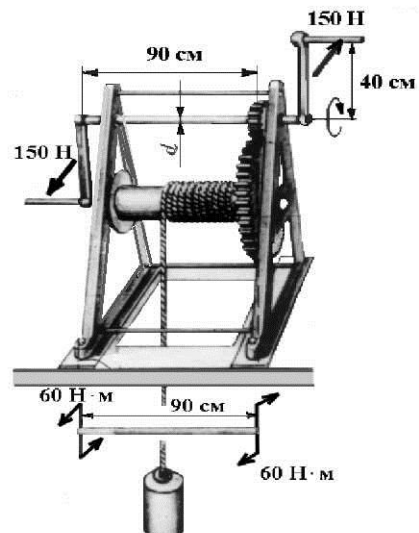
Допускаемый относительный

угол закручивания

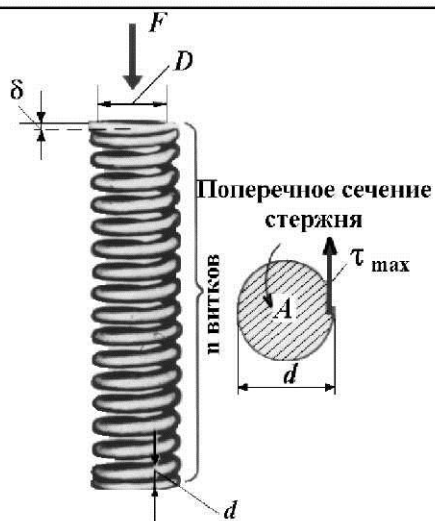
$$[\theta] = 6 \text{ мрад/м.}$$

Диаметр вала

$$d_{\text{ж}} = \sqrt[4]{\frac{32M_K}{\pi G[\theta]}} = 34 \text{ мм.}$$



3. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВИНТОВЫХ ПРУЖИН



Максимальное касательное напряжение в поперечном сечении стержня

$$\tau_{\max} = \frac{F}{A} \left(1 + 2\frac{D}{d}\right).$$

Осадка пружины

$$\delta = 8 \frac{FD^3 n}{Gd^4}.$$

6. ПЛОСКИЙ ПРЯМОЙ ИЗГИБ

Прочность подобных тел не сохраняет того же отношения, которое существует между величиной тел.

Галилей

6.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают *изгибающие моменты*. Различают две разновидности изгиба: а) чистый изгиб, когда изгибающий момент M_x является единственным силовым фактором ($M_x \neq 0, Q_y = 0$); б) поперечный изгиб, когда, наряду с изгибающим моментом, возникает и поперечная сила ($M_x \neq 0, Q_y \neq 0$). Стержни, подвергающиеся изгибу, обычно называются *балками*.

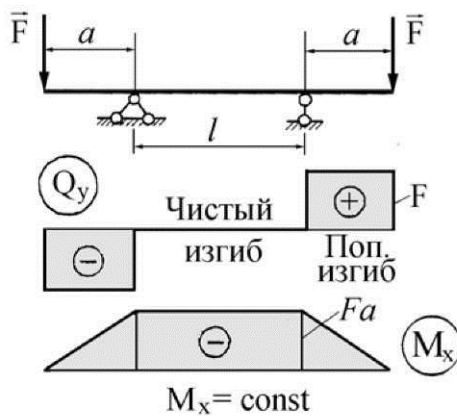


Рис. 6.1

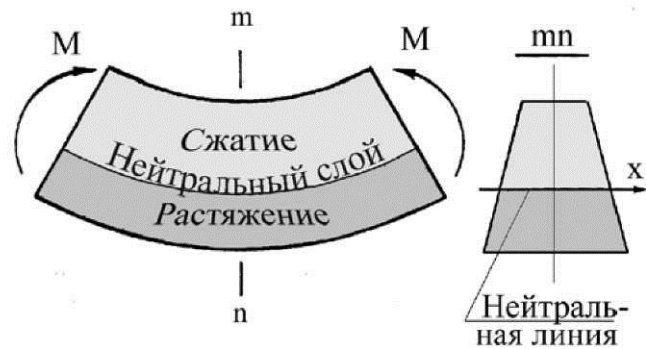


Рис. 6.2

В последующем предполагаем, что балка обладает хотя бы одной плоскостью симметрии и нагрузки действуют в этой плоскости.

При этих условиях балка испытывает плоский прямой изгиб, т.е. изгиб происходит в плоскости нагрузки.

Достаточно очевидно и подтверждается опытом, что балка при изгибе деформируется таким образом, что волокна, расположенные в выпуклой части, растягиваются, а в вогнутой – сжимаются. Между ними лежит слой волокон, который искривляется, не изменяя своей первоначальной длины. Этот слой называется *нейтральным*, а его след на плоскости поперечного сечения – *нейтральной линией* или *нейтральной осью*.

6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ

6.2.1. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. Нормальные напряжения определяются без учета влияния поперечной силы, исходя из двух гипотез: плоских сечений и об отсутствии взаимного надавливания продольных волокон балки.

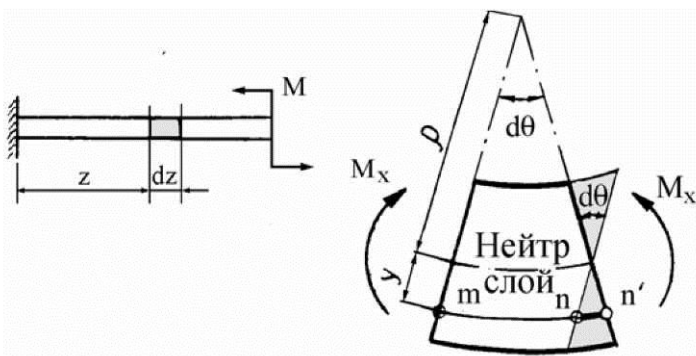


Рис. 6.3

Выделим из балки (рис. 6.3) бесконечно малый элемент dz . В результате деформации изгиба его боковые сечения взаимно поворачиваются на угол $d\theta$ и произвольное волокно mn , расположенное на

расстоянии y от нейтрального слоя, получает приращение $mn' = yd\theta$.

$$\text{Относительное удлинение} \quad \varepsilon = mn' / mn = yd\theta / \rho d\theta = y / \rho, \quad (6.1)$$

где ρ – радиус кривизны нейтрального слоя.

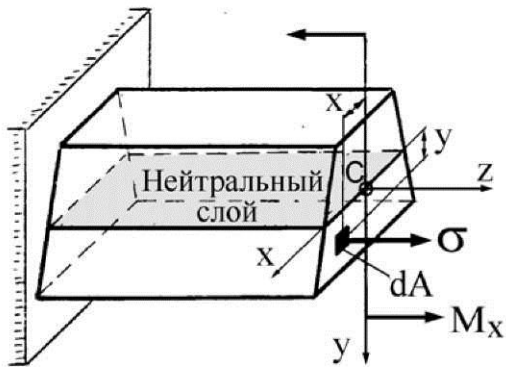


Рис. 6.4

По закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon = Ey/\rho. \quad (6.2)$$

При изгибе в плоскости yz

$$N = 0, \quad M_y = 0, \quad M_x \neq 0.$$

Первое условие дает

$$N = \int_A \sigma dA = (E/\rho) \int_A y dA = (E/\rho) S_x = 0,$$

откуда $S_x = 0$, т.е. нейтральная линия проходит через центр тяжести поперечного сечения (точка C).

Из второго условия

$$M_y = \int_A \sigma y dA = (E/\rho) \int_A xy dA = (E/\rho) I_{xy} = 0$$

следует, что $I_{xy} = 0$ и, следовательно, оси xu являются главными центральными осями поперечного сечения.

Из третьего

$$M_x = \int_A \sigma y dA = (E/\rho) \int_A y^2 dA = EI_x / \rho$$

получаем зависимость кривизны оси балки от изгибающего момента

$$1/\rho = M_x / (EI_x). \quad (6.3)$$

Подставляя (6.3) в формулу (6.1), находим

$$\sigma = (M_x / I_x) y. \quad (6.4)$$

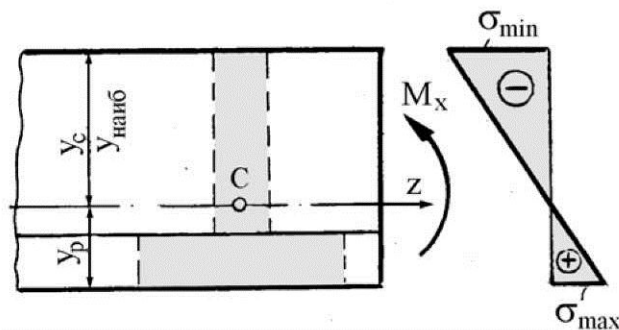


Рис. 6.5

Как видим, напряжения распределяются по линейному закону. Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= (M_x / I_x) y_p = M_x / W_p, \\ \sigma_{\min} &= (M_x / I_x) y_c = M_x / W_c, \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

где $W_p = I_x / y_p$ и $W_c = I_x / y_c$ – моменты сопротивления поперечного сечения для растянутых и сжатых волокон.

Для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие (пластичные материалы), опасной является наиболее удаленная от нейтральной оси точка, где возникает наибольшее по абсолютной величине напряжение

$$\sigma_{\max} = (M_x / I_x) y_{\text{наиб}} = M_x / W_x,$$

где $W_x = I_x / y_{\text{наиб}}$ – осевой момент сопротивления.

Условия прочности:

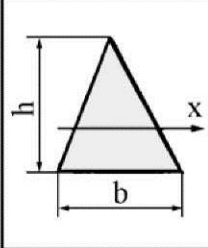
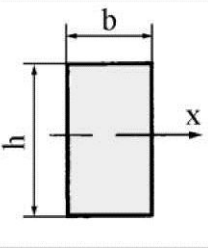
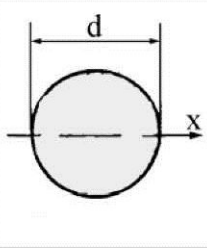
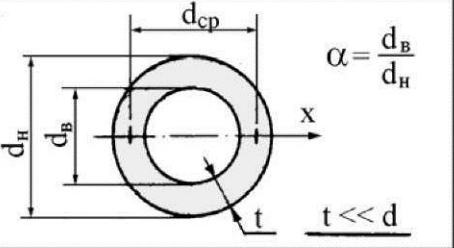
- для хрупких материалов

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= M_{\max} / W_p \leq [\sigma_p], \\ \sigma_{\min} &= M_{\max} / W_c \leq [\sigma_c]; \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

- для пластичных материалов

$$\boxed{\sigma_{\max} = M_{\max} / W_x \leq [\sigma]}. \quad (6.7)$$

Таблица 6.1

				$\alpha = \frac{d_в}{d_н}$ $t \ll d$
$I_x = \frac{bh^3}{36}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$	$I_x = \frac{\pi d^4}{64}$	$I_x = \frac{\pi d_н^4}{64} (1 - \alpha^4)$	$I_x = \frac{\pi d_ср^3 t}{8}$
$W_x = \frac{bh^2}{24}$	$W_x = \frac{bh^2}{6}$	$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$	$W_x = \frac{\pi d_н^3}{32} (1 - \alpha^4)$	$W_x = \frac{\pi d_ср^2 t}{4}$

6.2.2. Касательные напряжения. Элементарная теория касательных напряжений, разработанная Д. И. Журавским, основывается на двух допущениях.

1. Касательные напряжения направлены параллельно поперечной силе Q_y .

2. Касательные напряжения распределены равномерно по ширине сечения.

Сделанных допущений достаточно, чтобы найти закон распределения касательных напряжений по высоте сечения. Проще всего вычислить эти напряжения через парные им касательные напряжения, возникающие в продольных сечениях.

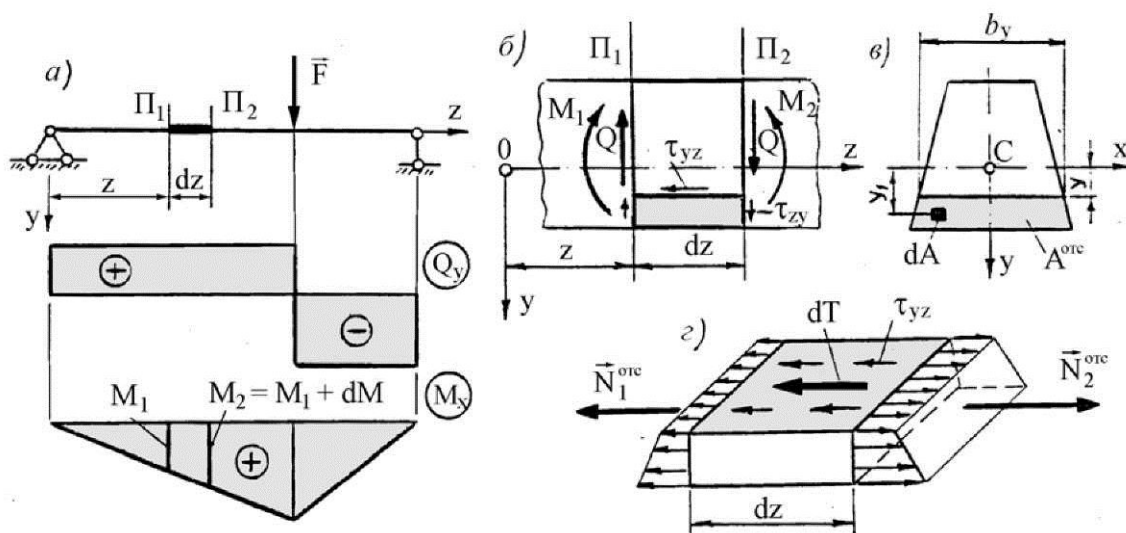


Рис. 6.6

Выделим из балки бесконечно малый элемент (рис. 6.6, z) и рассмотрим его равновесие в проекции на ось z :

$$\sum Z_i = 0, N_2^{\text{отс}} - N_1^{\text{отс}} = dT. \quad (a)$$

Вычисляя

$$N_1^{\text{отс}} = \int_{A^{\text{отс}}} \sigma_{z1} dA = (M_1 / I_x) \int_{A^{\text{отс}}} y_1 dA = (M_1 / I_x) S_x^{\text{отс}}, \quad S_x^{\text{отс}} = \int_{A^{\text{отс}}} y_1 dA,$$

$$N_2^{\text{отс}} = \int_{A^{\text{отс}}} \sigma_{z2} dA = (M_2 / I_x) S_x^{\text{отс}} = (M_1 + dM) S_x^{\text{отс}} / I_x, \quad dT = \tau_{yz} b_y dz$$

и подставляя в (а), получим
$$\tau_{yz} = \frac{dM}{dz} \frac{S_x^{\text{отс}}}{b_y I_x}$$

или с учетом дифференциальной зависимости $dM / dz = Q$

$$\tau = QS_x^{\text{отс}} / (b_y I_x). \quad (6.8)$$

Рассмотрим конкретные сечения.

Прямоугольник (рис. 6.7, а). Имеем: $b_y = b$,

$$I_x = bh^3 / 12, \quad S_x^{\text{отс}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Следовательно,

$$\tau_{zy} = \frac{QS_x^{\text{отс}}}{b_y I_x} = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad \text{и} \quad \tau_{\text{max}/y=0} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A}.$$

Как видим, касательные напряжения изменяются по высоте сечения по закону квадратной параболы.

Для балки *круглого сечения* (рис. 6.7, б) аналогично можно найти

$$\tau_{zy} = \frac{4Q}{3\pi r^4} (r^2 - y^2) \quad \text{и} \quad \tau_{\text{max}} = \frac{4Q}{3\pi r^2} = \frac{4Q}{3A}$$

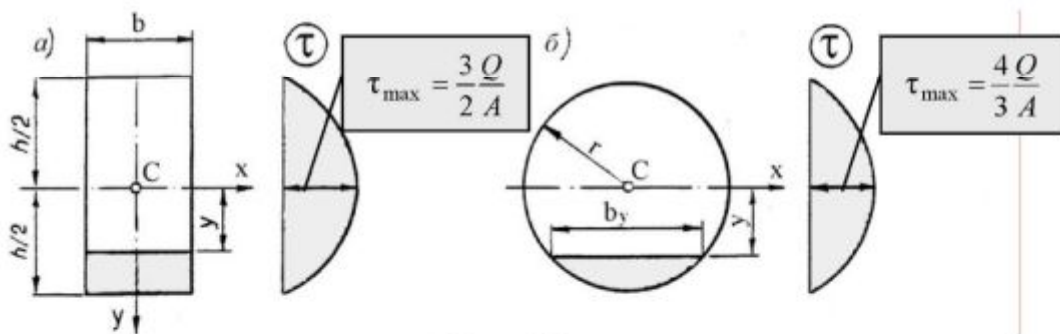


Рис. 6.7

Условие прочности по касательным напряжениям имеет вид

$$\tau_{\text{max}} = kQ / A \leq [\tau], \quad (6.9)$$

где k – коэффициент, зависящий от формы сечения, равный, в частности, для прямоугольника – $3/2$, для круга – $4/3$.

6.2.3. Главные напряжения. В произвольной точке поперечного сечения балки, находящейся на расстоянии y от нейтральной оси, нормальные и касательные напряжения определяются по формулам.

$$\sigma_z = (M_x / I_x) y, \quad \tau_{zy} = Q_y S_x^{\text{отс}} / (b I_x).$$

Нормальные напряжения максимальны во внешних волокнах балки и равны нулю на нейтральной оси. Касательные напряжения равны нулю во внешних волокнах и обычно достигают максимума на нейтральной оси. При поперечном изгибе в плоскости yz $\sigma_x = \sigma_y = 0$, поэтому напряженное состояние является плоским и главные напряжения определяются по формулам

$$\sigma_{\max/\min} = \sigma_{1,3} = 0,5(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}), \quad \text{tg}\alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma) / \tau. \quad (6.10)$$

Рассмотрим балку прямоугольного сечения и определим главные напряжения в нескольких характерных точках произвольного сечения mn (рис. 6.8).

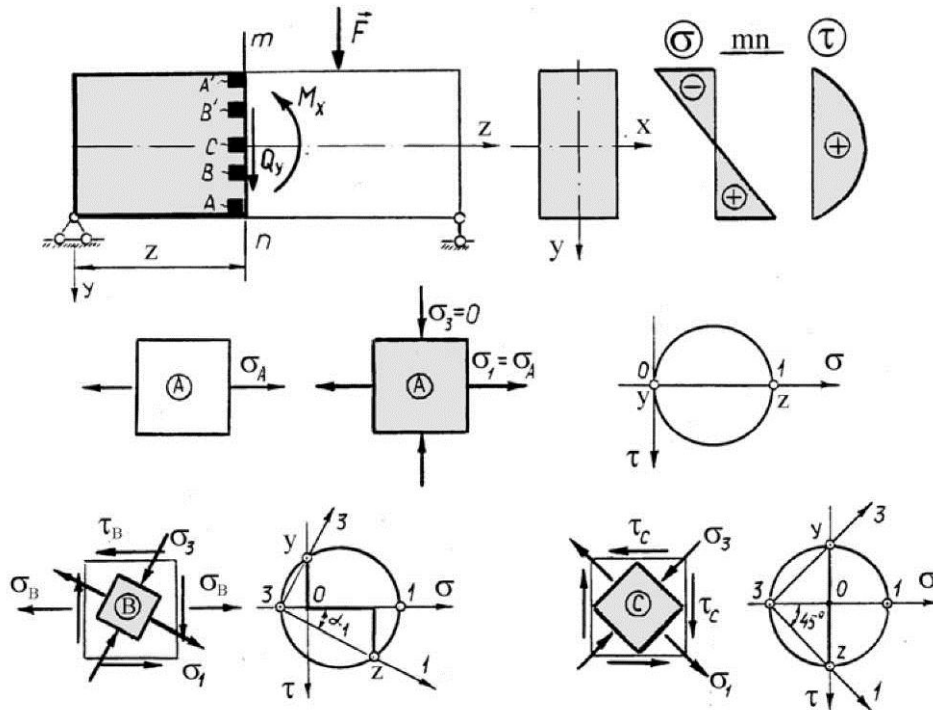


Рис. 6.8

Как следует из рис. 6.8, в крайних точках (A и A') имеет место линейное напряженное состояние, в точке C – чистый сдвиг, а в точке B – общий случай плоского напряженного состояния. Таким образом, при поперечном изгибе возникает неоднородное плоское напряженное состояние.

В ряде случаев бывает важно знать не только величины главных напряжений, но также их направления во всех точках балки. В частности, это необходимо при конструировании железобетонных балок.

На рис. 6.9, a показаны примерные кривые направлений главных напряжений в балке, называемые *траекториями главных напряжений* (траектории сжимающих напряжений проведены пунктиром, а растягивающих – сплошными линиями).

В железобетонных балках арматура должна быть расположена в направлении наибольших растягивающих напряжений (рис. 6.9, b). Отсюда становится понятным назначение отгибов в железобетонных балках – воспринять главные растягивающие напряжения.

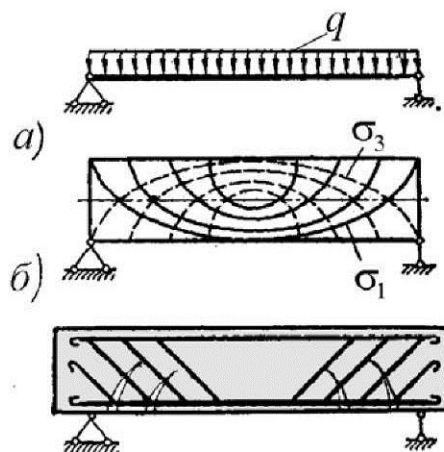


Рис. 6.9

6.2.4. Расчет балок на прочность. Полный расчет балок на прочность сводится к одновременному выполнению трех условий:

- 1) по нормальным напряжениям $\sigma_{\max} \leq [\sigma],$
- 2) по касательным напряжениям $\tau_{\max} \leq [\tau],$
- 3) по главным напряжениям $\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma].$

Расчет на прочность по нормальным напряжениям является основным и в подавляющем большинстве случаев покрывает два других. Он выполняется для наиболее удаленных от нейтральной оси точек того сечения, где возникает наибольший изгибающий момент.

Необходимость в расчете по касательным напряжениям возникает для коротких балок, испытывающих действие значительной поперечной нагрузки, а также для деревянных балок. Опасные точки расположены в нейтральном слое сечения с наибольшей поперечной силой.

Для балок тонкостенного профиля (двутавр, швеллер) опасной может оказаться точка, расположенная в месте соединения стенки с полкой. Это имеет место в тех случаях, когда к балке приложена значительная поперечная нагрузка, причем есть сечения, где M и Q одновременно велики. Следовательно, σ и τ достигают больших значений, и это вынуждает делать расчет по главным напряжениям.

6.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И РАСЧЕТ НА ЖЕСТКОСТЬ

6.3.1. Дифференциальное уравнение упругой линии балки. При

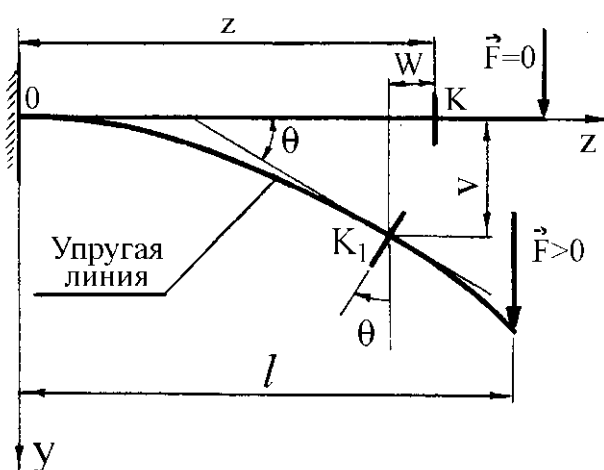


Рис. 6.10

изгибе произвольное сечение K балки (рис. 6.10) получает три перемещения: вертикальный прогиб v , горизонтальное смещение w , угол поворота θ . Ось деформированной балки называется упругой линией.

В реальных конструкциях $w \ll v$,

$$v_{\max} \leq l/200, \quad \theta_{\max} \leq 1^\circ (0,0174 \text{ рад}),$$

поэтому в расчетах можно пренебречь смещением w , а для углов поворота использовать приближенную формулу $\theta \approx \text{tg}\theta = dv/dz$. Таким образом, для определения линейных и угловых перемещений балки необходимо знать уравнение упругой линии $v(z)$.

Кривизна оси балки связана с изгибающим моментом выражением

$$k = 1/\rho = M_x/(EI_x).$$

Из курса математики известна следующая формула для кривизны линии:

$$k = \pm v''/[1 + (v')^2]^{3/2},$$

где $v' = dv/dz$, $v'' = d^2v/dz^2$.

Подставляя это значение k в предыдущее выражение, получим точное дифференциальное уравнение упругой линии балки:

$$v''/[1 + (v')^2]^{3/2} = \pm M_x/(EI_x). \quad (6.11)$$

Пренебрегая $(v')^2$ по сравнению с единицей, заменяем его приближенным уравнением

$$v'' = \pm M_x/(EI_x), \quad (6.12)$$

которое называется *основным дифференциальным уравнением упругой линии балки*.

Выбор знака определяется принятой системой координат (рис. 6.11). Если ось y направлена вверх, то знаки момента M_x и кривизны v'' совпадают, поэтому в уравнении (6.12) берется знак “плюс”. При обратном направлении оси y знаки M_x и v'' противоположны, следовательно, в этом случае следует использовать уравнение вида $v'' = -M_x/(EI_x)$, которое и рассматривается в дальнейшем.

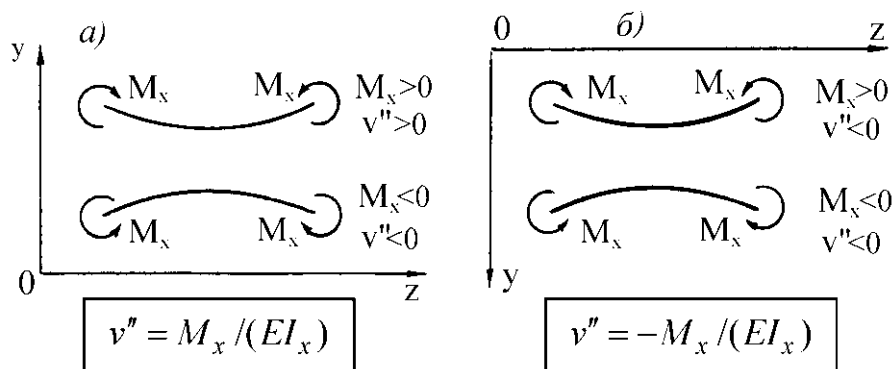


Рис. 6.11

6.3.2. Метод начальных параметров. Последовательно интегрируя уравнение (6.12), получим сначала выражение для углов поворота

$$\theta(z) = \theta_0 - \frac{1}{EI_x} \int_0^z M_x(z) dz, \quad (a)$$

а затем для прогибов

$$v(z) = v_0 + \theta_0 z - \frac{1}{EI_x} \int_0^z \left(\int_0^z M_x(z) dz \right) dz \quad (б)$$

Для вычисления интегралов, входящих в формулы (a) и (б), запишем выражение изгибающего момента $M_x(z)$ от типичных нагрузок (рис. 6.12):

$$M_x(z) = - \left[M + F(z - b) + \frac{q}{2}(z - c)^2 - \frac{q}{2}(z - d)^2 \right].$$

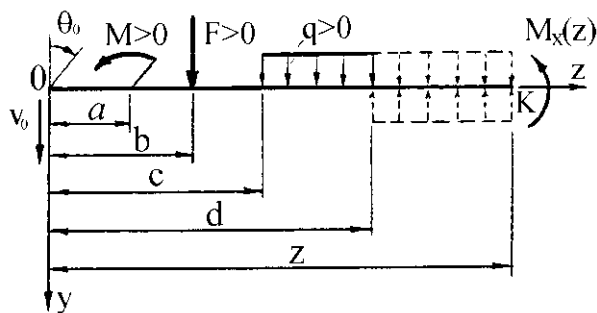


Рис. 6.12

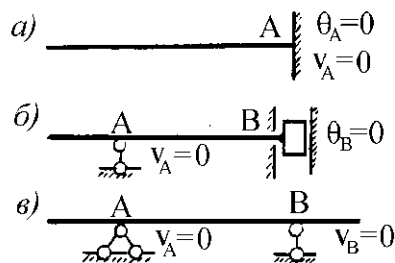


Рис. 6.13

Подставляя M_x в формулы (а) и (б) и учитывая, что в общем случае на балку действует несколько моментов, сосредоточенных сил и погонных нагрузок, после интегрирования получим окончательно

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{1}{EI_x} \sum \left[\frac{M(z-a)}{1!} + \frac{F(z-b)^2}{2!} + \frac{q(z-c)^3}{3!} - \frac{q(z-d)^3}{3!} \right], \quad (6.13)$$

$$v(z) = v_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI_x} \sum \left[\frac{M(z-a)^2}{2!} + \frac{F(z-b)^3}{3!} + \frac{q(z-c)^4}{4!} - \frac{q(z-d)^4}{4!} \right]. \quad (6.14)$$

Здесь θ_0 и v_0 – угол поворота и прогиб в начале координат, называемые начальными параметрами и определяемые из условия опирания балки (рис. 6.13). Значок “ \mathbb{I} ” над символом суммы обозначает, что суммируются только те величины, которые относятся к части балки, расположенной *слева* от того сечения, где ищут перемещения. Все нагрузки, приведенные на рис. 6.12, считаются *положительными*.

6.3.3. Энергетический метод. Энергия деформации при изгибе. Выделим из балки бесконечно малый элемент (рис. 6.14) и составим для него уравнение баланса энергии

$$dU = dW,$$

где dU – потенциальная энергия упругой деформации, dW – работа внешних сил. Как известно, работа пары сил M_x равна произведению момента на угол поворота. Однако, учитывая статический характер нагружения и линейную зависимость между усилиями и перемещениями, в нашем случае

$$dW = (1/2)M_x d\theta.$$

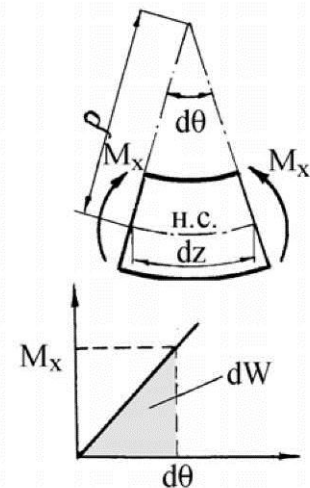


Рис. 6.14

Но $d\theta = dz / \rho = M_x dz / (EI_x)$, поэтому $dU = M_x^2 dz / (2EI_x)$.

Полная энергия, накапливаемая во всей балке,

$$U = \int_l M_x^2 dz / (2EI_x). \quad (6.15)$$

Полученная формула, строго говоря, справедлива только при чистом изгибе. При поперечном изгибе она является двучленной

$$U = \int_l M_x^2 dz / (2EI_x) + \int_l k_y Q_y^2 dz / (2GA), \quad (6.16)$$

здесь k_y – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения. Например, для прямоугольного сечения $k_y = 1,2$. Второе слагаемое не превышает, как правило, 2-3 % от всей энергии деформации, поэтому в большинстве практических расчетов им пренебрегают.

Теоремы о взаимности работ и перемещений. Эти теоремы относятся к числу общих теорем сопротивления материалов. Они прямо вытекают из принципа независимости действия сил и применимы ко всем системам, для которых соблюдается этот принцип.

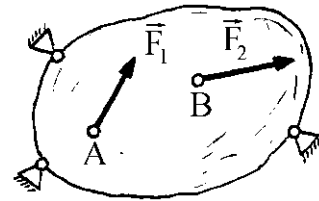


Рис. 6.15

Рассмотрим упругое тело (рис. 6.15), к которому приложены силы F_1 в точке A и F_2 в точке B . Определим работу, которую совершают эти силы при различном порядке их приложения. Пусть сначала прикладывается сила F_1 , а затем F_2 . Тогда сумма работ равна

$$W_1 = (1/2)F_1\delta_{A1} + (1/2)F_2\delta_{B2} + F_1\delta_{A2},$$

где δ_{A1} – перемещение точки A по направлению силы F_1 , вызванное силой F_1 ; δ_{B2} – перемещение точки B по направлению силы F_2 , вызванное силой F_2 ; δ_{A2} – перемещение точки A по направлению силы F_1 под действием силы F_2 , приложенной в точке B . В последнем слагаемом множитель $1/2$ отсутствует, так как на пути δ_{A2} сила F_1 остается неизменной.

Во втором случае сначала прикладывается сила F_2 , а затем F_1 и выражение работы будет следующим:

$$W_2 = (1/2)F_2\delta_{B2} + (1/2)F_1\delta_{A1} + F_2\delta_{B1}.$$

Приравнявая работы, находим

$$\boxed{F_1\delta_{A2} = F_2\delta_{B1}}. \quad (6.17)$$

Полученный результат выражает теорему о взаимности работ (**теорема Бетти**): работа первой силы на перемещении точки ее приложения под действием второй силы равна работе второй силы на перемещении точки ее приложения под действием первой силы.

В частности, если $F_1 = F_2 = F$, то выражение (6.17) принимает вид

$$\boxed{\delta_{A2} = \delta_{B1}} \quad (6.18)$$

В этом и заключается теорема о взаимности перемещений (**теорема Максвелла**): перемещение точки A под действием силы, приложенной в точке B , равно перемещению точки B под действием той же силы, приложенной в точке A (рис. 6.16).

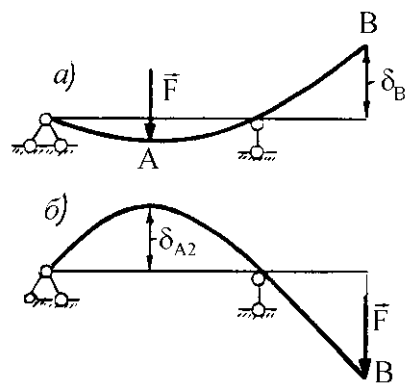


Рис. 6.16

Теорема Кастigliано. Частная производная от потенциальной энергии системы по силе равна перемещению точки приложения силы по направлению этой силы.

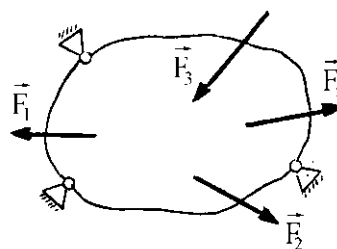


Рис. 6.17

Рассмотрим упругое тело (рис. 6.17), нагруженное произвольной системой сил. Потенциальная энергия деформации, накопленная в теле в результате работы внешних сил, равна U и выражается через силы $U = U(F_1, F_2, \dots, F_n)$. Дадим одной из сил, например, силе F_n , при-

ращение dF_n . Тогда потенциальная энергия получит приращение $(\partial U / \partial F_n) dF_n$ и примет вид

$$U + (\partial U / \partial F_n) dF_n. \quad (a)$$

Изменим порядок приложения сил. Приложим сначала силу dF_n , а затем всю систему. Тогда выражение потенциальной энергии получим в виде

$$U + dF_n \delta_n + (1/2) dF_n d\delta_n, \quad (б)$$

где $dF_n \delta_n$ есть приращение энергии, связанное с работой силы dF_n на перемещении δ_n , вызванном всей системой внешних сил; перед произведением множитель $1/2$ не ставится, поскольку на перемещении δ_n сила dF_n остается неизменной. Третье слагаемое, равное работе силы dF_n на вызванном ею перемещении $d\delta_n$, является величиной высшего порядка малости, поэтому его можно отбросить.

Приравнявая выражения (a) и (б), находим

$$\boxed{\delta_n = \partial U / \partial F_n}, \quad (6.19)$$

что и требовалось доказать.

П Р И М Е Р 6.1. Определить наибольший прогиб консоли, нагруженной на конце силой F .

Р е ш е н и е . Изгибающий момент в произвольном сечении K балки равен

$$M_x(z) = -Fz.$$

Потенциальная энергия упругой деформации

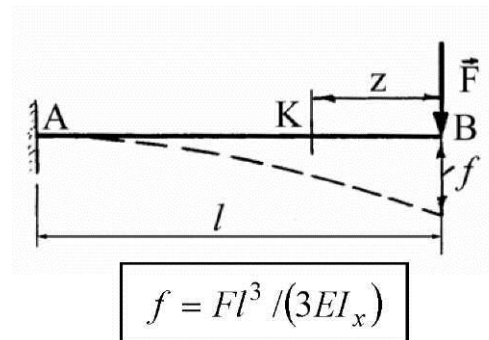


Рис. 6.18

$$U = \int_0^l M_x^2 dz / (2EI_x) = (F^2 / 2EI_x) \int_0^l z^2 dz = F^2 l^3 / (6EI_x).$$

По формуле (6.18) находим искомое перемещение

$$f = v_B = \partial U / \partial F = Fl^3 / (3EI_x).$$

Интеграл Мора. Пусть требуется определить прогиб некоторого сечения K балки (рис. 6.19). Приложим в точке K фиктивную силу Φ и вычислим изгибающий момент в произвольном сечении балки

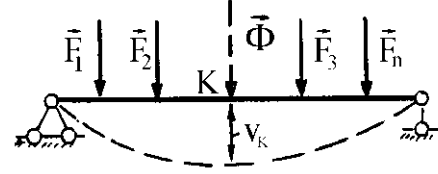


Рис. 6.19

$$M_x(z) = M_F(z) + M_\Phi(z),$$

где M_F – момент от заданной системы внешних сил, M_Φ – дополнительный момент, вызванный силой Φ . Момент M_Φ пропорционален силе Φ , поэтому его можно представить как произведение $M_\Phi = \bar{M}\Phi$. Здесь \bar{M} есть изгибающий момент от единичной силы, приложенной в рассматриваемой точке K .

Потенциальная энергия системы с учетом силы Φ

$$U = \int_0^l (M_F + \bar{M}\Phi)^2 dz / (2EI_x).$$

Дифференцируя это выражение по Φ , и полагая после этого $\Phi=0$, находим перемещение точки K :

$$\Delta_K = v_K = \partial U / \partial \Phi |_{\Phi=0} = \int_0^l M_F \bar{M} dz / (EI_x). \quad (6.20)$$

Это и есть *интеграл Мора*.

ПРИМЕР 6.2. Определить максимальный прогиб в двухопорной балке, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 6.20).

Решение. Находим изгибающие моменты:

- от заданной нагрузки $M_F = R_A z_1 - qz_1^2 / 2 = q(lz_1 - z_1^2) / 2$,

- от единичной силы, приложенной в точке C , где ищется прогиб

$$\bar{M} = z_1 / 2.$$

По формуле (6.20) вычисляем наибольший прогиб, который возникает в среднем сечении балки

$$v_C = f = \frac{2}{EI_x} \int_0^{l/2} M_F \bar{M} dz =$$

$$= \frac{q}{2EI_x} \int_0^{l/2} (lz_1 - z_1^2) z_1 dz_1 = \frac{ql^4}{2EI_x} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{5ql^4}{384EI_x}.$$

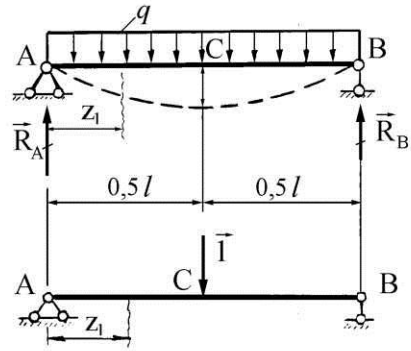


Рис. 6.20

Некоторые способы вычисления интеграла Мора. Наибольшее распространение в инженерной практике получили *правило Верещагина* и *формула Симпсона*.

Правило Верещагина. Оно заключается в замене операции интегрирования перемножением площади эпюры моментов от внешней нагрузки на ординату линейной эпюры от единичной силы, расположенную под центром тяжести первой эпюры.

Действительно, $I = \int_0^l M_F \bar{M} dz$, причем $\bar{M} = kz + b$. Поэтому

$$I = k \int_0^l z M_F dz + b \int_0^l M_F dz. \text{ Но } \int_0^l z M_F dz = \omega_F z_C, \quad \int_0^l M_F dz = \omega_F.$$

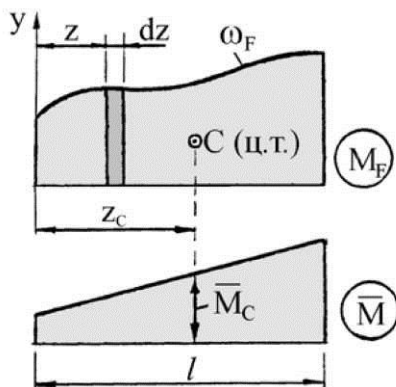


Рис. 6.21

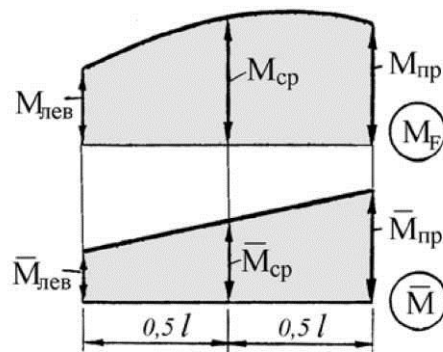


Рис. 6.22

Следовательно,
$$I = \int_0^l M_F \bar{M} dz = \omega_F (kz_C + b) = \omega_F M_C$$

или
$$I = \omega c. \quad (6.21)$$

В последней формуле индекс “F” у площади ω опущен, а ордината M_C прямолинейной эпюры для краткости обозначается одной буквой c .

Площадь ω иногда приходится разбивать на более простые части, тогда вместо (6.21) получим

$$I = \int_0^l M_F \bar{M} dz = \sum_{i=1}^n \omega_i c_i, \quad (6.22)$$

где ω_i – части площади ω , c_i – соответствующая ордината прямолинейной эпюры.

Искомое перемещение
$$EI_x \Delta_K = \int_0^l M_F \bar{M} dz = \sum_{i=1}^n \omega_i c_i. \quad (6.23)$$

Площади простейших фигур и положения их центров тяжести приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Фигура	Треугольник	Квадратная парабола		
				
ω	$hl/2$	$hl/3$	$2hl/3$	$2hl/3$

Формула Симпсона (рис. 6.22).

$$I = \int_0^l M_F \bar{M} dz = \frac{l}{6} (M_{\text{лев}} \bar{M}_{\text{лев}} + 4M_{\text{ср}} \bar{M}_{\text{ср}} + M_{\text{пр}} \bar{M}_{\text{пр}}). \quad (6.24)$$

При наличии погонной равномерно распределенной нагрузки интенсивности q величина $M_{\text{ср}}$ определяется по формуле

$$M_{\text{ср}} = (M_{\text{лев}} + M_{\text{пр}}) / 2 \pm ql^2 / 8.$$

Знак “плюс” соответствует погонной нагрузке, направленной вниз; при обратном направлении нагрузки берется знак “минус”.

6.3.4. расчет балок на жесткость. Значение расчетов на жесткость. Для многих машиностроительных конструкций существенную роль играет так называемый расчет на жесткость. Задача этого расчета – обеспечить конструкции необходимую жесткость, т.е. ограничить упругие перемещения деталей, обусловленные их деформацией, определенными пределами, зависящими от назначения и условий работы конструкции. Повседневная практика и анализ работы многих выполненных конструкций показывает безусловную необходимость подобного рода расчетов.

Характерным примером здесь может служить работа различных машинных валов. Так, если прогиб вала зубчатой или червячной передачи превышает допускаемые значения, то условия зацепления резко ухудшаются. Кроме того, при изгибе вала имеет место перекося цапф в опорах, что влечет за собой неравномерный износ вкладышей в подшипниках скольжения или заклинивание шариков и роликов в подшипниках качения. Таким образом, необходимо ограничивать не только величины линейных перемещений (прогибов) вала, но и величины его угловых перемещений.

Условия жесткости. Они имеют следующий вид

$$v_{\max} \leq [f] \quad \text{и} \quad \theta_{\max} \leq [\theta], \quad (6.25)$$

где $[f]$ – допускаемый прогиб, $[\theta]$ – допускаемый угол поворота.

Допускаемый прогиб зависит от назначения сооружения или машины и изменяется в широких пределах от $1/5000$ до $1/300$ расстояния между опорами (пролета балки l). Например, для подкрановых балок принимают

$$[f] = (1/700 \dots 1/600) l.$$

Допускаемые величины угла поворота сечения вала в местах установки подшипников – $[\theta] = (1 \dots 5)$ мрад, зубчатых колес – $[\theta] = (1 \dots 2)$ мрад.

6.4. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ИЗГИБА

Речь пойдет об экономии материала при конструировании балок, которая достигается за счет:

- 1) *выбора рациональной формы сечения,*
- 2) *придания балке рациональной конфигурации по длине,*
- 3) *рационального размещения опор.*

6.4.1. Рациональные формы сечения балок. Сначала выскажем общие соображения, касающиеся применяемых материалов.

Для балок, изготовленных из хрупких материалов, которые неодинаково работают на растяжение и сжатие, рациональными будут сечения, несимметричные относительно нейтральной оси (например, П-образные, Т-образные и т.п.).

Для балок, изготовленных из пластичных материалов, у которых пределы текучести на растяжение и сжатие совпадают ($\sigma_{тр} = \sigma_{сж}$), рациональными являются сечения, симметричные относительно нейтральной оси. Именно такие балки рассматриваются в последующем.

Наиболее выгодными сечениями балок с точки зрения затрат материала являются такие, у которых наибольшая доля материала размещена в верхней и нижней частях сечения, где напряжения наибольшие и материал поэтому наиболее полно используется. К таким относятся двутавр, швеллер, коробчатое сечение.

Дадим количественную оценку рациональности сечения. Так как грузоподъемность балки пропорциональна моменту сопротивления ее сечения

$$[M] = [\sigma] W_x,$$

а расход материала пропорционален площади этого сечения A , то экономичность принятого типа сечения можно оценивать безразмерной

$$\text{величиной} \quad w_x = W_x / A^{3/2}, \quad (6.26)$$

называемой *удельным моментом сопротивления.*

Таблица 6.3

Тип сечения	w_x
Круг	0,14
Квадрат	0,167
Кольцо $\alpha = d_{\text{в}} / d_{\text{н}} = 0,9$	0,58
Швеллер	0,57 – 1,35
Двутавр	1,02 – 1,51

В табл. 6.3 приведены значения w_x для некоторых наиболее распространенных сечений.

Как видим, наименее выгодными являются круглое, квадратное и подобные им сечения, у которых большое количество материала сконцентрировано у нейтральной оси, где материал весьма мало напряжен. Наиболее выгодными являются сечения в форме двутавра, швеллера и коробчатые. Количественная оценка показывает, что переход от балки круглого сплошного сечения к балке двутаврового профиля приводит к экономии материала, достигающей 80%.

6.4.2. балки равного сопротивления. Как известно, сечение балки подбирается по наибольшему моменту, т.е.

$$W_x \geq M_{\text{max}} / [\sigma].$$

При таком подходе только на небольшом участке балки материал используется эффективно; большая же часть балки, где $M_x < M_{\text{max}}$, оказывается недогруженной.

Поставим перед собой задачу: спроектировать такую балку, у которой все сечения были бы равнопрочными, т.е. одинаковы максимальные напряжения в каждом сечении вдоль оси. Эту балку принято называть *балкой равного сопротивления* и ее конфигурация определяется из уравнения

$$W_x(z) = M_x(z) / [\sigma].$$

В качестве примеров рассмотрим два очень важных для практики случая.

1. **Консоль прямоугольного сечения** (рис. 6.23).

Уравнение изгибающих моментов $M_x(z) = Fz$.

Требуемый момент сопротивления $W_x(z) = Fz/[\sigma] = bh^2/6$.

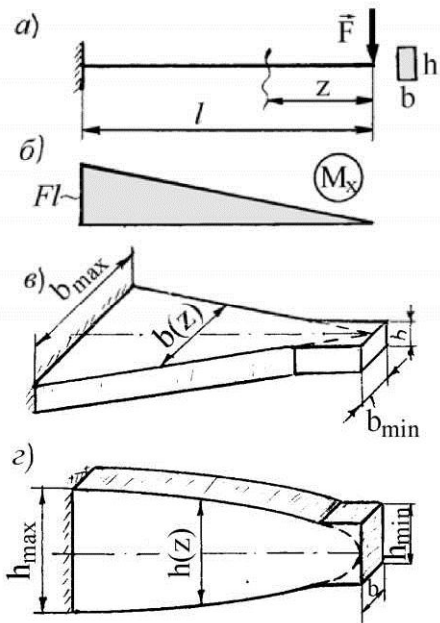


Рис. 6.23

1-й вариант (рис. 6.23, в):

$h = \text{const}$, $b(z) = 6Fz/(h^2[\sigma])$,
экономия материала – 50%.

2-й вариант (рис. 6.23, г):

$b = \text{const}$, $h(z) = \sqrt{6Fz/(b[\sigma])}$,
экономия материала – 33%.

Минимальные размеры сечения определяются из условия прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = 3F/(2bh) \leq [\tau],$$

откуда $b_{\min} = 3F/(2h[\tau])$,

$$h_{\min} = 3F/(2b[\tau]).$$

2. **Балка на двух опорах круглого сечения** (рис. 6.24).

1-й вариант. Равнопрочность детали 1 придана изменением ее наружной конфигурации вдоль оси.

2-й вариант. Равнопрочность детали 2 придана удалением материала изнутри при постоянстве наружного диаметра.

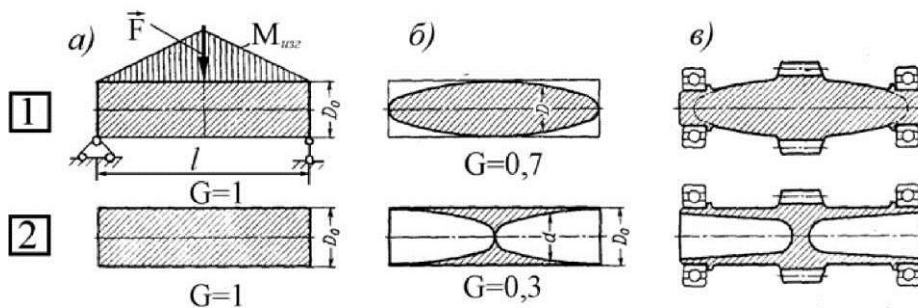


Рис. 6.24

6.4.3. Рациональное размещение опор балок. С точки зрения экономии материала имеет существенное значение правильное размещение опор балок (если к этому нет препятствий по производственным или другим соображениям).

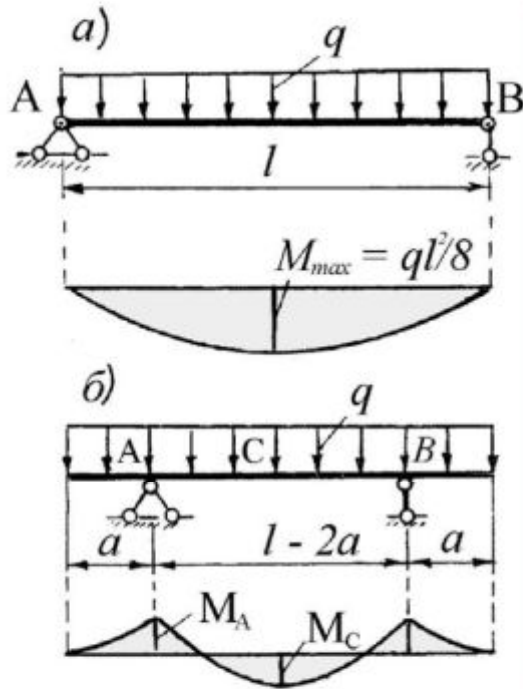


Рис. 6.25

В простой балке, опертой по концам и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 6.25, а), наибольший изгибающий момент имеет место посередине пролета и равен $M_{\max} = ql^2/8$. Нетрудно догадаться, что в балке такой же длины, но при наличии консолей изгибающий момент будет меньше. Очевидно, вес балки будет минимальным, если выполняется условие равенства моментов в опорном сечении и в пролете (рис. 6.25, б), т.е.

$$|M_A| = M_C.$$

Отсюда находим наивыгоднейшую длину консолей $a = 0,207 l$. Получающийся максимальный изгибающий момент равен

$$M_{\max}^* = qa^2/2 = 0,0214ql^2.$$

Таким образом, надлежащим размещением опор изгибающий момент удастся уменьшить примерно в шесть раз. Это позволяет снизить вес балки в 3,24 раза и дает экономию материала около 70 %.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какой вид нагружения называется изгибом?
2. Какие нагрузки вызывают плоский прямой изгиб?
3. Что такое балка и какие внутренние силовые факторы возникают в ее поперечных сечениях?
4. Какой изгиб называется чистым и какой – поперечным?
5. Что такое нейтральный слой и нейтральная линия балки? Как проходит нейтральная линия при изгибе?
6. Какая существует связь между кривизной оси балки и изгибающим моментом?
7. Как изменяются по высоте поперечного сечения балки нормальные напряжения?
8. Как записывается условие прочности по нормальным напряжениям для балок из пластичных материалов?
9. Какие формы являются рациональными для балок из пластичных материалов?
10. Как записываются условия прочности по нормальным напряжениям для балок из хрупких материалов?
11. Почему для балок из хрупких материалов нецелесообразно применять сечения, симметричные относительно нейтральной оси?
12. Как распределяются нормальные напряжения по ширине сечения балки?
13. На каких допущениях базируется элементарная теория касательных напряжений при изгибе?
14. Как распределяются касательные напряжения по высоте балки прямоугольного сечения?
15. В каких точках поперечного сечения возникают наибольшие касательные напряжения и чему они равны?
16. Какое напряженное состояние возникает в балке при поперечном изгибе?
17. Какое напряженное состояние возникает в точках нейтрального слоя при поперечном изгибе? Как расположены главные площадки и чему равны главные напряжения?

18. Какое напряженное состояние возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси? Как расположены главные площадки и чему равны главные напряжения?

19. По каким формулам определяются величины и направления главных напряжений при поперечном изгибе?

20. Почему главные напряжения при поперечном изгибе обозначаются σ_1 и σ_3 , а не σ_1 и σ_2 ?

21. В чем заключается полная проверка прочности балки?

22. Какие перемещения получает при изгибе произвольное поперечное сечение балки?

23. Что такое упругая линия балки?

24. Как связаны между собой прогиб и угол поворота в любом сечении балки?

25. Как приближенно выражается кривизна оси балки?

26. Какой вид имеет основное дифференциальное уравнение изгиба?

27. В чем сущность метода начальных параметров и что представляют собой начальные параметры?

28. Чему равна потенциальная энергия упругой деформации при изгибе?

29. Как формулируется теорема взаимности работ?

30. В чем заключается теорема взаимности перемещений?

31. Как формулируется теорема Кастилиано?

32. Как определяются линейные и угловые перемещения балок энергетическим методом?

33. Каков порядок вычисления перемещений с помощью интеграла Мора? Какое принято правило знаков?

34. Какие графоаналитические приемы вычисления интеграла Мора Вы знаете?

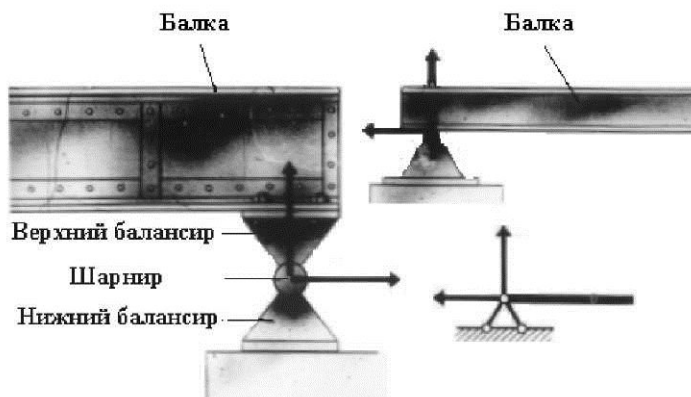
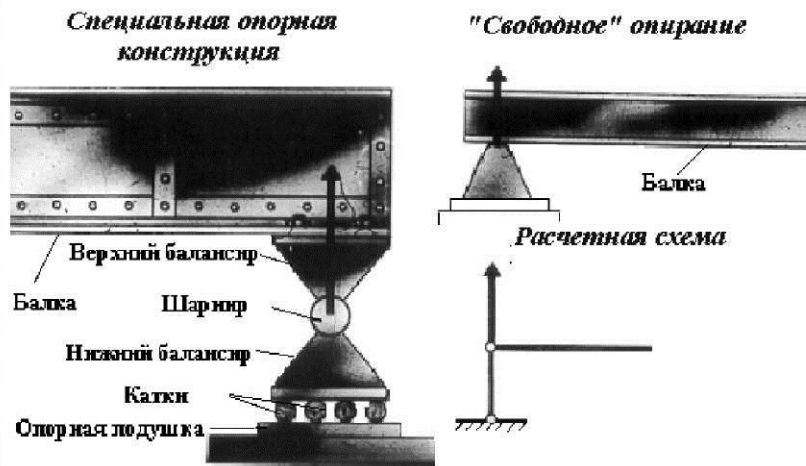
35. Каким образом достигается экономия материала при проектировании балок?

36. Что такое балка равного сопротивления изгибу?

1. ТИПЫ ОПОРНЫХ ЗАКРЕПЛЕНИЙ БАЛОК

1.1. Шарнирно-подвижная опора

Препятствует только вертикальному перемещению конца балки, но ни горизонтальному перемещению, ни повороту. Такая опора при любой нагрузке дает одну реакцию.

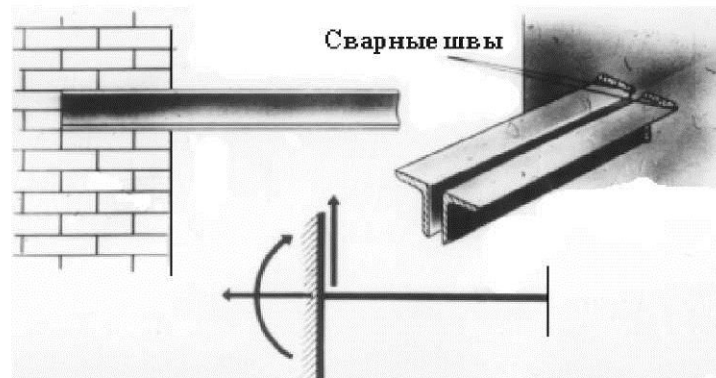


1.2. Шарнирно-неподвижная опора

Препятствует вертикальному и горизонтальному перемещениям конца балки, но не препятствует его свободному повороту. Дает 2 реакции: вертикальную и горизонтальную силы.

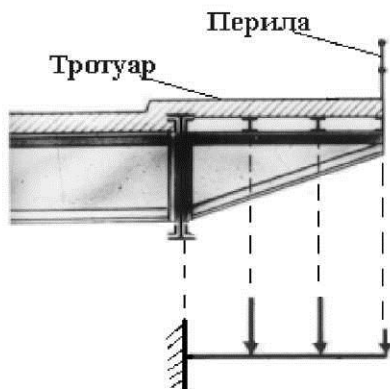
1.3. Заделка

Препятствует вертикальному и горизонтальному перемещениям конца балки, а также его повороту. Дает 3 реакции: вертикальную, горизонтальную силы и пару сил.



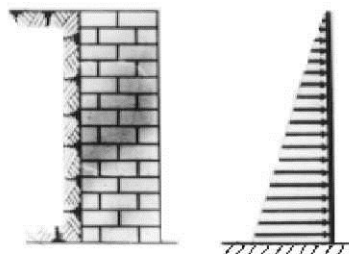
2. РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ БАЛОК

2.1. Пешеходная часть моста



Пешеходная часть моста - консоль, нагруженная системой сосредоточенных грузов.

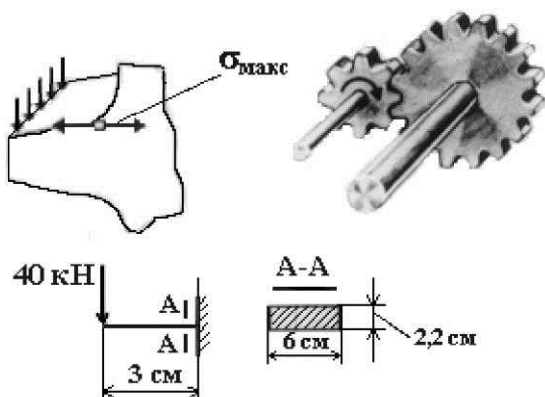
2.2. Подпорная стенка



Подпорная стенка - консоль под действием нагрузки, распределенной по закону треугольника.

3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

3.1. Расчет на прочность



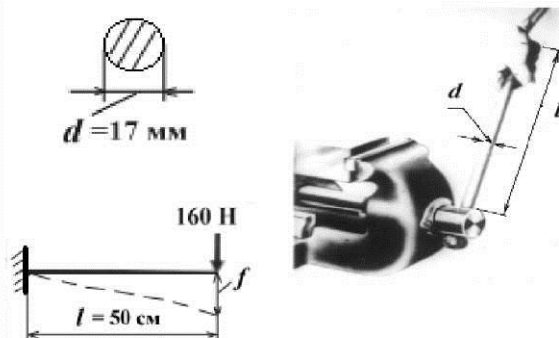
В сечении А-А

$$M_{\max} = 40 \cdot 3 = 120 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

$$W_{\text{и}} = bh^2/6 = 4,84 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_{\text{и}} = 250 \text{ МПа}$$

3.2. Расчет на жесткость



$$I = \pi d^4 / 64 = 0,42 \text{ см}^4;$$

$$E = 200 \text{ ГПа};$$

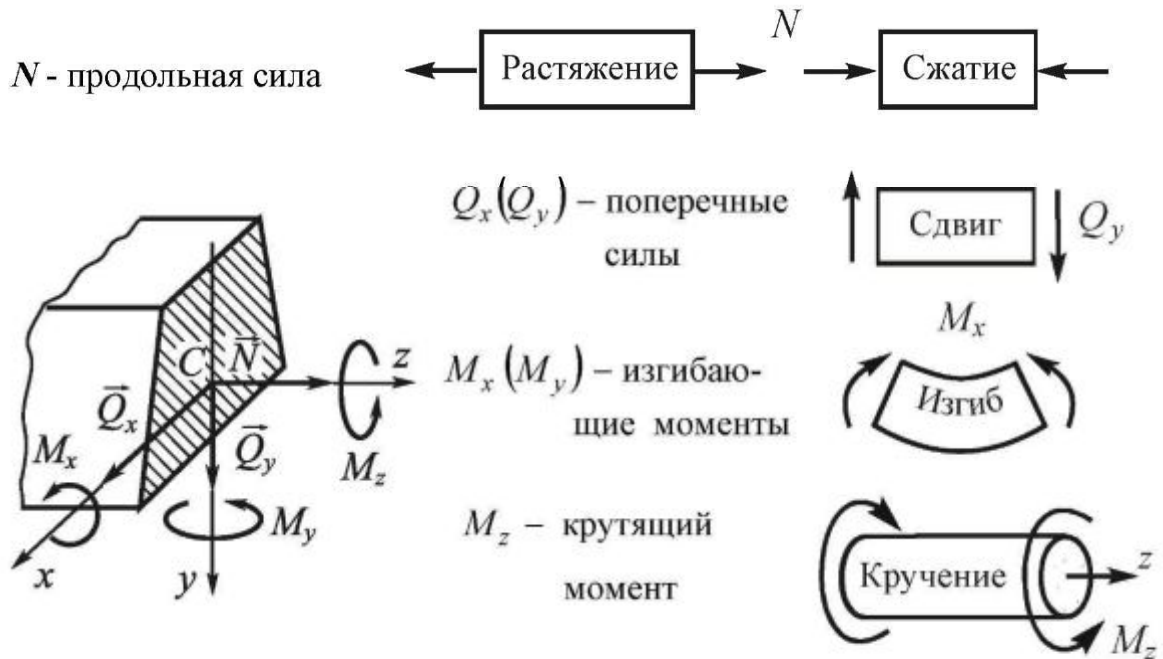
$$f_{\max} = Fl^3 / (3EI) = 8 \text{ мм}.$$

Приложение 1

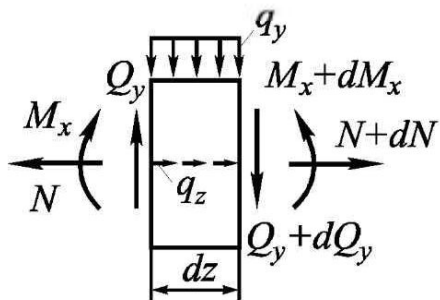
ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ

ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ

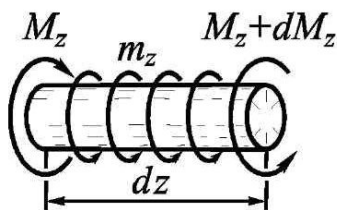
1. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ И ОСНОВНЫЕ ВИДЫ НАГРУЖЕНИЯ



Дифференциальные зависимости



$$\begin{aligned} \frac{dN}{dz} &= -q_z \\ \frac{dQ_y}{dz} &= -q_y \\ \frac{dM_x}{dz} &= Q_y \end{aligned}$$



$$\frac{dM_z}{dz} = -m_z$$

Интегральные зависимости

$$N = N_o - \int_0^z q_z dz, \quad Q_y = Q_o - \int_0^z q_y dz, \quad M_z = M_o - \int_0^z m_z dz,$$

$$M_x = M_o + \int_0^z Q_y dz = M_o + \omega_Q.$$

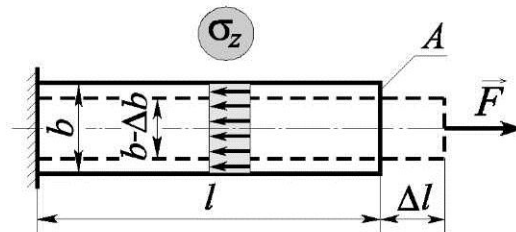
Частные случаи

$q_z(q_y) = \pm q, \quad m_z = \pm m$	$q_z(q_y) = 0, \quad m_z = 0$
$N = N_o \pm qz$	$N = N_o = \text{const}$
$Q_y = Q_o \pm qz$	$Q_y = Q_o = \text{const}$
$M_z = M_o \pm mz$	$M_z = M_o = \text{const}$
$M_x = M_o + Q_o z \pm 0,5 qz^2$	$M_x = M_o + Q_o z$

2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ

Распределение нормальных напряжений

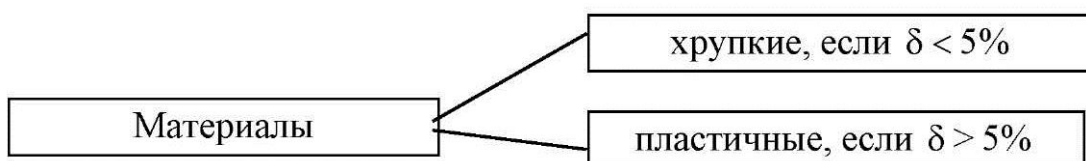
$$\sigma_z = N/A$$



Условие прочности $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$.

Допускаемое напряжение $[\sigma] = \sigma_{\text{пред}} / [n]$

$$\sigma_{\text{пред}} = \begin{cases} \sigma_T(\sigma_{0,2}) - \text{для пластичных материалов,} \\ \sigma_{\text{пч}} - \text{для хрупких материалов} \end{cases}$$



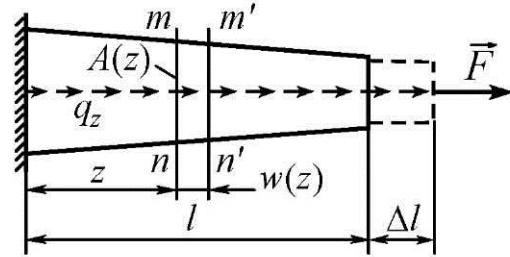
Нормативный коэффициент запаса прочности $[n]$ равен: для пластичных высокооднородных материалов (сталь, сплавы алюминия, титана, магния и меди) – 1,5...2,5; для чугуна – 4...6; для дерева – 8...10.

Ориентировочные значения допускаемых напряжений на растяжение, МПа: стали углеродистые – 140...250; стали легированные – 100...400; бронза – 60...120; латунь – 70...140; дюралюминий – 80...150; чугун – 30...80; сосна (вдоль волокон) – 10.

Относительные деформации :

- продольная $\varepsilon = \Delta l/l$,

- поперечная $\varepsilon' = \Delta b/b$.



Закон Пуассона $\varepsilon' = -\nu\varepsilon$.

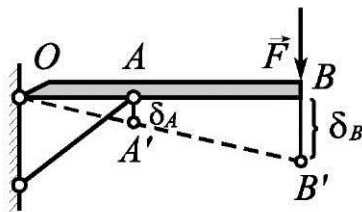
Коэффициент Пуассона лежит в пределах $0 \leq \nu \leq 0,5$

(пробка $\nu = 0$; сталь $\nu = 0,3$; резина $\nu = 0,5$)

Закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \text{ где } E \text{ – модуль Юнга.}$$

Материал	Дерево	Бетон	Дюраль	Медь	Титан	Чугун	Сталь	Алмаз
E , ГПа	10	20	70	100	100	120	200	1050



Удлинение стержня

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dz}{EA(z)}.$$

В частном случае, когда

$N = F = \text{const}$ и $EA = \text{const}$,

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}.$$

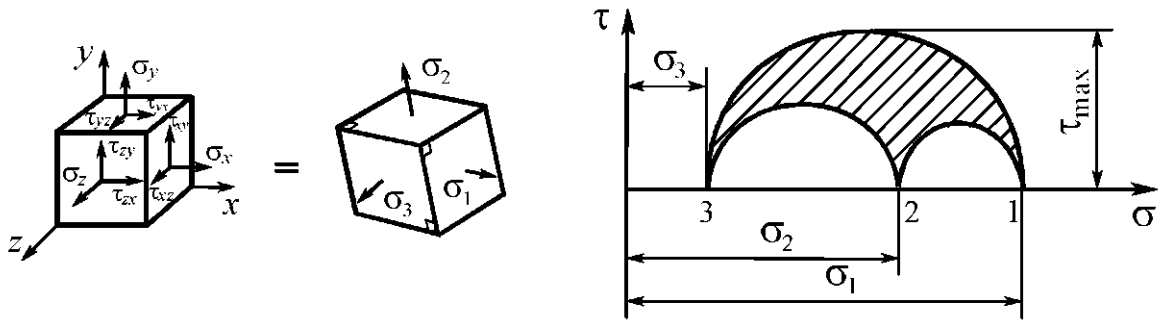
Условие жесткости

$$\delta \leq [\delta]$$

Потенциальная энергия упругой деформации

$$U = \int_0^l \frac{N^2 dz}{2EA}.$$

3. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ



$$T_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma_1 &\geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \\ \tau_{\max} &= 0,5(\sigma_1 - \sigma_3) \end{aligned}$$

Закон парности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Обобщенный закон Гука

$$\begin{cases} \varepsilon_x = [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] / E, & \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G, \\ \varepsilon_y = [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] / E, & \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G, \\ \varepsilon_z = [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] / E, & \gamma_{zx} = \tau_{zx} / G \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{Модуль сдвига} \\ G &= \frac{E}{2(1 + \nu)}. \end{aligned}$$

Относительное изменение объема: $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \sigma / K$,

где $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3$, $K = E / 3(1 - 2\nu)$ – модуль объемной упругости.

Удельная потенциальная энергия упругой деформации:

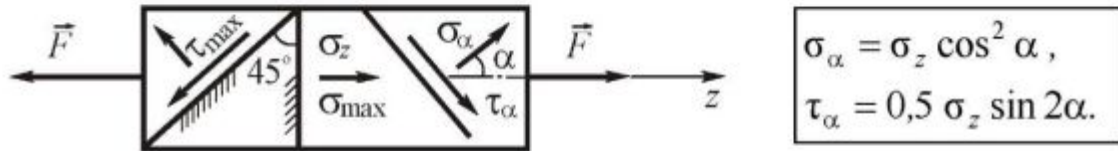
- полная $u = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] / (2E)$;

- изменения объема $u_{об} = \frac{\sigma^2}{2K}$;

- изменения формы $u_{ф} = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / (12G)$.

3.1. Линейное напряженное состояние

(два главных напряжения равны нулю)

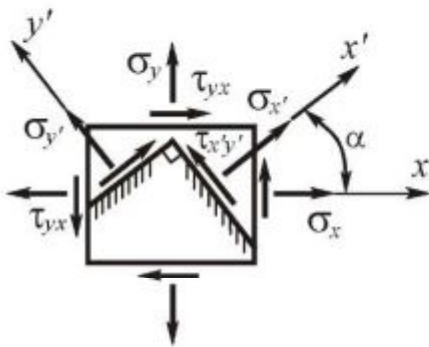


Наибольшее нормальное напряжение: $\sigma_{\max} = \sigma_{\alpha/\alpha=0} = \sigma_z.$

Наибольшее касательное напряжение: $\tau_{\max} = \tau_{\alpha/\alpha=45^\circ} = 0,5 \sigma_z.$

3.2. Плоское напряженное состояние

(одно из главных напряжений равно нулю)

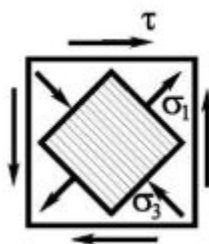


$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \tau_{x'y'} = -0,5(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha, \end{cases}$$

$$\sigma_{\max}^{\min} = 0,5[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}],$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max}^{\min} = (\sigma_{\max}^{\min} - \sigma_x) / \tau_{xy}.$$

Чистый сдвиг:

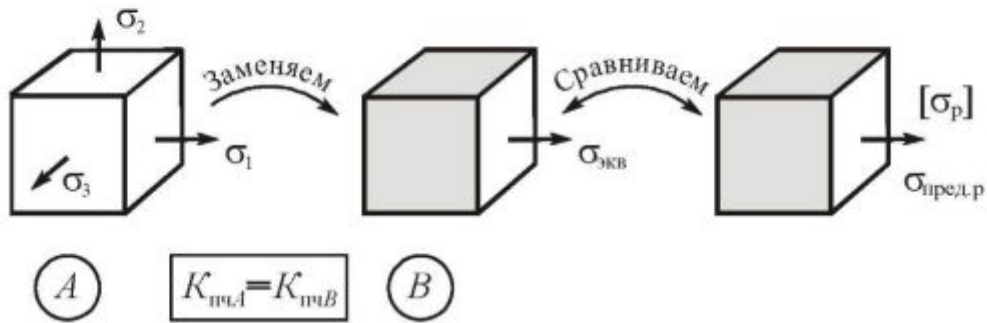


$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau, \quad \sigma_{\max}^{\min} = \pm \tau.$$

Главные напряжения

$$\sigma_1 = +\tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau, \quad \alpha_1 = \pm 45^\circ.$$

4. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ



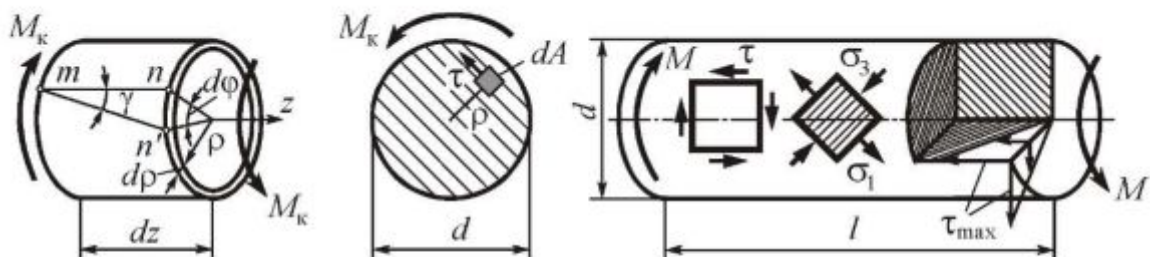
Они используются для оценки прочности конструкций в случае плоского и объемного напряженных состояний. Исходя из принятого критерия эквивалентности, лежащего в основе той или иной гипотезы прочности (см. таблицу, приведенную ниже), сложное напряженное состояние заменяют эквивалентным ему растяжением.

Условие прочности представляется в виде одного из следующих неравенств:

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma_p] = \sigma_{\text{пред.р}} / [n] \quad \text{или} \quad n = \sigma_{\text{пред.р}} / \sigma_{\text{экв}} \geq [n].$$

Название гипотезы, автор	Критерий прочности	Эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}}$	Область применения
Наибольших нормальных напряжений (Галилей, XVII в.)	σ_{max}	σ_1	Не рекомендуется
Наибольших линейных деформаций (Мариотт, 1682 г.)	ε_{max}	$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$	Не рекомендуется
Наибольших касательных напряжений (Кулон, 1773 г.)	τ_{max}	$\sigma_1 - \sigma_3$	Для пластичных материалов, у которых $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}}$
Энергии формоизменения (Губер, 1904 г.)	$u_{\text{ф}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$	
Гипотеза О. Мора (Мор, 1882 г.)	$\tau_n = f(\sigma_n)$	$\sigma_1 - m\sigma_3$ $m = \begin{cases} \sigma_{\text{тр}}/\sigma_{\text{тс}} - \text{пластичные материалы,} \\ \sigma_{\text{пчр}}/\sigma_{\text{пчс}} - \text{хрупкие материалы} \end{cases}$	Для пластичных и хрупких материалов

5. КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫХ ВАЛОВ



Угол сдвига $\gamma = \rho d\varphi / dz.$

Распределение касательных напряжений $\tau = \frac{M_K}{I_p} \rho$

Максимальное касательное напряжение $\tau = \frac{M_K}{I_p} \rho$

Геометрические характеристики:

- полярный момент инерции
- полярный момент сопротивления

$$I_p = \int_A \rho^2 dA,$$

$$W_p = I_p / \rho_{\max}.$$

Углы закручивания:

- относительный
- абсолютный (при $M_K = M = \text{const}$)

$$\theta = d\varphi / dz = M_K / (GI_p),$$

$$\varphi = M_K l / (GI_p).$$

Расчет валов сводится к одновременному удовлетворению двух условий:

- прочности $\tau_{\max} = M_{K \max} / W_p \leq [\tau]$, откуда $d_{\text{пч}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{K \max}}{\pi [\tau]}}$;
- жесткости $\theta_{\max} = M_{K \max} / (GI_p) \leq [\theta]$, откуда $d_{\text{ж}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{K \max}}{\pi G [\theta]}}$.

Форма		
I_p	$\frac{\pi d^4}{32} \cong 0,1d^4$	$\frac{\pi d_H^4}{32} (1 - \alpha^4)$
W_p	$\frac{\pi d^3}{16} \cong 0,2d^3$	$\frac{\pi d_H^3}{16} (1 - \alpha^4)$

$A = d_B / d_H$

Допускаемые величины:

- касательное напряжение $[\tau] = \begin{cases} (0,55...0,60)[\sigma_p] & \text{- для стали;} \\ (1,0...1,2)[\sigma_p] & \text{- для чугуна;} \end{cases}$

- относительный угол закручивания

$$[\theta] = 3,5...17,5 \text{ мрад/м } (0,20...1,0 \text{ град/м}).$$

Потенциальная энергия упругой деформации $U = \int_l M_k^2 dz / (2GI_p)$.

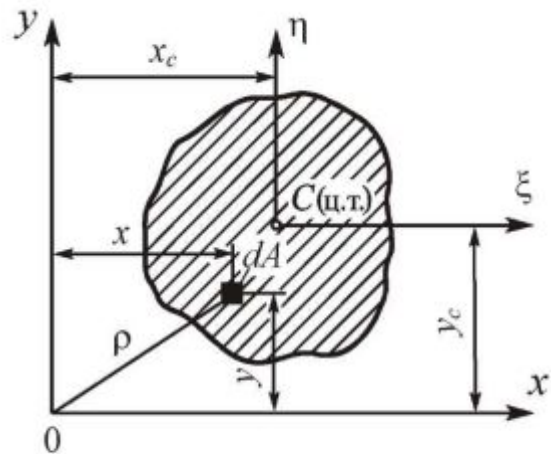
6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Статические моменты

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA.$$

Координаты центра тяжести

$$x_c = S_y / A, \quad y_c = S_x / A.$$



Моменты инерции:

- осевые $I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA;$

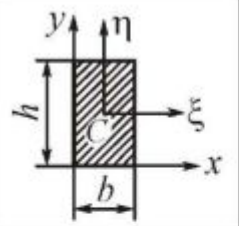
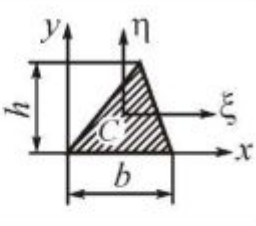
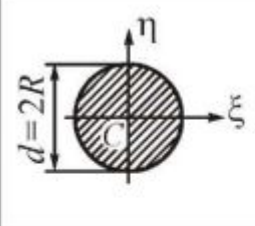
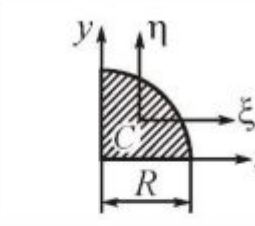
- центробежный $I_{xy} = \int_A xy dA;$

- полярный $I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y.$

Радиусы инерции $i_x^2 = I_x / A, \quad i_y^2 = I_y / A.$

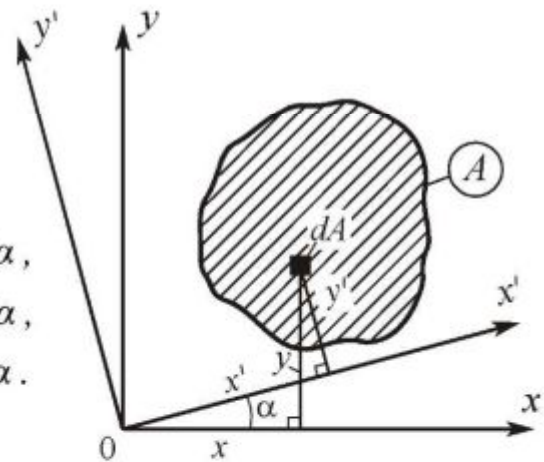
Преобразование моментов инерции при параллельном переносе осей (переход от центральных осей ξ, η к произвольным x, y):

$$I_x = I_\xi + y_c^2 A, \quad I_y = I_\eta + x_c^2 A, \quad I_{xy} = I_{\xi\eta} + x_c y_c A.$$

			
$x_c = 0,5b$	$y_c = h/3$	$\xi_c = \eta_c = 0$	$y_c = 4R/3\pi \approx 0,42R$
$I_{\xi} = bh^3/12$	$I_{\xi} = bh^3/36$	$I_{\xi} = I_{\eta} = \pi R^4/4$	$I_{\xi} = I_{\eta} = 0,055R^4$
$I_x = bh^3/3$	$I_x = bh^3/12$	$I_p = \pi R^4/2$	$I_x = I_y = \pi R^4/16$

Преобразование моментов инерции при повороте осей

$$\begin{cases} I_{x'} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{y'} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{x'y'} = 0,5(I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{cases}$$



Главные моменты инерции

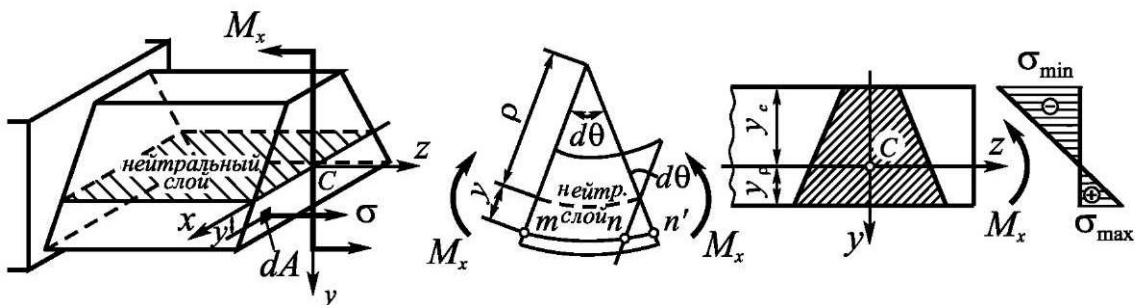
$$I_{\max} = I_{1,2} = 0,5 \left[(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right].$$

Положение главных осей

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = (I_x - I_{\max}) / I_{xy}.$$

7. ПЛОСКИЙ ПРЯМОЙ ИЗГИБ

7.1. Определение напряжений и расчет на прочность



НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Кривизна оси балки $1/\rho = M_x / (EI_x)$

Распределение
нормальных
напряжений

$$\sigma = \frac{E y}{\rho} = \frac{M_x}{I_x} y$$

Условия прочности:

- для хрупких материалов

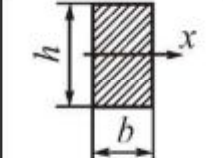
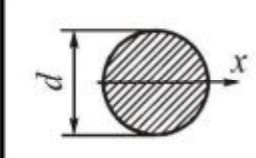
$$\begin{cases} \sigma_{\max} = (M_{\max} / I_x) y_p = M_{\max} / W_p \leq [\sigma_p], \\ \sigma_{\min} = (M_{\max} / I_x) y_c = M_{\max} / W_c \leq [\sigma_c], \end{cases}$$

где $W_p = I_x / y_p$ и $W_c = I_x / y_c$ – моменты сопротивления соответственно растянутых и сжатых волокон ;

- для пластичных материалов

$$\sigma_{\text{наиб}} = (M_{\max} / I_x) y_{\text{наиб}} = M_{\max} / W_x \leq [\sigma],$$

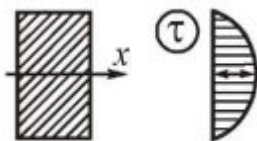
где $W_x = I_x / y_{\text{наиб}}$ – осевой момент сопротивления.

	$I_x = bh^3 / 12$ $W_x = bh^2 / 6$		$I_x = \pi d^4 / 64$ $W_x = \pi d^3 / 32$
---	------------------------------------	--	---

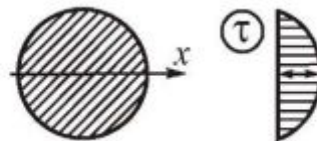
КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Формула Журавского

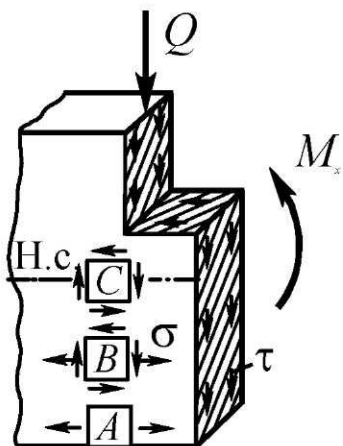
$$\tau = QS_x^{\text{отс}} / (bI_x)$$



$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}$$



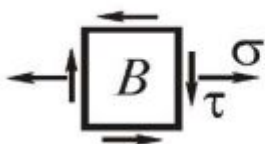
$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A}$$



Условие прочности $\tau_{\max} = kQ / A \leq [\tau]$,

где k – коэффициент формы, равный:
 3/2 – для прямоугольника,
 4/3 – для круга.

ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ



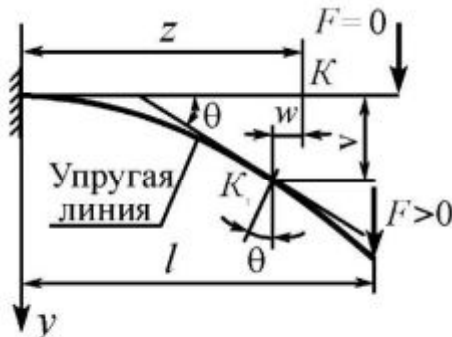
$$\sigma_{1,3} = 0,5[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]$$



7.2. Определение перемещений и расчет на жесткость

Перемещения:

- *линейные* $\left\{ \begin{array}{l} \text{прогиб } v, \\ \text{смещение } w \ll v, \end{array} \right.$
- *угловое* $\theta = dv / dz.$
(*угол поворота*)

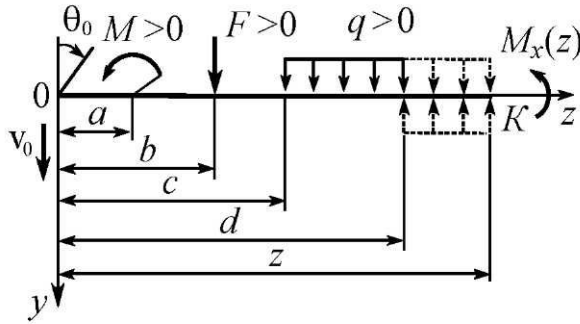


Основное дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$v'' = \pm M_x / (EI_x)$$

	$v'' = + \frac{M_x}{EI_x}$		$v'' = - \frac{M_x}{EI_x}$
--	----------------------------	--	----------------------------

МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ



$$\Theta(z) = \Theta_0 - \frac{1}{EI_x} \int_0^z M_x dz,$$

$$v(z) = v_0 + \Theta_0 z - \frac{1}{EI_x} \int_0^z \left(\int_0^z M_x dz \right) dz,$$

$$\Theta(z) = \Theta_0 + \frac{1}{EI_x} \sum^{«Л»} \left[\frac{M(z-a)}{1!} + \frac{F(z-b)^2}{2!} + q \frac{(z-c)^3}{3!} - q \frac{(z-d)^3}{3!} \right],$$

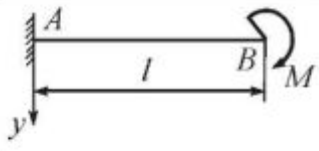
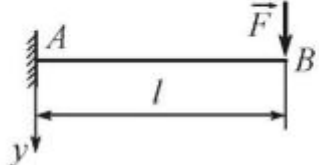
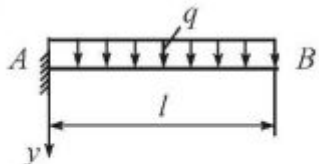
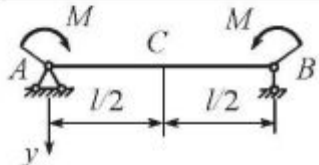
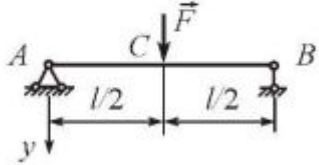
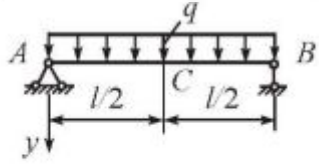
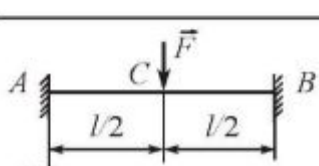
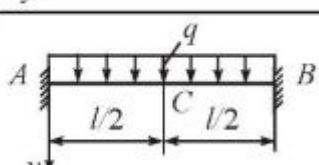
$$v(z) = v_0 + \Theta_0 z + \frac{1}{EI_x} \sum^{«Л»} \left[\frac{M(z-a)^2}{2!} + \frac{F(z-b)^3}{3!} + q \frac{(z-c)^4}{4!} - q \frac{(z-d)^4}{4!} \right].$$

Значок «Л» над символом суммы обозначает, что суммируются только те величины, которые относятся к части балки, расположенной *слева* от того сечения, где ищутся перемещения.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Интеграл Мора	Правило Верещагина	Формула Симпсона	
 $EI_x V_K = \int_l M_F \bar{M} dz$	$I = \int_l M_F \bar{M} dz = \omega_F c$ $\bar{M}_c = c$	 $I = \frac{l}{6} (M_{\text{л}} \bar{M}_{\text{л}} + 4M_{\text{ср}} \bar{M}_{\text{ср}} + M_{\text{п}} \bar{M}_{\text{п}})$	
Фи- гу- ра	Треугольник	Квадратная парабола	
ω	$hl/2$	$hl/3$	$2hl/3$

8. СИЛОВЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ НЕКОТОРЫХ БАЛОК

Схемы балок	Изгибающий момент	Прогиб	Угол поворота
	$M_x = M = \text{const}$	$V_B = \frac{Ml^2}{2EI}$	$\Theta_B = \frac{Ml}{EI}$
	$M_A = -Fl$	$V_B = \frac{Fl^3}{3EI}$	$\Theta_B = \frac{Fl^2}{2EI}$
	$M_A = -ql^2 / 2$	$V_B = \frac{ql^4}{8EI}$	$\Theta_B = \frac{ql^3}{6EI}$
	$M_x = M = \text{const}$	$V_C = \frac{Ml^2}{8EI}$	$\Theta_A = \frac{Ml}{2EI}$
	$M_C = Fl / 4$	$V_C = \frac{Fl^3}{48EI}$	$\Theta_A = \frac{Fl^2}{16EI}$
	$M_C = ql^2 / 8$	$V_C = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$	$\Theta_C = 0,$ $\Theta_A = \frac{ql^3}{24EI}$
	$M_A = -Fl / 8$ $M_C = Fl / 8$	$V_C = \frac{Fl^3}{192EI}$	$\Theta_A = \Theta_C = 0$
	$M_A = -ql^2 / 12$ $M_C = ql^2 / 24$	$V_C = \frac{ql^4}{384EI}$	$\Theta_A = \Theta_C = 0$

9. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Конструкцию, усилия в которой не могут быть определены только при помощи уравнений статики, называют статически неопределимой. С точки зрения расчета ее удобно рассматривать как некоторую статически определимую систему, именуемую в последующем основной системой, на которую наложены дополнительные связи.

Статически неопределимые системы (в отличие от статически определимых) обладают следующими особенностями:

- 1) распределение усилий в них зависит не только от внешних сил, но и от соотношения жесткостей отдельных элементов, а именно: чем больше жесткость элемента, тем больше усилие, на него приходящееся;
- 2) при смещении опор, неточном изготовлении элементов, колебаниях температуры возникают дополнительные усилия.

Одним из важнейших методов расчета статически неопределимых систем является метод сил, в котором за основные неизвестные принимают обобщенные реактивные силы в отброшенных дополнительных связях системы. Расчет ведется в такой последовательности:

1. Определяется степень статической неопределимости (по числу дополнительных связей).

2. Выбирается основная система, которая получается из заданной после удаления дополнительных связей. Действие отброшенных связей заменяется неизвестными силовыми факторами X_1, X_2, \dots, X_n .

3. Составляются канонические уравнения метода сил, математически выражающие условие эквивалентности основной и заданной систем:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \Delta_{iF} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $EI\delta_{ij} = \int \overline{M}_i \overline{M}_j dz, \quad EI\Delta_{iF} = \int \overline{M}_i \overline{M}_F dz.$

Из решения этих уравнений находят значения X_1, X_2, \dots, X_n .

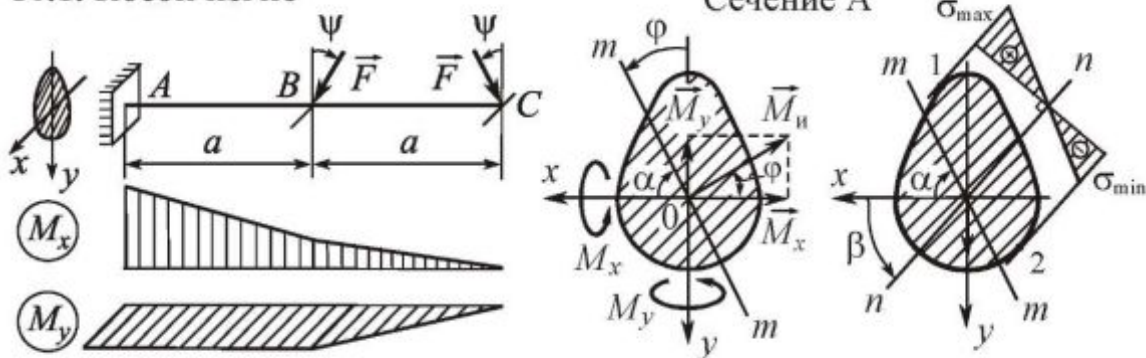
4. Строятся эпюры внутренних силовых факторов.

5. Выполняется проверка решения, включающая в себя статическую проверку (проверяется равновесие системы и ее отдельных частей) и кинематическую (проверяется отсутствие перемещений по направлению наложенных на систему связей).



10. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

10.1. Косой изгиб



Уравнение силовой линии

$$y = k_1 x, \text{ где } k_1 = \operatorname{tg} \alpha.$$

Уравнение нейтральной линии $y_0 = k_2 x_0, k_2 = \operatorname{tg} \beta = -(I / k_1)(I_x / I_y).$

Связь между угловыми коэффициентами

$$k_1 k_2 = -I_x / I_y$$

Распределение нормальных напряжений

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

или

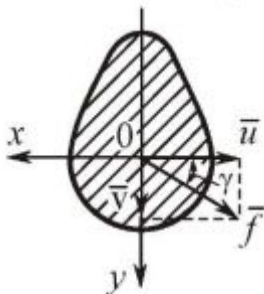
$$\sigma = M_n \left(\frac{\cos \varphi}{I_x} y + \frac{\sin \varphi}{I_y} x \right).$$

Условия прочности:

- для балок произвольного сечения из хрупких материалов

$$\begin{cases} \sigma_{\max} = (M_x / I_x) y_1 + (M_y / I_y) x_1 \leq [\sigma_p], \\ \sigma_{\min} = (M_x / I_x) y_2 + (M_y / I_y) x_2 \leq [\sigma_c]; \end{cases}$$

- для балок прямоугольного сечения из пластичных материалов



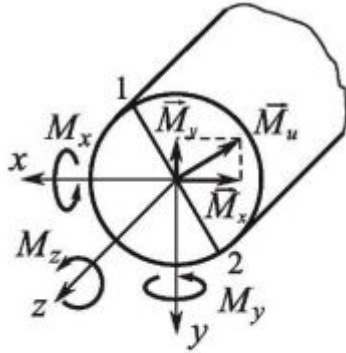
$$\sigma_{\max} = M_x / W_x + M_y / W_y \leq [\sigma].$$

Полное перемещение $\vec{f} = \vec{u} + \vec{v},$

$$f = \sqrt{u^2 + v^2}, \operatorname{tg} \gamma = v / u.$$

Условие жесткости $f_{\max} \leq [f].$

Примечание. При плоском косом изгибе $\vec{f} \perp mn.$



10.2. Изгиб с кручением

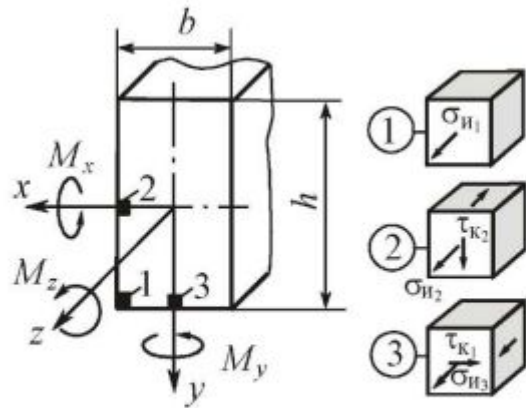
10.2.1. Стержень круглого сечения

Условие прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = M_{\text{ЭКВ}} / W_x \leq [\sigma],$$

$$M_{\text{ЭКВ}} = \begin{cases} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} & \text{— по 3-й гипотезе прочности,} \\ \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2} & \text{— по 4-й гипотезе прочности.} \end{cases}$$

10.2.2. Стержень прямоугольного сечения



$$\sigma_{\text{ЭКВ}_1} = \sigma_{n_1} = M_x / W_x + M_y / W_y,$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}_2} = \sqrt{\sigma_{n_2}^2 + 4\tau_{k_2}^2},$$

$$\sigma_{n_2} = M_y / W_y, \quad \tau_{k_2} = M_z / (\beta b^3),$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}_3} = \sqrt{\sigma_{n_3}^2 + 4\tau_{k_3}^2},$$

$$\sigma_{n_3} = M_x / W_x, \quad \tau_{k_3} = \gamma \tau_{k_2}.$$

Условие прочности $\max = \{\sigma_{\text{ЭКВ}_1}, \sigma_{\text{ЭКВ}_2}, \sigma_{\text{ЭКВ}_3}\} \leq [\sigma].$

10.3. Внецентренное продольное нагружение

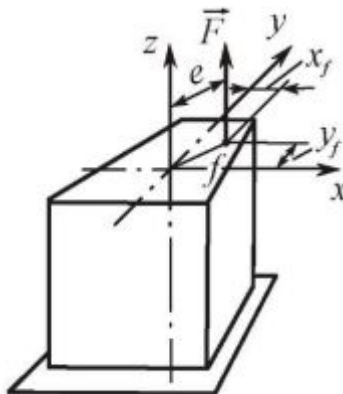
Распределение нормальных напряжений

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_f y}{i_x^2} + \frac{x_f x}{i_y^2} \right).$$

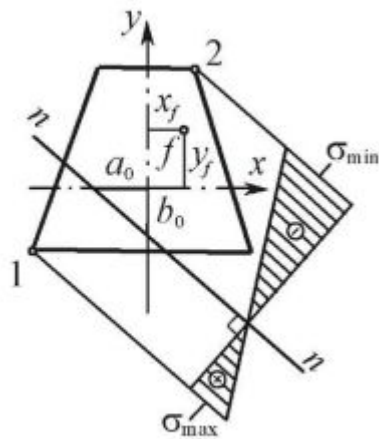
Знак «плюс» соответствует растяжению, «минус» – сжатию.

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат

$$\begin{cases} a_0 = -i_y^2 / x_f, \\ b_0 = -i_x^2 / y_f. \end{cases}$$



Внецентренное сжатие

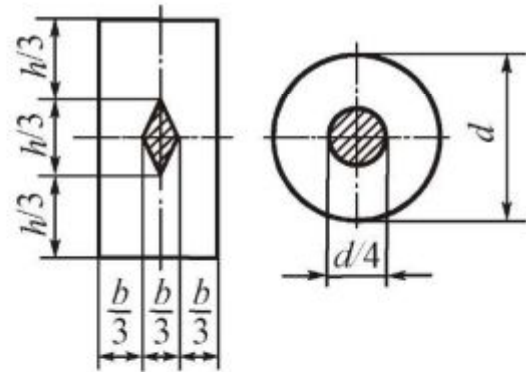


Условия прочности

$$\begin{cases} \sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_f y_1}{i_x^2} + \frac{x_f x_1}{i_y^2} \right) \leq [\sigma_p], \\ \sigma_{\min} = \left| -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_f y_2}{i_x^2} + \frac{x_f x_2}{i_y^2} \right) \right| \leq [\sigma_c]. \end{cases}$$

Ядро сечения

Координаты вершин $\begin{cases} x_{\text{я}} = -i_y^2 / a_0, \\ y_{\text{я}} = -i_x^2 / b_0. \end{cases}$



11. УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

11.1. Продольный изгиб

Формула Эйлера

(стержни большой гибкости, для которых $\sigma_{\text{кр}} \leq \sigma_{\text{пл}}$)

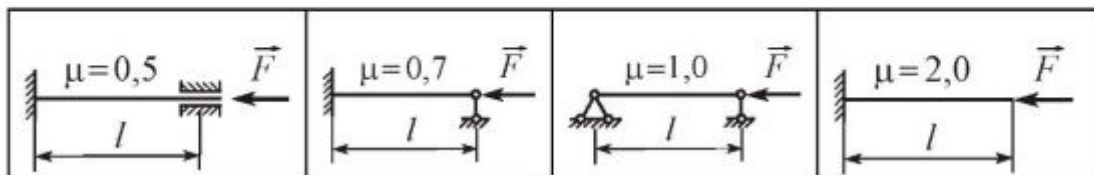
$$F_{\text{кр}} = \pi^2 EI_{\min} / (\mu l)^2 \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{кр}} = \pi^2 E / \lambda^2.$$

Формула Тетмайера-Ясинского

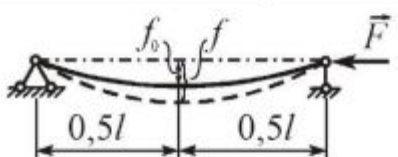
(стержни средней гибкости, для которых $\sigma_{\text{кр}} \geq \sigma_{\text{пл}}$)

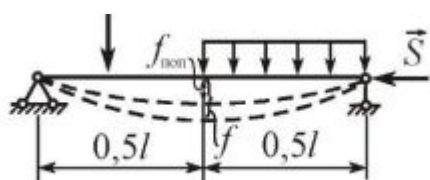
$$F_{\text{кр}} = A(a - b\lambda + c\lambda^2) \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2.$$

Гибкость стержня $\lambda = \mu l / i$, где μ – коэффициент приведения.



Условие устойчивости $n_y = F_{кр} / F \geq [n_y]$ или $F / A \leq \varphi[\sigma_c]$.

Внецентренное нагружение	Учет начального искривления
 $f = (4e / \pi) / (F_{Э} / F - 1)$	 $f = f_0 / (1 - F / F_{Э})$
$F_{Э} = \pi^2 EI / l^2$ – эйлера критическая сила	



11.2. Продольно-поперечный изгиб

Максимальный прогиб

$$f = f_{\text{поп}} / (1 - S / S_{Э})$$

Максимальное напряжение

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{S}{A} + \frac{1}{W_x} \left(M_{\text{поп}} + \frac{S f_{\text{поп}}}{1 - S / S_{Э}} \right), \quad S_{Э} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad \text{– эйлера критическая сила.}$$

Условие прочности

$$\sigma_{\text{рас}} = \frac{S}{A} + \frac{1}{W_x} \left(M_{\text{поп}} + \frac{S f_{\text{поп}} [n]}{1 - [n] S / S_{Э}} \right) \leq [\sigma].$$

Условие жесткости

$$f \leq [f].$$

11.3. Устойчивость труб

Критическая нагрузка

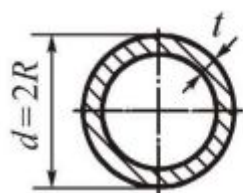
$$p_{кр} = Et^3 / [4(1 - \nu^2)R^3].$$

Для стальных труб ($E = 200 \text{ ГПа}, \nu = 0,3$)

$$p_{кр} = 55(20t / d)^3 \text{ МПа.}$$

Условие устойчивости

$$n_y = p_{кр} / p \geq [n_y].$$

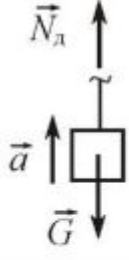
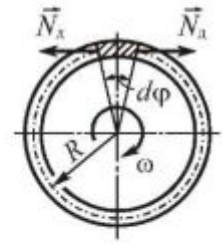


12. ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ

Общие зависимости

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст}, \quad \delta_d = k_d \delta_{ст}$$

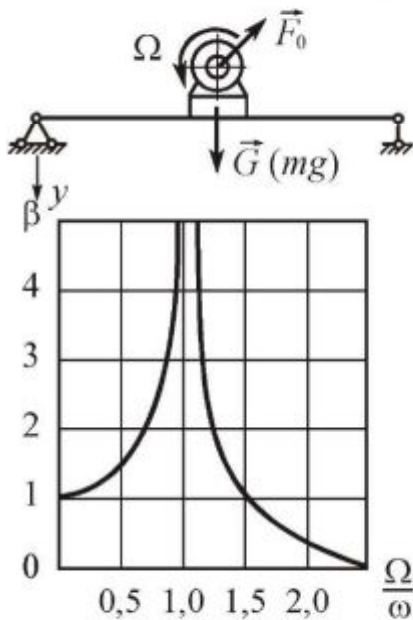
12.1. Учет сил инерции

	<p>Поступательное движение</p> $\sigma_d = k_d \sigma_{ст}$ $k_d = 1 + a/g,$ $\sigma_{ст} = G/A$	<p>Равномерно вращающееся тонкое кольцо</p> $\sigma_d = \rho \omega^2 R^2 = \rho v^2$ 
---	--	---

12.2. Действие удара на конструкцию

	<p>Продольный удар</p> $\Delta_{ст} = GI/(EA)$ $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}$	<p>Удар в канатах при заедании троса</p> $k_d = 1 + \frac{v_0}{g \Delta_{ст}}$ 
		<p>Поперечный удар</p>  $k_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/f_{ст}}$

12.3. Колебания упругих систем с одной степенью свободы



Уравнение колебаний упругой системы (неустановившееся движение)

$$y = \underbrace{a \sin(\omega t + \varphi)}_{\text{(собственные колебания)}} + \underbrace{A \sin \Omega t}_{\text{(вынужденные)}}$$

происходящих под действием возмущающей силы $F_{воз} = F_0 \sin \Omega t$, где F_0 – центробежная сила инерции неуравновешенных масс ротора. Частота собственных колебаний упругой системы $\omega = \sqrt{c/m} = \sqrt{g/\delta_{ст}} = 1/\sqrt{m\delta_{ст}}$.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = (F_0/c)\beta,$$

$$\beta = \left| \frac{1}{1 - (\Omega/\omega)^2} \right| \quad \text{– коэффициент нараста- ния колебаний.}$$

Динамический коэффициент $k_d = 1 + (F_0/G)\beta$.

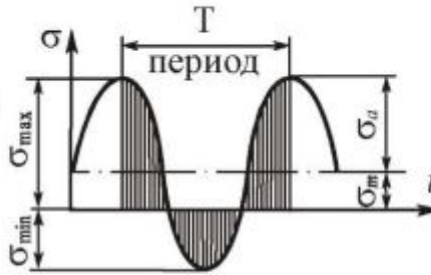
13. ПЕРЕМЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Параметры цикла:

$$\sigma_{\max}, R_{\sigma} = \sigma_{\min} / \sigma_{\max},$$

$$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2,$$

$$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2.$$



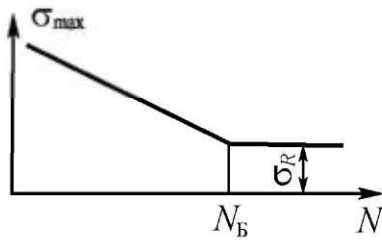
Характерные

циклы:

- симметричный



- пульсационный



Предел выносливости $\sigma_R(\tau_R)$ – наибольшее напряжение цикла, которое образец может выдержать, не разрушаясь, до базы испытания N_B , равной 10^7 циклов для стали и $(5...10)10^7$ для цветных металлов.

Эмпирические соотношения для $\sigma_R(\tau_R)$:

$$\sigma_{-1} \approx (0,25...0,5)\sigma_{\text{пч}}; \quad \sigma_{-1p} \approx 0,75\sigma_{-1}; \quad \tau_{-1} \approx (0,6...0,8)\sigma_{-1}.$$

Факторы, влияющие на величину предела выносливости:

1) абсолютные размеры поперечного сечения (масштабный фактор)

$$K_{d\sigma} = \sigma_{-1d} / \sigma_{-1};$$

2) концентрация напряжений $K_{\sigma} = \sigma_{-1} / \sigma_{-1K};$

3) качество обработки поверхности $K_F = \sigma_{-1F} / \sigma_{-1};$

4) поверхностное упрочнение $K_v = \sigma_{-1y} / \sigma_{-1};$

5) асимметрия цикла (коэффициенты чувствительности ψ_{σ} и ψ_{τ});

6) эксплуатационные факторы (коррозия, температура и др.).

Коэффициент снижения предела выносливости

$$K = \left(\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_F} - 1 \right) / K_v.$$

$$\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} = \frac{2\alpha_{\sigma}}{1 + (88,3\bar{G}/L)^{\psi_{\sigma}}}.$$

Запас прочности определяется:

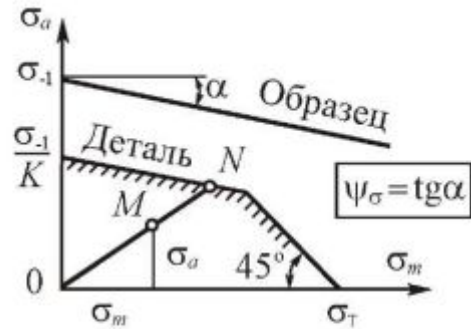
- по формуле Серенсена - Кинашовили
(при простых видах деформации)

$$n_{\sigma} = ON / OM = \sigma_{-1} / (K\sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m),$$

$$n_{\tau} = \tau_{-1} / (K\tau_a + \psi_{\tau}\tau_m);$$

- по формуле Гафа и Полларда
(при плоском напряженном состоянии)

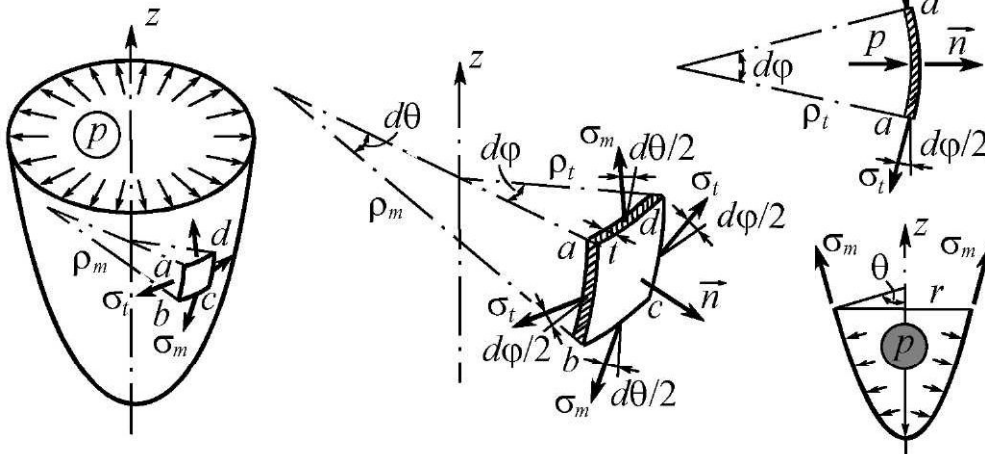
$$n_R = n_{\sigma}n_{\tau} / \sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}.$$



14. ТОНКОСТЕННЫЕ СОСУДЫ

Исходные допущения:

- сосуды имеют форму тела вращения без резких переходов и изломов с тонкой стенкой ($t/d \leq 1/20$);
- нагрузка является осесимметричной.



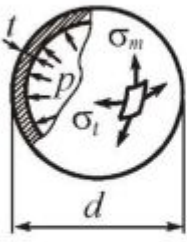
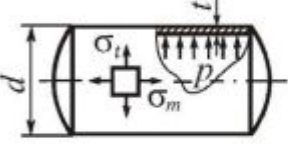
Разрешающие уравнения для определения меридионального σ_m и окружного σ_t напряжений:

- уравнение Лапласа (получается из уравнения равновесия элемента $abcd$ в проекции на нормаль \vec{n})

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{t},$$

- уравнение равновесия части сосуда, отсеченной нормальным коническим сечением, в проекции на ось сосуда z

$$\sigma_m 2\pi r t \sin \Theta = p \pi r^2.$$

Сферический сосуд	Цилиндрический сосуд
 $\sigma_m = \sigma_t = pd / 4t$ $\sigma_r = 0$ $\sigma_{\text{ЭКВ III}} = pd / 4t$	 $\sigma_m = pd / 4t$ $\sigma_r = 0$ $\sigma_t = pd / 2t$ $\sigma_{\text{ЭКВ III}} = pd / 2t$

Условие прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma].$$

15. ТОЛСТОСТЕННЫЕ ТРУБЫ

Допущение: нагрузка осесимметрична и постоянна вдоль оси.

Основные уравнения:

- уравнение равновесия

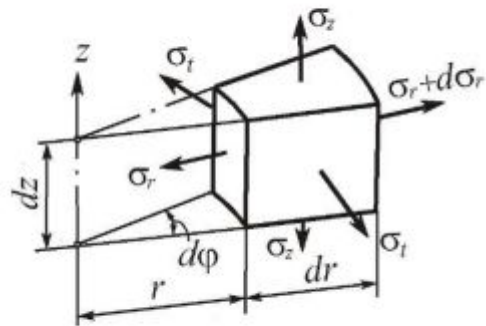
$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r) - \sigma_t = 0,$$

- геометрические

$$\varepsilon_r = du / dr, \quad \varepsilon_t = u / r,$$

- физические (закон Гука)

$$\begin{cases} \varepsilon_r = [\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)] / E, \\ \varepsilon_t = [\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] / E. \end{cases}$$

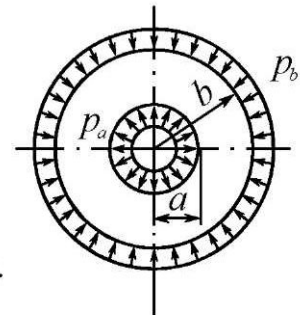


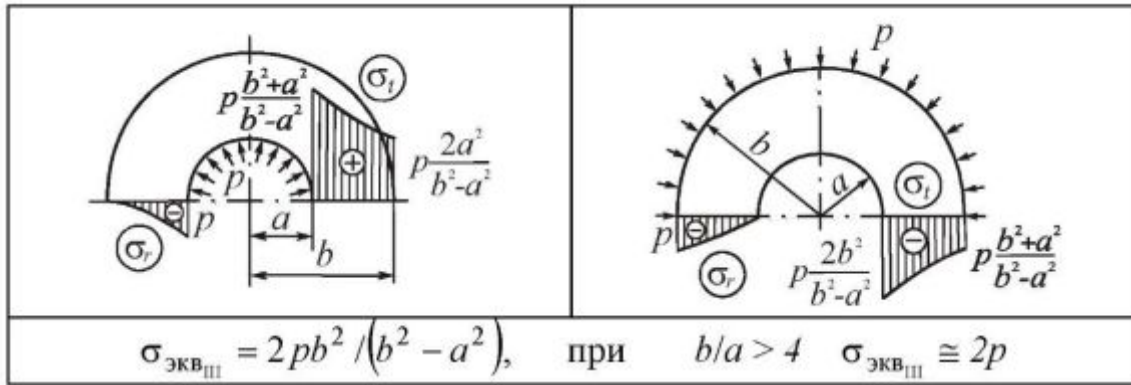
Разрешающие уравнения $\sigma_{r,t} = A \mp B / r^2$, где A и B – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий задачи.

15.1. Труба, нагруженная внутренним и внешним давлением (задача Ламе)

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \mp \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2},$$

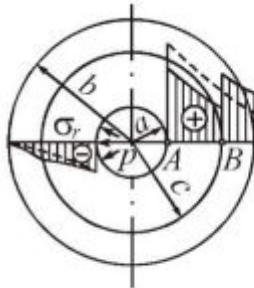
$$u = \frac{1 - \nu}{E} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1 + \nu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} - \frac{\nu}{E} \sigma_z r.$$





15.2. Составные соединенные с натягом цилиндры

Контактное давление



$$p_k = \frac{E\Delta}{2c^3} \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{b^2 - a^2}$$

Оптимальный натяг из условия равнопрочности цилиндров ($\sigma_{\text{эквA}} = \sigma_{\text{эквB}}$)

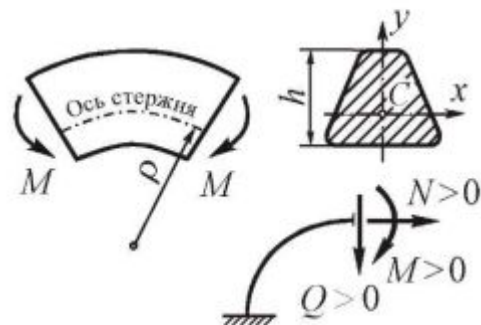
$$\Delta = \frac{2p}{E} \frac{cb^2(c^2 - a^2)}{b^2(c^2 - a^2) + c^2(b^2 - c^2)}$$

Условия Гадолина: $c = \sqrt{ab}$, $\sigma_{\text{экв}}^{\min} = pb / (b - a)$.

16. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ СТЕРЖНИ

Классификация стержней:

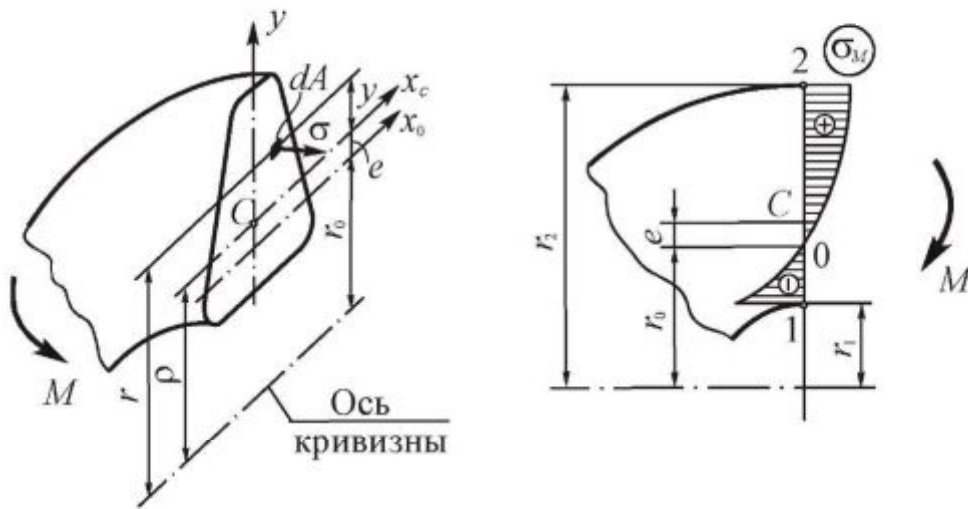
- малой кривизны $h/\rho < 1/5$;
- средней кривизны $1/5 \leq h/\rho \leq 1/2$;
- большой кривизны $h/\rho > 1/2$.



Правило знаков для внутренних силовых факторов:

- для N и Q такое же, как для прямых стержней;

– изгибающий момент считается положительным, если он увеличивает кривизну стержня (вызывает растяжение с выпуклой стороны).



Положение нейтральной линии

$$r_0 = A / \left(\int_A dA / r \right)$$

Приближенная формула Н. Н. Давиденкова (для стержней малой и средней кривизны)

$$e \cong I_{x_c} / (\rho A).$$

Закон распределения нормальных напряжений

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M}{Ae} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right).$$

Условие прочности

$$\sigma_{\text{рас}} \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{\text{рас}} = \max \left\{ \sigma_{\text{рас}1}, \sigma_{\text{рас}2} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\text{рас}1} = \left| \sigma_N + \sigma_{M1} \right|, \\ \sigma_{\text{рас}2} = \left| \sigma_N + \sigma_{M2} \right|, \end{array} \right.$$

$$\sigma_{M1} = (M / Ae) (1 - r_0 / r_1), \quad \sigma_{M2} = (M / Ae) (1 - r_0 / r_2).$$

Примечание. Для сечений, симметричных относительно центральной оси x_c (прямоугольник, круг и т. п.), $\sigma_{\text{рас}1} > \sigma_{\text{рас}2}$, т. е. опасной является внутренняя точка (т. 1).

**РЕКОМЕНДУЕМАЯ
ЛИТЕРАТУРА**

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

У Ч Е Б Н И К И

1. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов: учебник для вузов. – М.: Наука. гл. ред. физ.- мат. лит., 1976. – 608 с.

Книга имеет целью дать не только теоретический материал, но и показать применение полученных результатов на примерах и дать материал для самостоятельной домашней работы. Поэтому каждый раздел сопровождается задачами. По этому учебнику учились многие поколения отечественных инженеров, и до сих пор он остается отличным пособием для самообразования.

2. Бернштейн, С. А. Сопротивление материалов: учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1961. – 464 с.

В небольшой по объему книге изложены все основные вопросы сопротивления материалов. Для облегчения усвоения теоретического материала и привития навыков в решении практических задач детально разобрано около 100 примеров. Каждая глава завершается контрольными вопросами, особенно полезными при самостоятельном изучении предмета.

3. Биргер, И. А., Мавлютов, Р. Р. Сопротивление материалов: учебник для вузов. – М.: Изд-во МАИ, 1994. – 512 с.

Учебник отличается оригинальным изложением курса сопротивления материалов, который дополнен элементами теории упругости, пластичности и разрушения. Представлены современные методы расчета на прочность элементов конструкций, в частности метод конечных элементов.

4. Дарков, А. В., Шпиро, Г. С. Сопротивление материалов: учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1975. – 675 с.

Учебник предназначен для студентов заочной и вечерней форм обучения. Он отличается полнотой изложения основных положений

курса и изобилует большим числом примеров, что делает его ценным руководством для самообразования.

5. Заславский, Б. В. Краткий курс сопротивления материалов – М.: Машиностроение, 1986. – 328 с.

Дано наиболее полное изложение курса при сравнительно небольшом объеме учебника. Краткость изложения достигается за счет тщательного отбора материала и удачного построения книги.

6. Ицкович, Г. М. Сопротивление материалов: учебник для учащихся машиностроит. техникумов. – 7-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1986. – 352 с.

В учебнике наряду с теоретическим материалом имеется более ста подробно разобранных примеров решения задач. Таким образом, учебник одновременно является руководством к решению задач и дает возможность самостоятельного изучения предмета по учебнику без помощи преподавателя.

7. Кинасошвили, Р. С. Сопротивление материалов: Краткий учебник. – 11-е изд. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 384 с.

В книге разобрано много примеров для облегчения усвоения теоретического материала и привития навыков в решении практических задач. Каждая глава заканчивается контрольными вопросами, особенно полезными для лиц, самостоятельно изучающих предмет.

Автору удалось в сжатой и ясной форме изложить материал, соответствующий программам немашиностроительных высших технических учебных заведений и техникумов всех специальностей.

8. Пешль, Т. Сопротивление материалов. – М.: ГТТИ, 1948. – 380 с.

Учебник отличается оригинальной формой изложения, благодаря которой в небольшой по объему книге удалось дать все наиболее важные в научном и методическом отношении сведения из курса сопротивления материалов, исключив при этом несущественные подробности.

9. Сопротивление материалов / под ред. А. Ф. Смирнова: учебник для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1975. – 480 с.

Учебник построен так, что при изучении курса по программам различных специальностей отдельные главы и параграфы без ущерба могут быть опущены.

Предназначено в качестве учебника для студентов строительных и транспортных специальностей вузов.

10. Сопротивление материалов / под ред. акад. АН УССР Г. С. Писаренко. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1986. – 775 с.

В учебнике освещены основные вопросы сопротивления материалов, отражающие современный уровень науки и техники. Учебник отличается наличием большого количества детально разобранных примеров.

11. Степин, П. А. Сопротивление материалов: учебник для машиностроит. спец. вузов. – 8-е изд. – М.: Высш. шк., 1988. – 367 с.

В учебнике изложены основы сопротивления материалов в соответствии с программой курса в объеме 80-120 часов. Обозначения приняты в соответствии с международными рекомендациями ИСО.

12. Терегулов, И. Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности: учебник для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1984. – 472 с.

В учебнике освещены основы механики деформируемого твердого тела с изложением методов расчета на прочность прямолинейных и искривленных брусьев, тонкостенных стержней, пластин и оболочек; приведены решения плоских задач механики деформируемого твердого тела. Материал изложен в удобной для усвоения форме и освещает современное состояние этой области знания. Упор делается на изучение фундаментальных, непреходящих положений, и об-

ращается существенное внимание на физику и механику рассматриваемых явлений.

Книга написана как учебник для строительных специальностей вузов, в учебных планах и программах которых предусмотрено совместное изложение разделов сопротивления материалов и основ теории упругости и пластичности.

13. Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов. Том 1. Элементарная теория и задачи. Том 2. Более сложные вопросы теории и задачи. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 363 с.

Учебник выдающегося ученого и педагога Степана Прокофьевича Тимошенко, внесшего огромный вклад в науку о сопротивлении материалов. Учебник является образцом классического изложения науки о прочности. Им пользуются уже много поколений студентов и инженеров.

14. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов: учебник для вузов. – 9-е изд., перераб. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 2001. – 512 с.

Книга соответствует традиционной программе машиностроительных вузов. Излагаются следующие разделы курса сопротивления материалов: растяжение, кручение, изгиб, статически неопределимые системы, теория напряженного состояния, теория прочности, толстостенные трубы и тонкостенные оболочки, прочность при переменных напряжениях, расчеты при пластических деформациях, устойчивость и методы испытаний. Даются элементарные сведения по композиционным материалам.

15. Филоненко-Бородич, М. М., Изюмов, С. М., Олисов, Б. А., и др. Курс сопротивления материалов: учебник для вузов. Часть 1. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961. – 656 с; Часть II, М.: Гостехиздат, 1956. – 539 с.

Учебник для вузов, в которых сопротивление материалов изучается по полной программе. Книгу в целом отличает глубоко продуманная структура.

манная последовательность изложения от частного к общему и разумное повторение материала, позволяющее глубже вникнуть в существо вопроса. В первой части дается традиционный курс сопротивления материалов в элементарном изложении. Во второй части приводятся дополнения по некоторым вопросам, рассмотренным в первой части, а также рассматриваются задачи, требующие применения методов теории упругости. Таковы, например, задачи о кручении стержней, о местных напряжениях, об изгибе пластинок, о кручении тонкостенных стержней. Для возможности более обоснованной трактовки таких задач в книгу включен раздел, посвященный основным уравнениям теории упругости и некоторым наиболее простым задачам этой науки.

УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОМУ КУРСУ

16. Барданов, Ю. М. Курс сопротивления материалов в структурно-логических схемах: учебное пособие. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1980. – 38 с.

В пособии рассмотрены узловые вопросы курса сопротивления материалов с использованием обучающих структурно-логических схем. Теоретический материал изложен в наглядной компактной форме.

17. Долинский, Ф. В., Михайлов, М. Н. Краткий курс сопротивления материалов: учебное пособие для машиностроительных вузов. – М.: Высш. шк., 1988. – 432 с.

В пособии освещены основные теоретические вопросы. Большое внимание уделено подробному разбору примеров решения задач, что дает возможность самостоятельно освоить методы и приемы решения прочностных задач.

18. Работнов, Ю. Н. Сопротивление материалов. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1963. – 455 с.

Учебное пособие для университетов. Большое внимание уделено физическим основам прочности, основам теории пластичности, теории предельного равновесия.

19. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 744 с.

Книга представляет собой объединение элементов сопротивления материалов, теории упругости, теории пластичности, теории ползучести, вязкоупругости и механики разрушения. При изложении материала акцент делается на связь между физическими и механическими теориями.

Книга предназначена для студентов университетов в качестве учебного пособия, а также для инженеров и специалистов в области механики деформируемого твердого тела.

20. Тимошенко, С. П., Гере, Дж. Механика материалов. – М.: Мир, 1976. – 669 с.

Книга содержит энциклопедически полное изложение методов расчета на прочность и устойчивость. В ней представлено исследование напряженно-деформированного состояния стержневых систем при самых различных условиях погружения. Изложение сопровождается хорошо продуманными примерами, наглядными графиками, обстоятельными историческими комментариями. Широта охвата тематики и обилие конкретного фактического материала позволяют использовать книгу в качестве справочника и делают ее ценным учебным пособием.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ТРУДЫ ПО РАСЧЕТАМ НА ПРОЧНОСТЬ

21. Пономарев, С. Д., Бидерман, В. Л., Лихарев, К. К., и др. Расчеты на прочность в машиностроении. – М.: Машгиз. Т.1, 1956. – 884 с; Т.2, 1958. – 975 с; Т.3, 1959. – 1118с.

Фундаментальный труд по расчетам на прочность, за который авторы были удостоены Ленинской премии.

Авторам книги удалось изложить в удобной для практического применения форме современные методы расчета на прочность, жесткость, ползучесть, устойчивость и вибрацию применительно к все возрастающим запросам отечественного машиностроения.

Первый том включает два раздела: "Теоретические основы расчетов на прочность и экспериментальные методы исследования

напряжений и деформаций " и *"Расчеты на прочность и жесткость стержневых элементов конструкций при статической нагрузке "*.

Второй том посвящен расчетам пластин и оболочек, контакт-ным напряжениям, пластичности и ползучести.

В третьем томе рассматриваются расчеты на прочность движущихся элементов конструкций, теория колебаний элементов конструкций и ее технические приложения, а также методы расчета на устойчивость.

Книга построена так, что любую тему можно изучить самостоятельно, без необходимости проработки всего труда в целом. В конце каждой главы приведена литература по излагаемому вопросу.

Книга предназначена для инженеров-конструкторов и производственников, работающих в области машиностроения и связанных с вопросами прочности. Она также может быть использована студентами, аспирантами и научными работниками.

22. Филин, А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. – М.: Наука. Т.1, 1975. – 832 с; Т. 2, 1978. – 616 с; Т.3, 1981. – 480 с.

Книга является фундаментальной как по объему, так и по кругу рассматриваемых вопросов. Цель автора – научить будущего инженера рассчитывать на прочность сложные сооружения, начиная с выбора расчетной схемы и кончая правильной оценкой результатов расчета.

В первом томе содержится информация, составляющая фундамент механики твердого деформируемого тела. Подробно обсуждаются свойства конструкционных материалов, анализ напряженно-деформированного состояния в точке сплошной среды и физические уравнения в реологическом аспекте. Уделено значительное внимание проблеме предельного состояния материала в локальной области. Завершается книга изложением основ теории упругости и теорий пластичности и ползучести.

Во втором томе излагается деформация стержней (кручение, изгиб, сложное сопротивление, стесненная деформация тонкостенных стержней), энергетические основы механики твердого деформируемого тела и элементы строительной механики.

В третьем томе излагаются вопросы динамики и устойчивости деформируемых систем.

Книга предназначена для студентов вузов, аспирантов, научных работников и инженеров, занимающихся проблемой прочности в различных областях техники (строительство, машиностроение, судостроение, самолетостроение и др.).

ЗАДАЧНИКИ

23. Гафаров, Р. Х. Сборник задач по сопротивлению материалов: Для организации индивидуальной самостоятельной работы студентов. – Уфа: УГАТУ, 1993. – 180 с.

Сборник охватывает все разделы базового курса сопротивления материалов. Содержит свыше 600 оригинальных задач для организации индивидуальной самостоятельной работы студентов с учетом разной степени их подготовленности. Имеются как простые задачи, доступные всем студентам, так и сложные проблемы-исследования, ориентированные на хорошо подготовленных студентов и предназначенные для самостоятельных научных разработок.

24. Гафаров, Р. Х. Ситуационные задачи: Методическая разработка по организации и проведению тематических ситуационных игр по курсу сопротивления материалов. – Уфа: УАИ, 1992. – 65 с.

Представлены задачи, позволяющие внедрить в учебный процесс активные методы обучения в форме тематических ситуационных игр. Учитывая разную подготовленность студентов, предлагаемые задачи разбиты по сложности на три категории: от простейших, доступных всем студентам, до сложных проблем, построенных по типу небольшого исследования и предназначенных для хорошо подготовленных студентов. В приложении даются главнейшие формулы и справочные данные по курсу сопротивления материалов. Предназначены для студентов всех специальностей.

25. Винокуров, А. И. Сборник задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие для учащихся машиностр. спец. техникумов. – М.: Высш. шк., 1990. – 383 с.

Сборник содержит около 400 задач. Включены многовариантные задачи для контрольных и домашних расчетно-графических работ.

Приведены методические указания и примеры решения типовых задач с пояснениями.

26. Лихарев, К. К., Сухова, Н. А. Сборник задач по курсу "Сопротивление материалов". – М.: Машиностроение, 1980. – 224 с.

Сборник является пособием для изучения теоретического материала, изложенного в учебнике В. И. Феодосьева "Сопротивление материалов". Наряду с классическими задачами включены оригинальные задачи и примеры, тесно связанные с практикой машиностроения.

27. Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие для вузов / под редакцией А. В. Александрова. – М.: Стройиздат, 1977. – 335 с.

Даны методические указания по решению типовых задач, включены задачи повышенной трудности, в большинстве задач учтены особенности расчета по предельным состояниям. Предназначен для студентов строительных специальностей.

28. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. А. С. Вольмира. – М.: Наука. глав. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 408 с.

Сборник охватывает все разделы курса сопротивления материалов, предусмотренные программой. Приведены задачи, решаемые численными методами с применением ЭВМ. Имеются задачи повышенной трудности, к которым даны подробные решения. Книга может служить пособием для самостоятельных студенческих научных разработок. Предназначена для студентов машиностроительных,

строительных, авиационных, судостроительных и транспортных специальностей.

29. Сборник задач по сопротивлению материалов / под редакцией В. К. Качурина. – М: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 432 с.

В сборнике представлены задачи на все основные разделы курса сопротивления материалов: растяжение-сжатие, сложное напряженное состояние и теории прочности, сдвиг и смятие, кручение, изгиб, сложное сопротивление, кривые стержни, устойчивость элементов конструкций, методы расчета по допускаемым нагрузкам и по предельным состояниям, динамическое и длительное действие нагрузок. Общее количество задач около 900. Некоторые задачи снабжены решениями или указаниями.

30. Феодосьев, В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов: учебное пособие для втузов. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 400 с.

В книге рассматриваются задачи, выходящие в большей части за рамки традиционных требований институтского курса как по сложности, так и по постановке. Собраны примеры повышенной трудности, расширяющие кругозор читателя и позволяющие ему увидеть связь курса сопротивления материалов с некоторыми смежными дисциплинами. Все задачи сопровождаются подробными решениями.

ПОСОБИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

31. Гафаров, Р. Х. Руководство к практическим занятиям по сопротивлению материалов. – Уфа: УГАТУ, разд. 1, 1993. – 32 с; разд. 2, 1993. – 32 с; разд. 3, 1993. – 32 с; разд. 4, 1994. – 32 с; разд. 5, 1994. – 36 с; разд. 6, 1994. – 56 с.

Содержит большое число характерных типовых задач с подробными решениями, которым предшествует краткое изложение основных положений и окончательных результатов теории.

В первом разделе рассмотрены эпюры внутренних силовых факторов и растяжение-сжатие прямолинейного стержня; во втором – теория напряженного состояния, включая гипотезы прочности, кручение круглых валов, геометрические характеристики поперечных сечений; в третьем – плоский прямой изгиб; в четвертом – статически неопределимые системы и сложное сопротивление; в пятом – устойчивость деформируемых систем, динамическое нагружение, тонкостенные сосуды; в шестом – плоские кривые стержни, толстостенные трубы и переменные напряжения.

32. Ободовский, Б. А., Ханин, С. Е. Сопротивление материалов в примерах и задачах. – Харьков: Вища школа, 1981. – 344 с.

На большом количестве примеров показаны приемы и методы решения типовых задач курса. Приведены основные расчетные формулы и краткие указания по методике расчетов.

33. Пособие по решению задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие для техн. вузов / И. Н. Миролюбов, С. А. Енгальчев, Н. Д. Сергиевский и др. – 5-е изд., перераб. и доп.– М.: Высш. шк., 1985. – 399 с.

В учебное пособие включены основные положения теории, необходимые методические указания, примеры решения типовых задач, карты безмашинного программированного контроля, задачи для самостоятельного решения, ответы к ним, а также справочный материал.

34. Рубинин, М. В. Руководство к практическим занятиям по сопротивлению материалов. – М.: Росвузиздат, 1963.

В пособии даются краткие сведения из теории, методические указания к решению типовых задач с подробным разбором примеров.

35. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов / Г.М. Ицкович – М.: Высш. шк., 1970. – 544 с.

На подробно разобранных примерах показаны методы решения типовых задач по курсу сопротивления материалов.

СПРАВОЧНИКИ

36. Гафаров, Р. Х., Шарафиев, Р. Г., Ризванов, Р. Г. Краткий справочник инженера-механика. – Уфа: УГНТУ, 1995. – 112 с.

В справочнике приведены основные формулы и справочные данные, относящиеся к расчетам на прочность типовых элементов конструкций.

37. Рудицын, М. Н. Справочное пособие по сопротивлению материалов. – Минск: Вышэйша школа, 1970. – 628 с.

В пособии отражены все разделы курса сопротивления материалов. Теоретический материал дополнен справочными и расчетными таблицами.

38. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев; отв. ред. Г. С. Писаренко – 2-е изд. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736 с.

В справочнике приведены теоретические сведения по основным вопросам курса, а также необходимые данные по расчету типовых элементов конструкций.

39. Справочник по сопротивлению материалов / С. П. Фесик – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Будивельник, 1982. – 280 с.

В справочнике изложены основные сведения по всем вопросам сопротивления материалов в аспекте задач инженера-строителя. Расчетные формулы даны без выводов, но с необходимыми пояснениями, облегчающими их практическое применение. Значительное место отведено графикам, справочным и расчетным таблицам, иллюстрационным примерам расчета.

ПОЛЕЗНО ПРОЧИТАТЬ

40. Бернштейн, С. А. Очерки по строительной механике. – М.: Госстройиздат, 1958.

Книга представлена четырьмя очерками и в увлекательной форме излагает историю развития современных методов расчета сооружений на прочность. Отмечаются выдающиеся работы Л. Эйлера, И. П. Кулибина, Х. С. Головина, Г. Е. Паукера.

41. Вайнберг, Д. В., Писаренко, Г. С. Механические колебания и их роль в технике. – М: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. – 276 с.

Книга не является учебником: в ней не дается систематическое изложение теории колебаний и совершенно не излагается математический аппарат этой теории. Цель книги – познакомить широкий круг читателей с той ролью, которую играют механические колебания в разнообразных отраслях техники. Поэтому в ней обращено основное внимание на описание физического содержания наиболее интересных и важных явлений из области механических колебаний, на освещение их технической роли и значение для народного хозяйства. Авторы стремились собрать в книге и систематизировать наиболее интересный с этой точки зрения материал, накопившийся в нашей богатой технической литературе.

42. Гордон, Дж. Почему мы не проваливаемся сквозь пол / Пер. с англ. С. Т. Милейко. Предислов. акад. Ю. Н. Работнова. – М.: Мир, 1971. – 272 с.

Автор книги профессор университета в Рединге (Великобритания), живо и с юмором рассказывает о прочности материалов и конструкций. Книга написана совершенно популярно, для самого широкого круга читателей, но ее прочтут с интересом и специалисты.

43. Гордон, Дж. Конструкции, или почему не ломаются вещи / пер. с англ. В. Д. Эфроса. – М.: Мир, 1980. – 390 с.

В живой и увлекательной форме рассказывается о встречающихся в природе и созданных руками человека конструкциях, их прочности, устойчивости и надежности.

44. Зацаринный, В. П., Акопов, А. И. Атланты держат небо. – М.: Знание, 1979. – 176 с.

В книге в популярной форме представлены основные моменты развития человеческого знания в области науки о прочности. Здесь рассказано о первых интуитивных представлениях людей о прочности, накоплении ими опытного знания, что впоследствии привело к формированию и развитию сопротивления материалов, теорий упругости и пластичности, механики разрушения. Книга рассчитана на широкий круг читателей.

45. Кацев, В. П., Хазановский, П. М. Стихиям не подвластен. – М.: Знание, 1980.

Авторы на многочисленных примерах из истории науки и техники рассказывают о становлении теории надежности, гарантирующей человека от всевозможных аварий и катастроф.

46. Оксанович, Л. Невидимый конфликт / пер. с болг. А. Н. Елютиной; под ред. Ю. М. Веллера. – М.: Стройиздат, 1986. – 164 с.

В научно-популярной форме рассказывается об угрозе, которую представляют землетрясения и ураганы, о свойствах материалов и их способности выдерживать значительные нагрузки, о деформации железобетонных элементов, о коэффициенте надежности.

47. Партон, В. З. Механика разрушения: От теории к практике. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 240 с.

В доступной популярной форме изложены современные представления о механике разрушения – новом разделе механики твердого деформируемого тела, возникшем совсем недавно. Содержанием книги охвачен широкий круг вопросов, включающих в себя выяснение причин некоторых серьезных катастроф ответственных конструкций и сооружений, необходимость и своевременность построения теории

распространения магистральных трещин, внедрение механики разрушения в практику расчетов сосудов давления, ядерных реакторов, роторов турбин и т.п.

48. Попов, А. Н., Шимко, В. Т. Польза, прочность, красота: Рассказы о строительной науке. – М.: Педагогика, 1979. – 128 с.

В книге рассказывается о современной строительной науке, позволяющей совместить три противоречивых требования (прочность, красоту и экономичность) в процессе проектирования новых сооружений. Новые материалы, новые конструкции, наконец, новые принципы строительного искусства – таков путь к повышению качества, эффективности строительства.

49. Тимошенко, С. П. История науки о сопротивлении материалов. – М.: Гостехиздат, 1957. – 536 с.

В книге дан анализ развития науки о сопротивлении материалов и методов расчета инженерных сооружений в период от XVII века до первой половины XX века. Большое внимание уделено работам отечественных ученых Д. И. Журавского, Ф. С. Ясинского, Б. Г. Галеркина и др.

50. Финкель, В. М. Портрет трещины. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Metallургия, 1989. – 192 с.

В чем причина катастроф и разрушений, происходящих в мире прочнейших материалов? Как ведет себя микроскопическая трещинка, откуда у нее такая сила и такое коварство? Как человек учится управлять этой страшной силой и обращать ее себе на пользу? На эти и многие другие вопросы отвечает автор. Непринужденная форма изложения, поэтические примеры, подтверждающие мысль автора, делают книгу интересной и познавательной. Книга предназначена для широкого круга читателей.

БАНК

ДИАГРАММ РАСТЯЖЕНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Сталь 10
(нормализация)

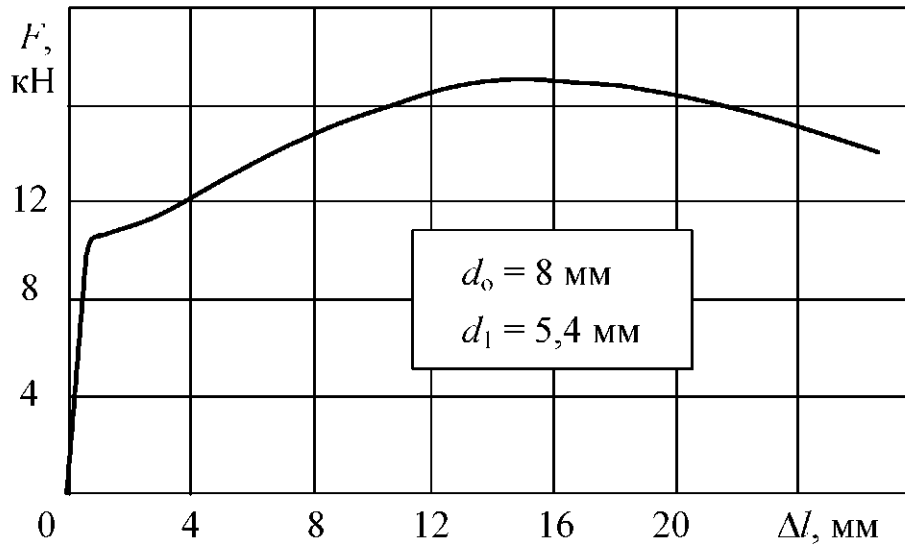


Рис. 1

Сталь 10
(цементация и закалка с охлаждением в воде)

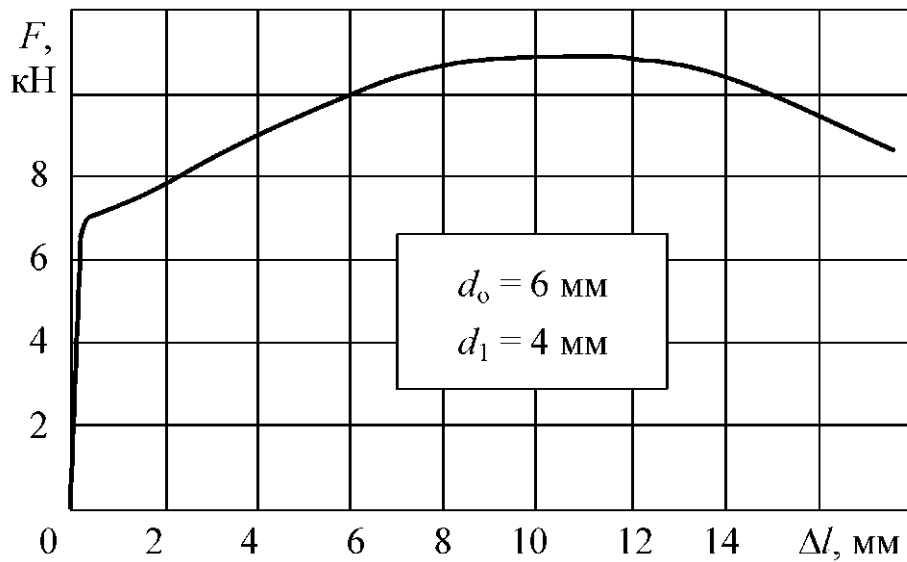


Рис. 2

Сталь 20
(нормализация)

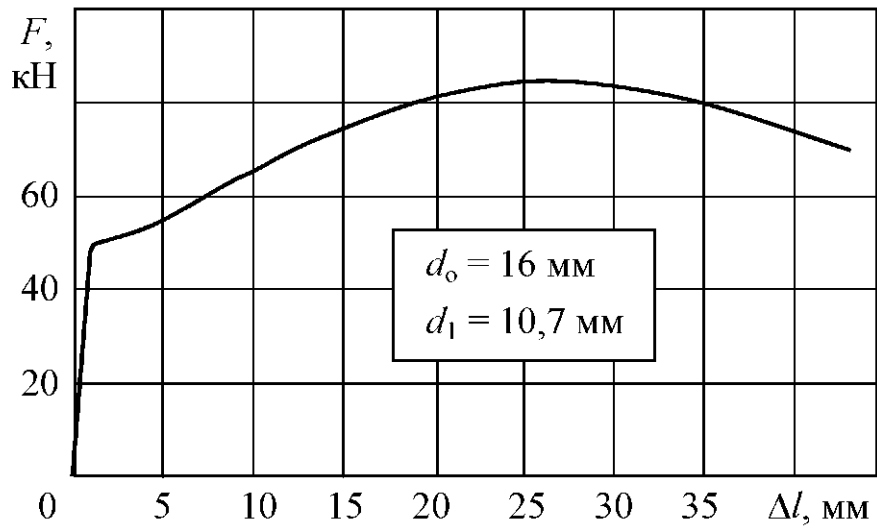


Рис. 3

Сталь 20
(цементация и закалка с охлаждением в воде)

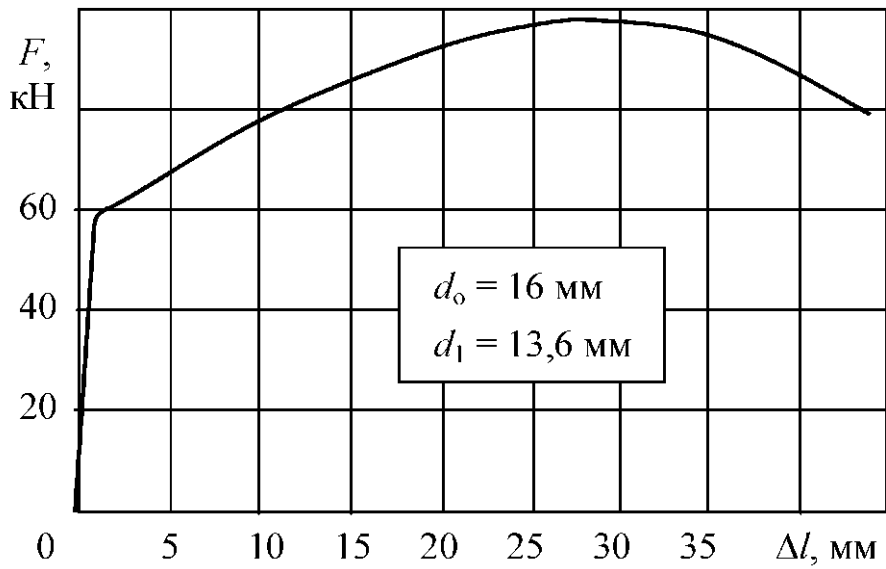


Рис. 4

Сталь 30
(нормализация)

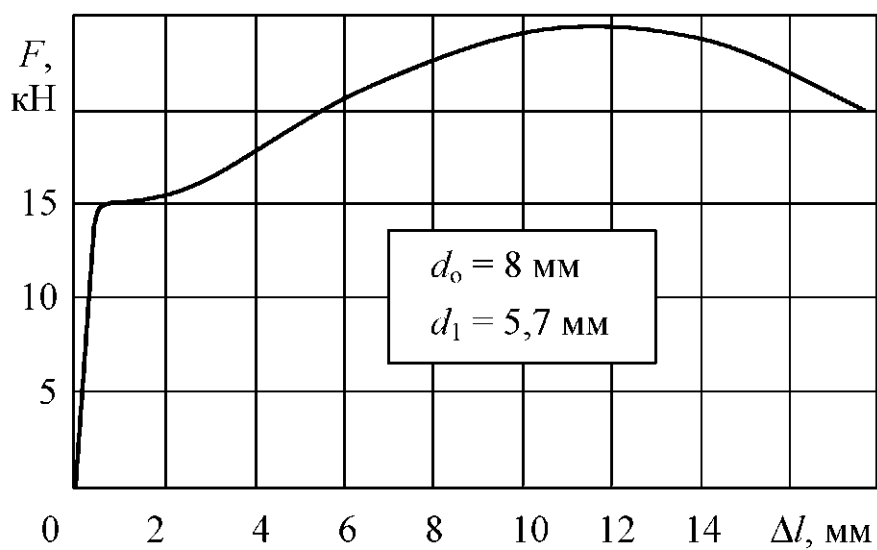


Рис. 5

Сталь 30
(улучшение)

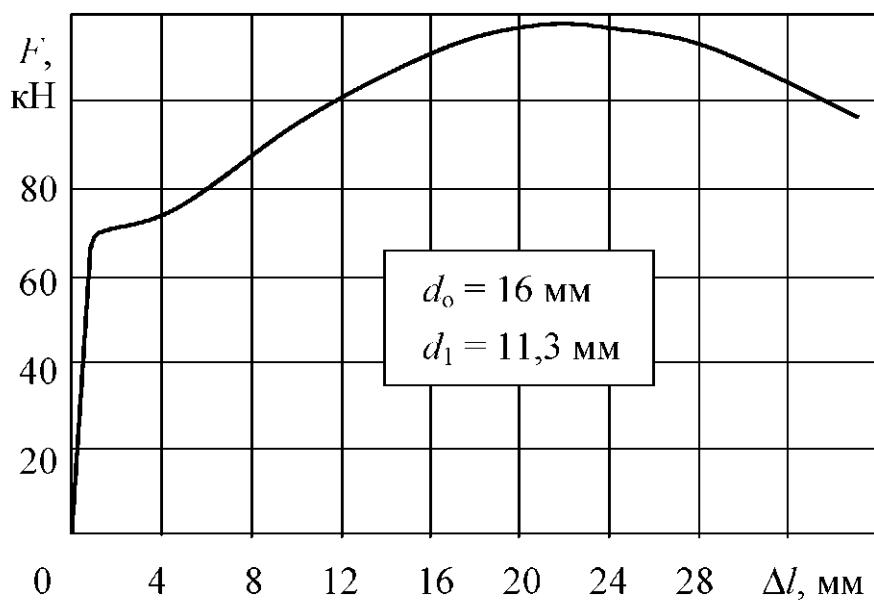


Рис. 6

Сталь 35
(нормализация)

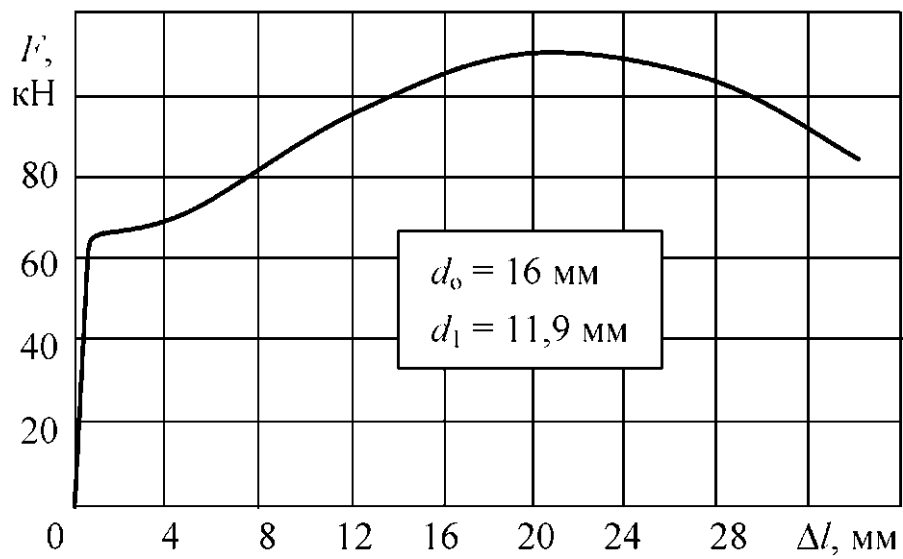


Рис. 7

Сталь 35
(закалка с охлаждением в воде)

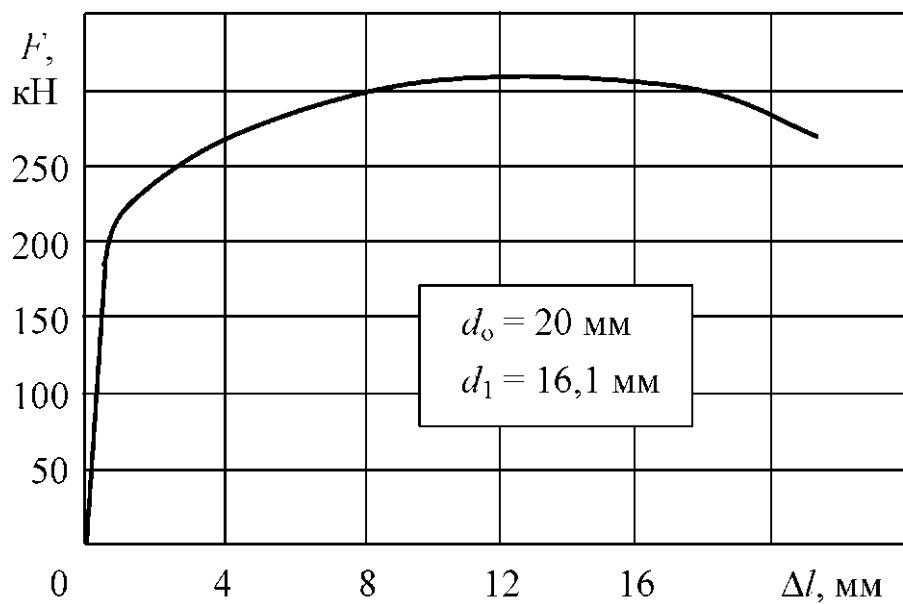


Рис. 8

Сталь 40
(нормализация)

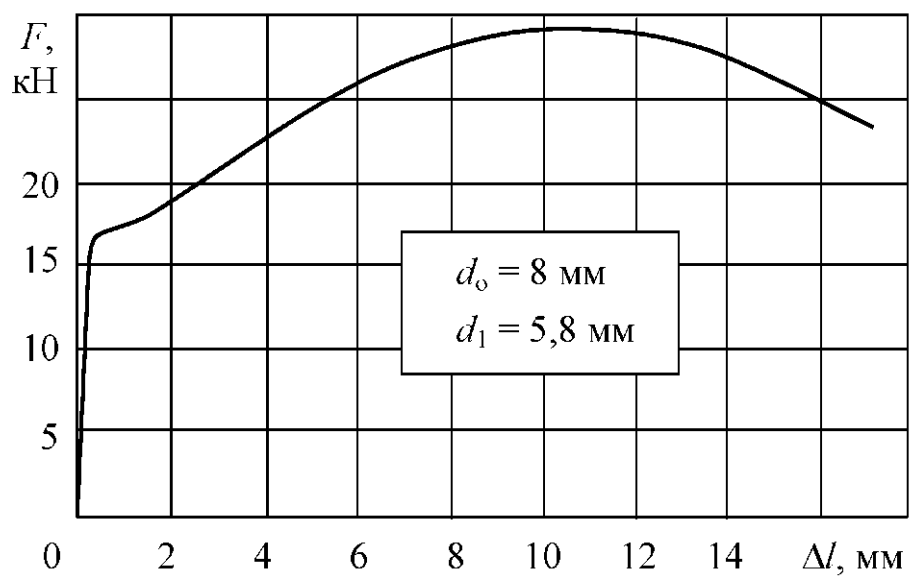


Рис. 9

Сталь 40
(улучшение)

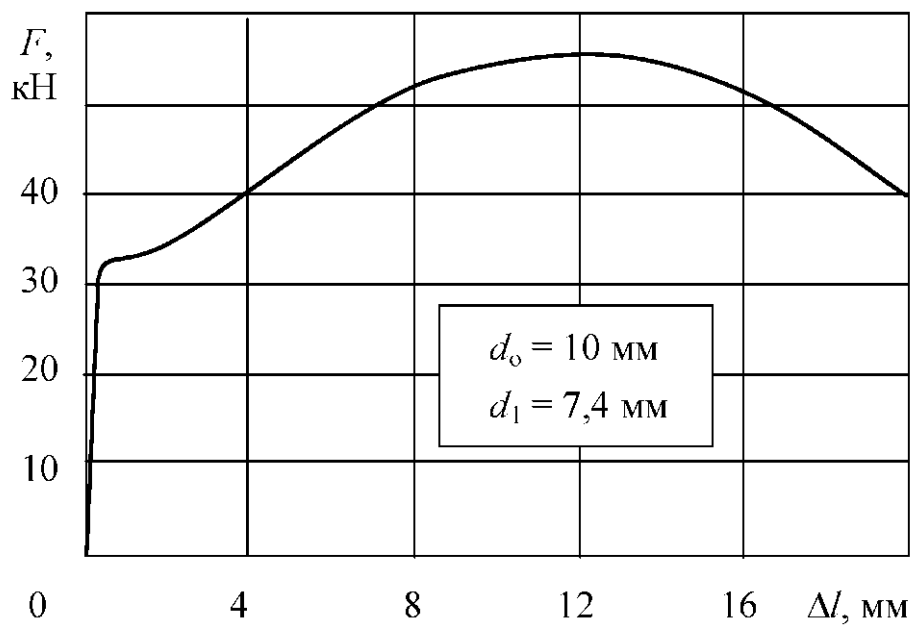


Рис. 10

Сталь 45
(закалка с нагревом т.в.ч.)

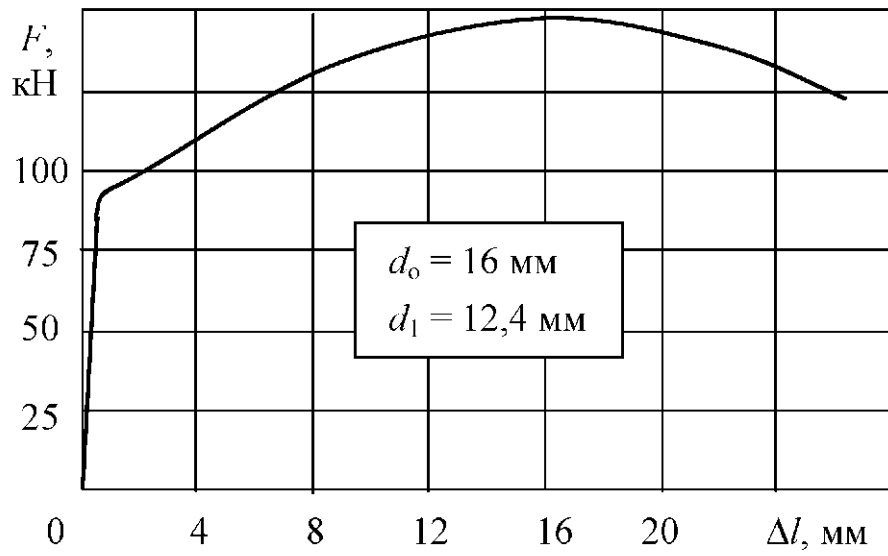


Рис. 11

Сталь 45
(закалка с охлаждением в масле)

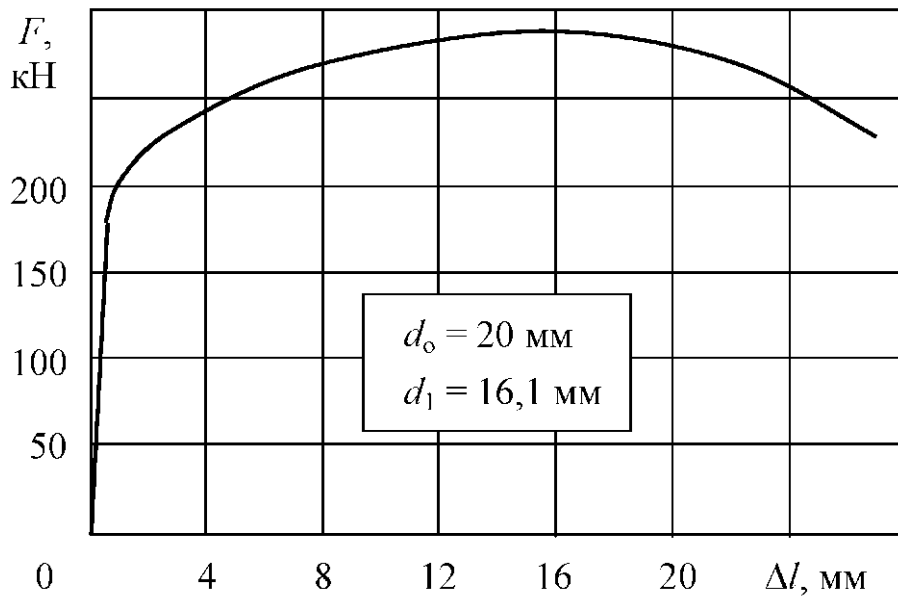


Рис. 12

Сталь 30Г
(нормализация)

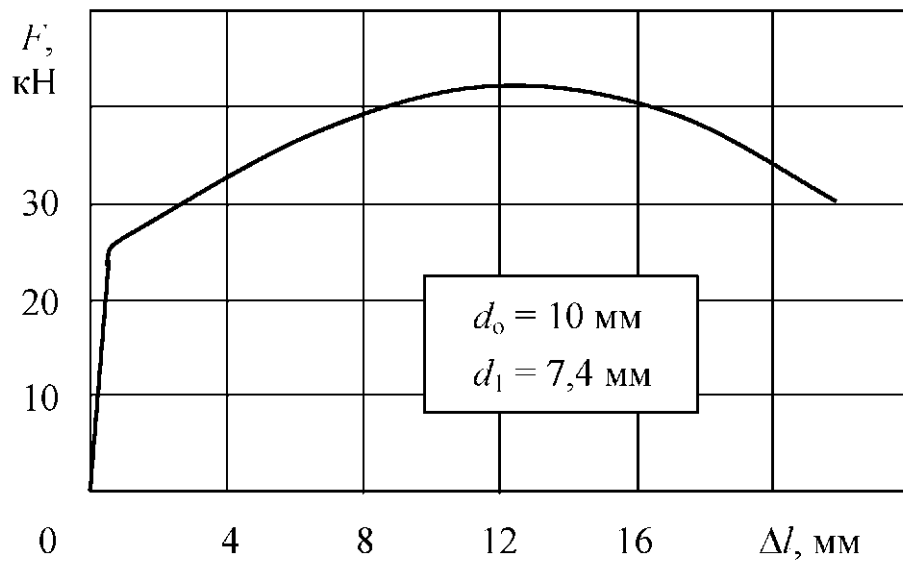


Рис. 13

Сталь 30Г
(закалка с охлаждением в масле)

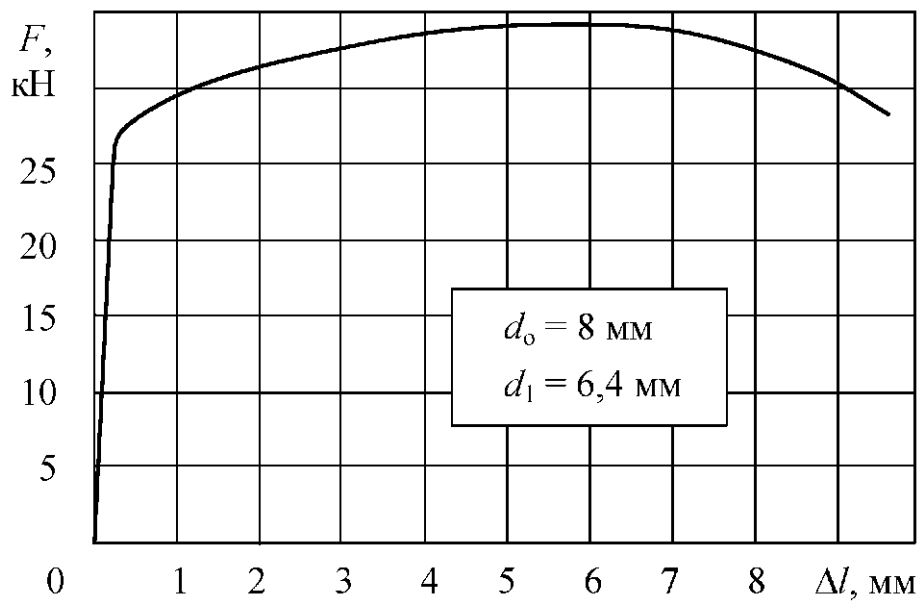


Рис. 14

Сталь 10Г2
(нормализация)

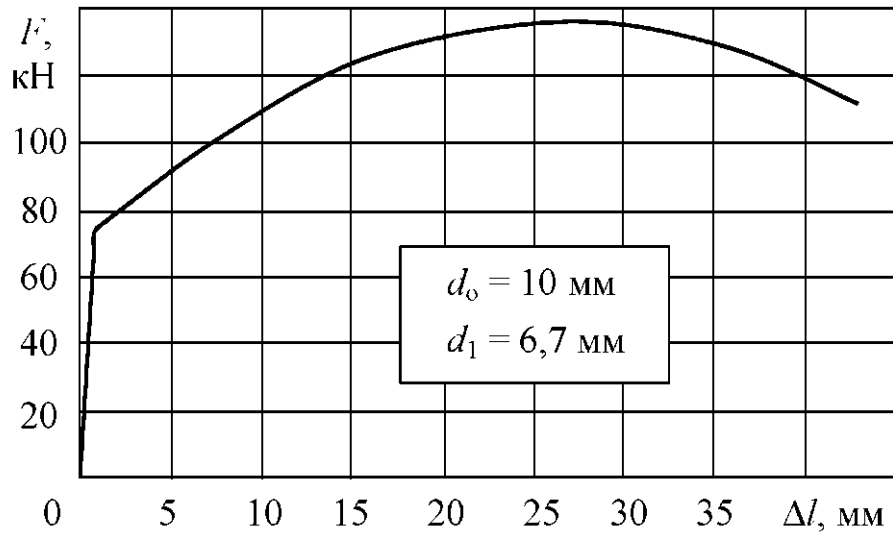


Рис. 15

Сталь 09Г2С

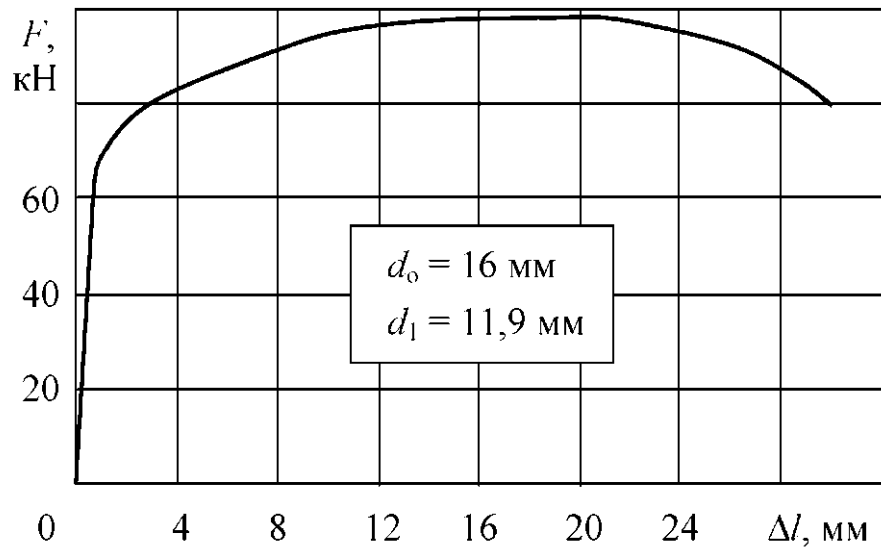


Рис. 16

Сталь 20Х
(отжиг)

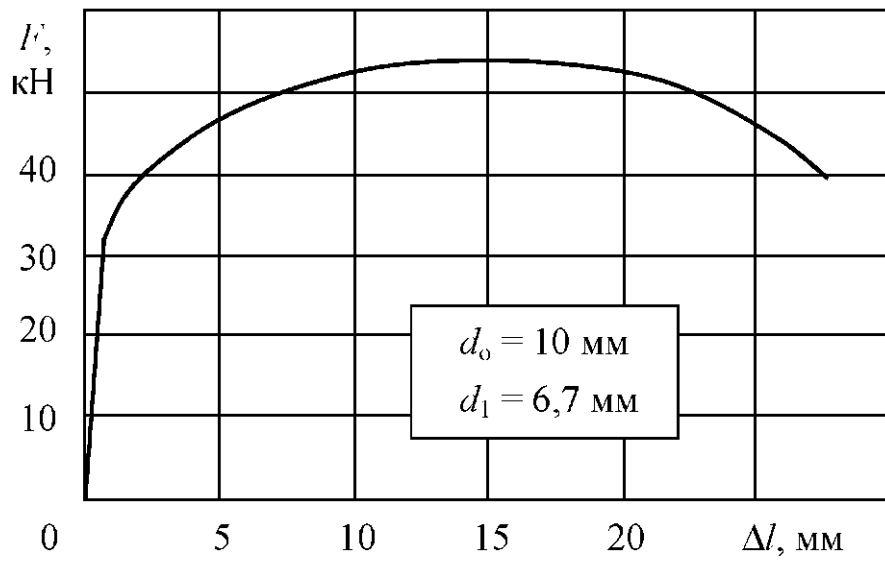


Рис. 17

Сталь 20Х
(закалка, отпуск 180°C)

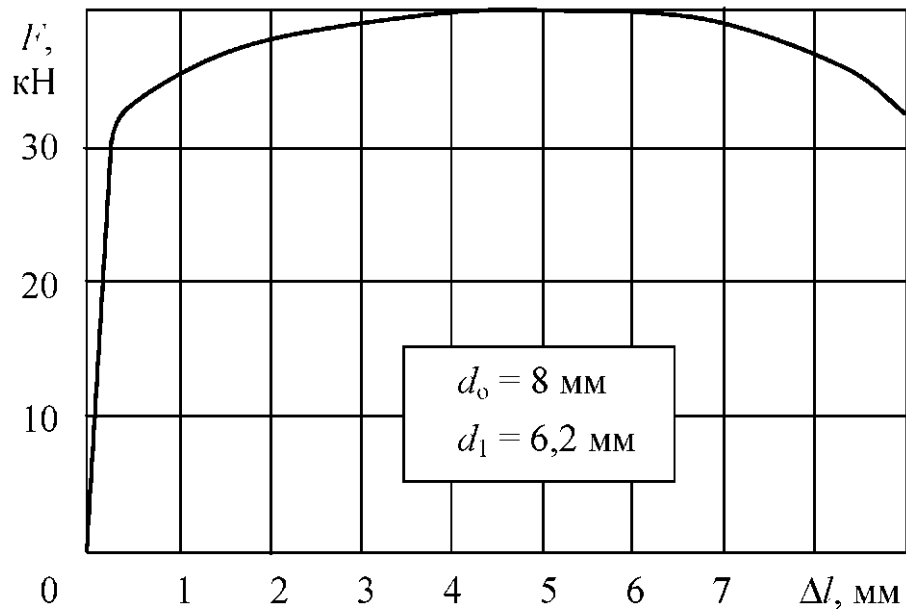


Рис. 18

Сталь 40X
(улучшение)

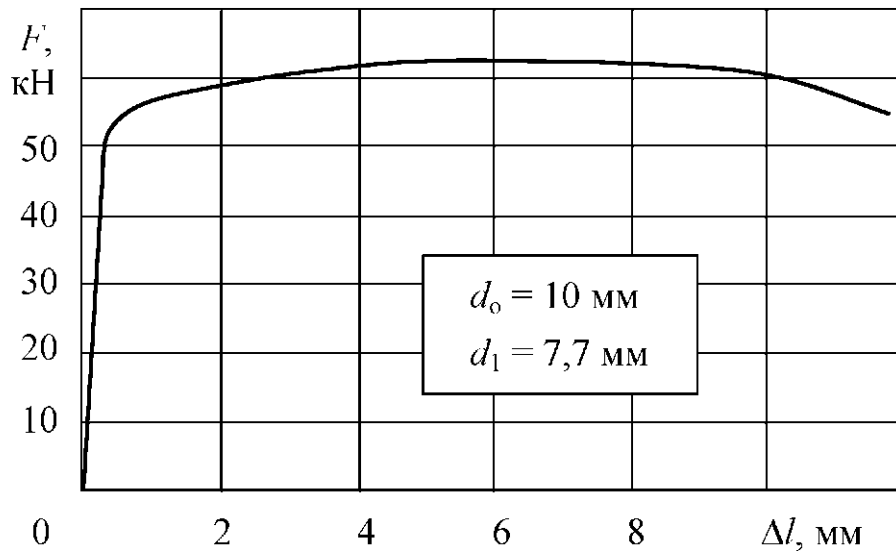


Рис. 19

Сталь 40X
(закалка, отпуск 600°C)

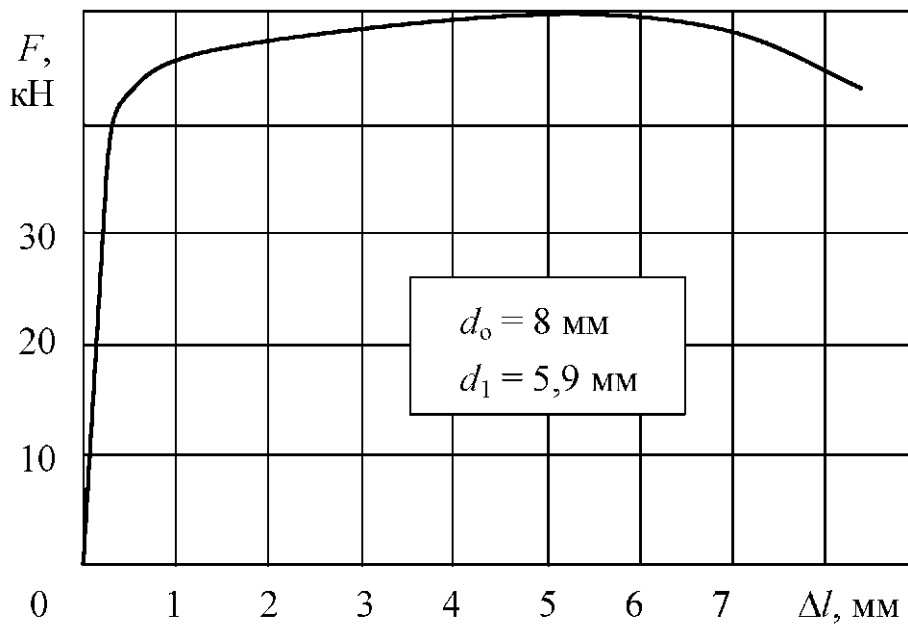


Рис. 20

Сталь 18ХГТ
(нормализация)

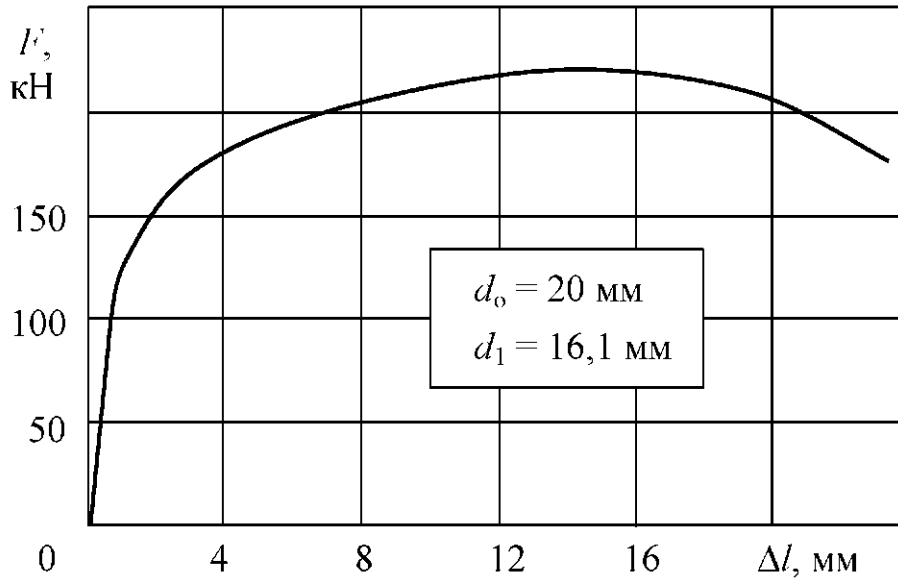


Рис. 21

Сталь 18ХГТ
(закалка, отпуск 200°C)

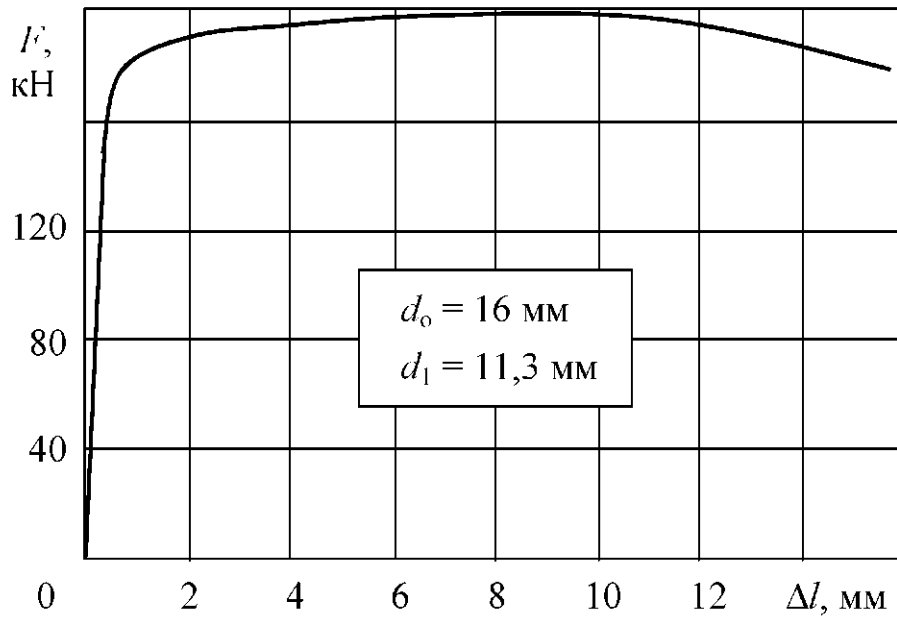


Рис. 22

Сталь 40ХН
(нормализация)

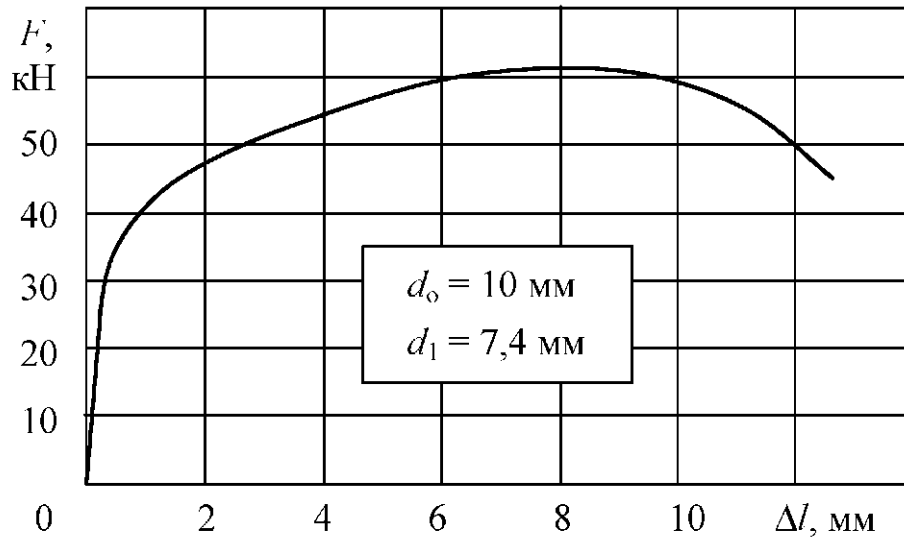


Рис. 23

Сталь 40ХН
(закалка, отпуск 550°С)

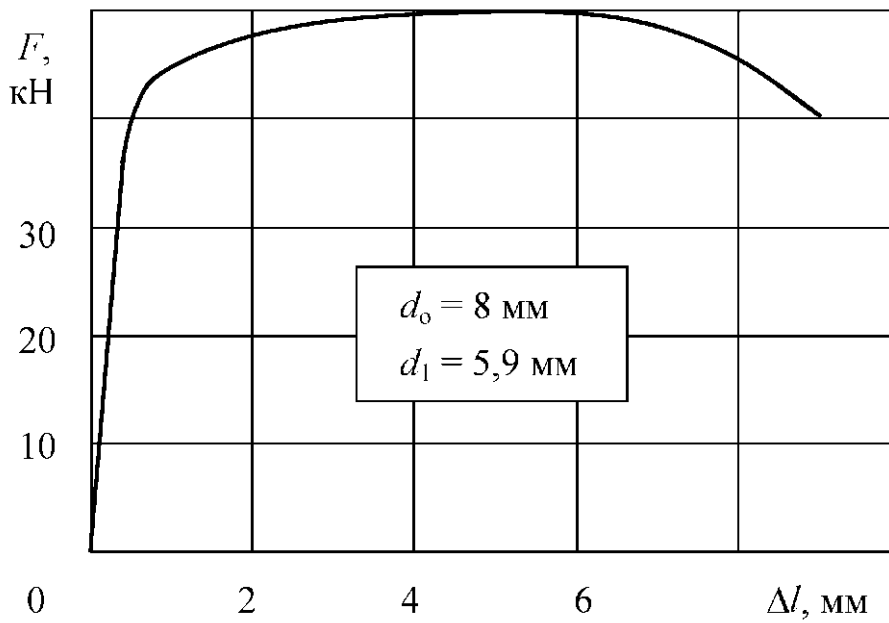


Рис. 24

Сталь 12ХН2
(закалка с охлаждением в масле)

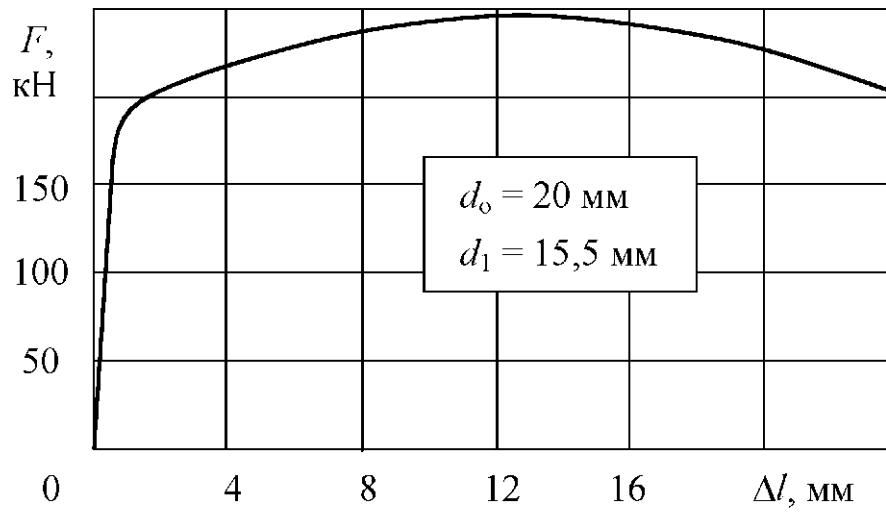


Рис. 25

Сталь 10ХН3А
(закалка, отпуск 180°C)

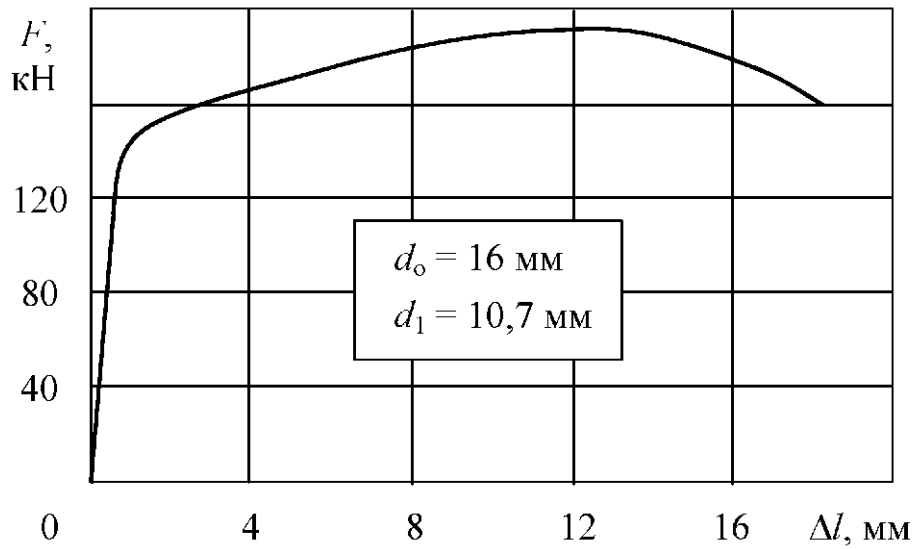


Рис. 26

Сталь 30ХГСА
(отжиг)

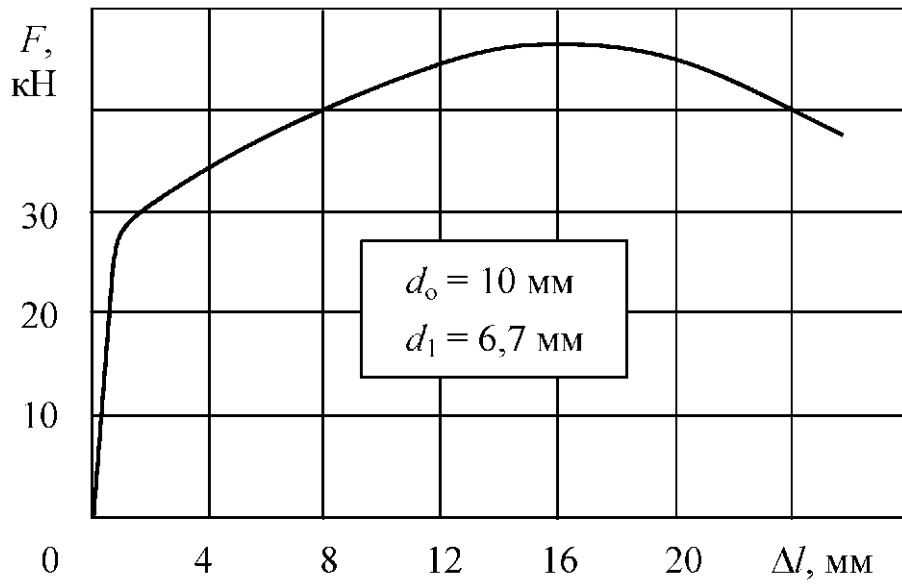


Рис. 27

Сталь 30ХГСА
(закалка, отпуск 540°C)

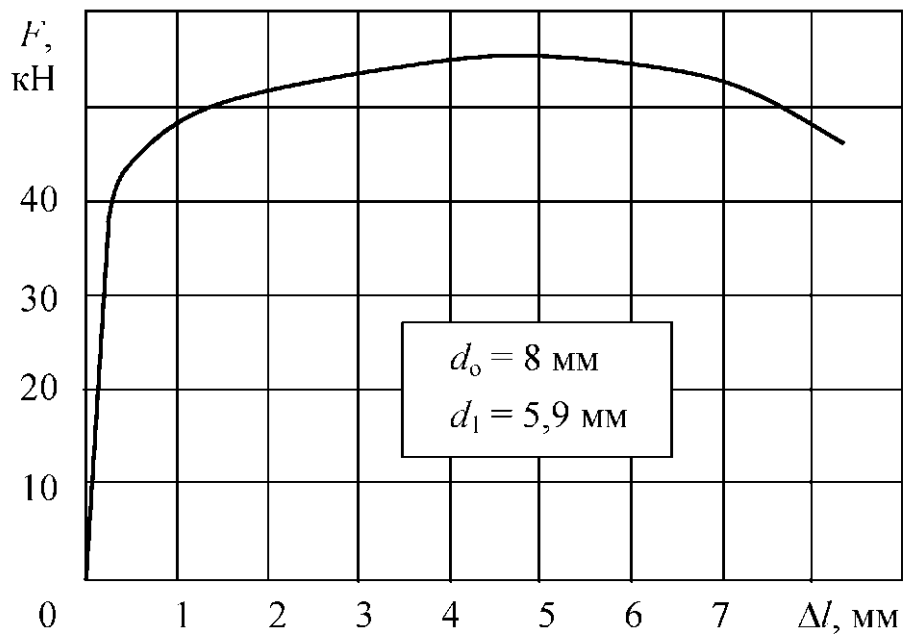


Рис. 28

Сталь 08Х13

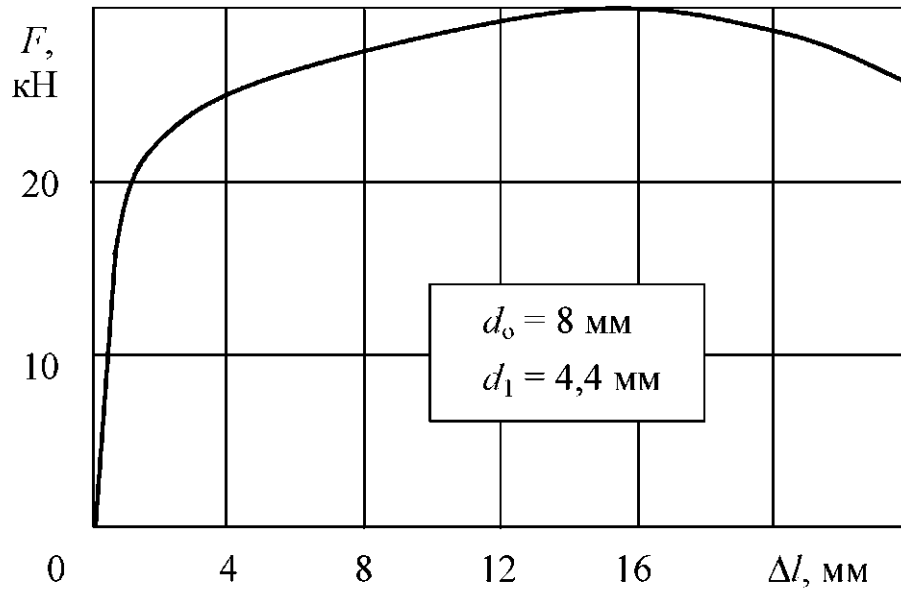


Рис. 29

Сталь 1Х13

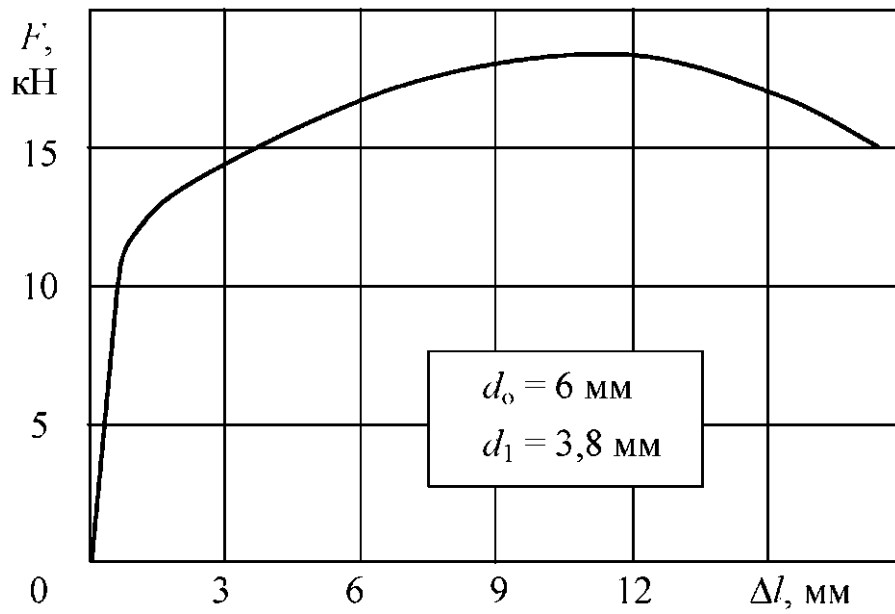


Рис. 30

Сталь X18

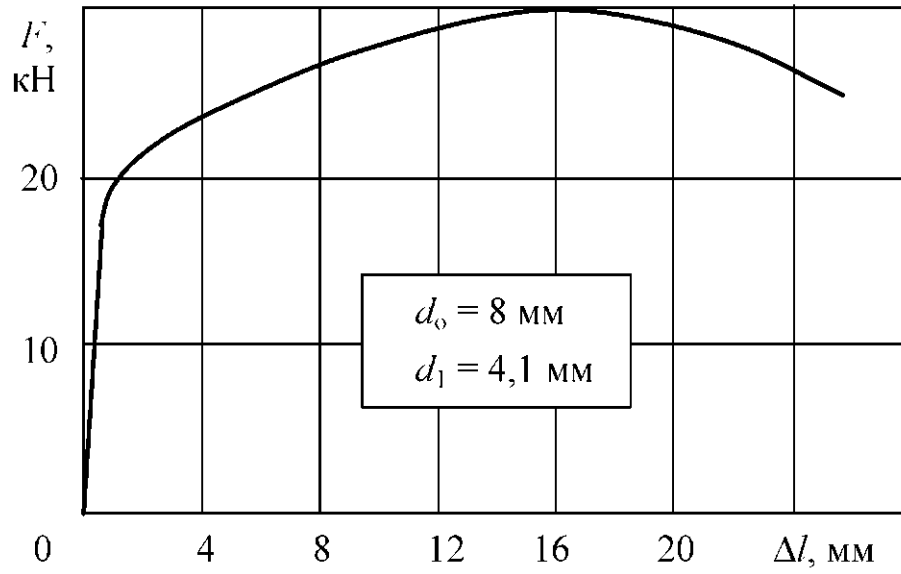


Рис. 31

Алюминиевый сплав АК4 (закалка, искусственное старение)

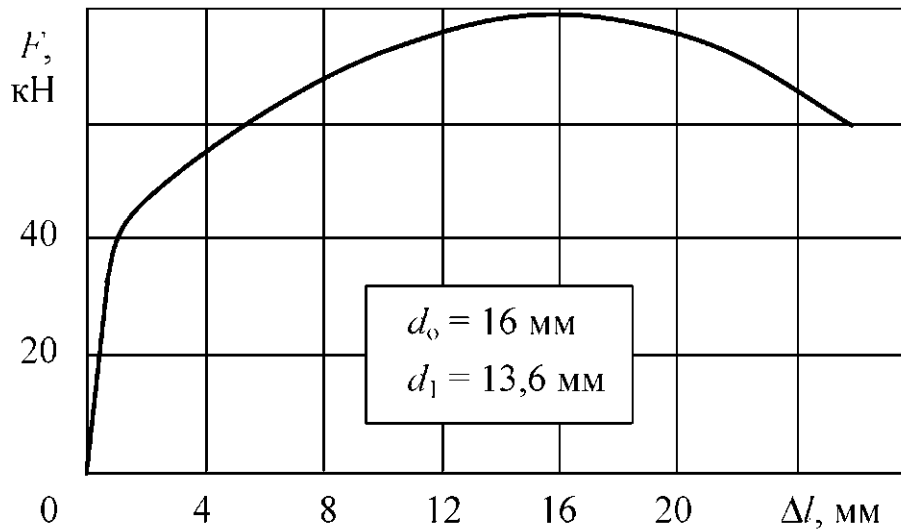


Рис. 32

Алюминиевый сплав АМг3

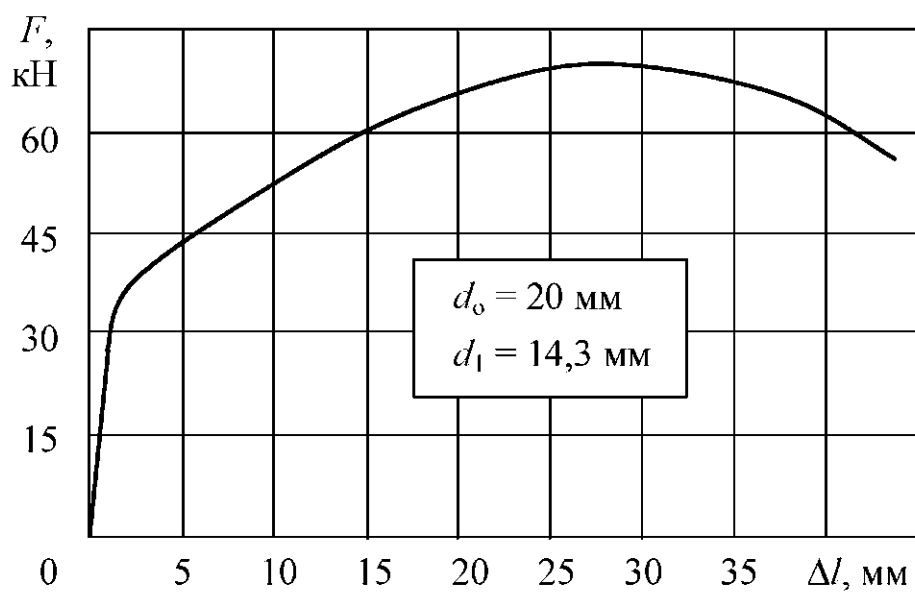


Рис. 33

Алюминиевый сплав АМг6

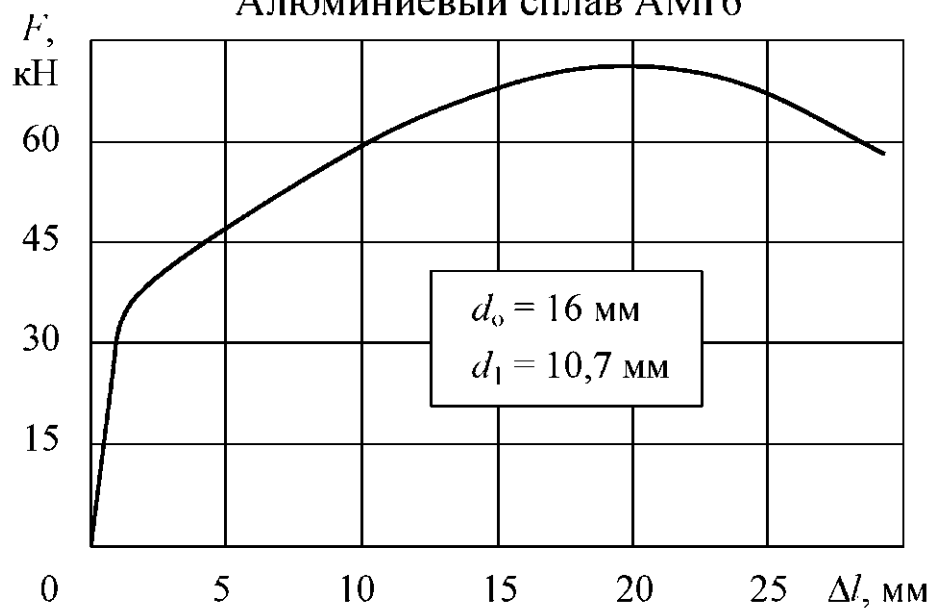


Рис. 34

Дюралюминий Д16
(закалка, естественное старение)

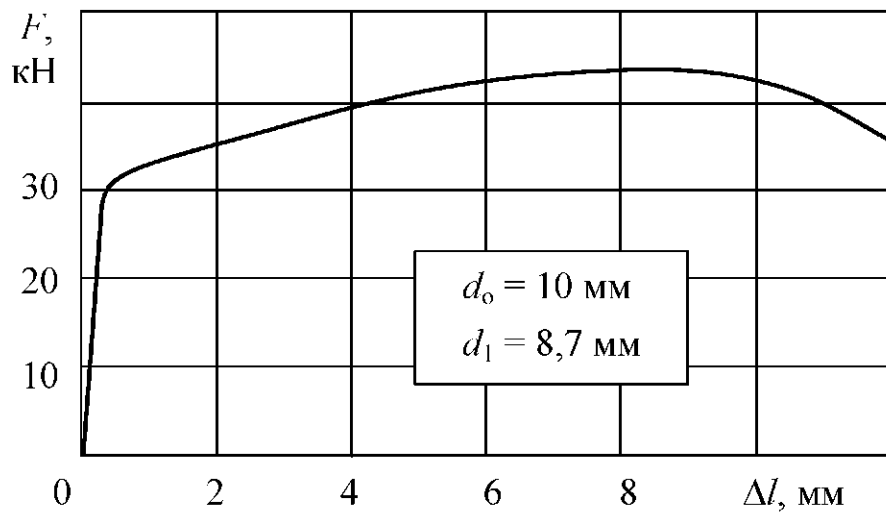


Рис. 35

Высокопрочный алюминиевый сплав В95
(закалка, искусственное старение)

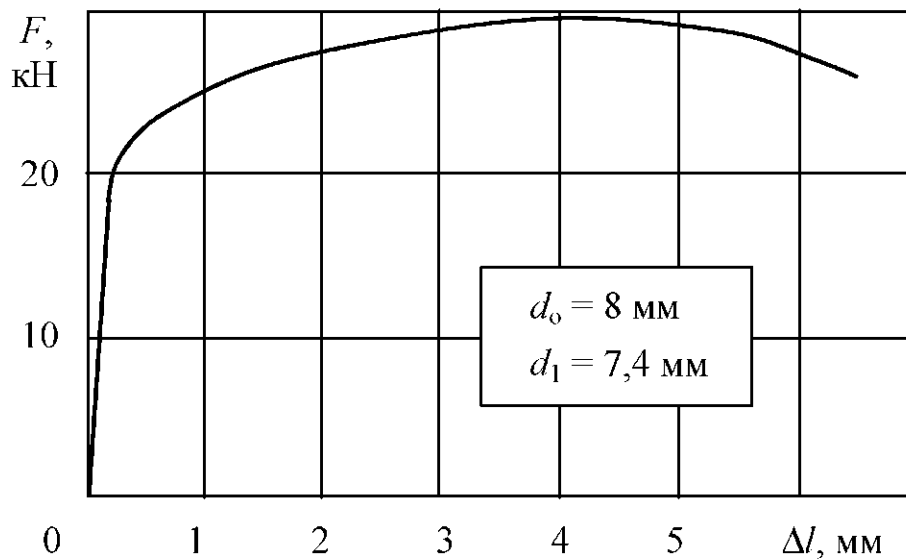


Рис. 36

Литейный магниевый сплав МЛ5
(гомогенизация и закалка на воздухе)

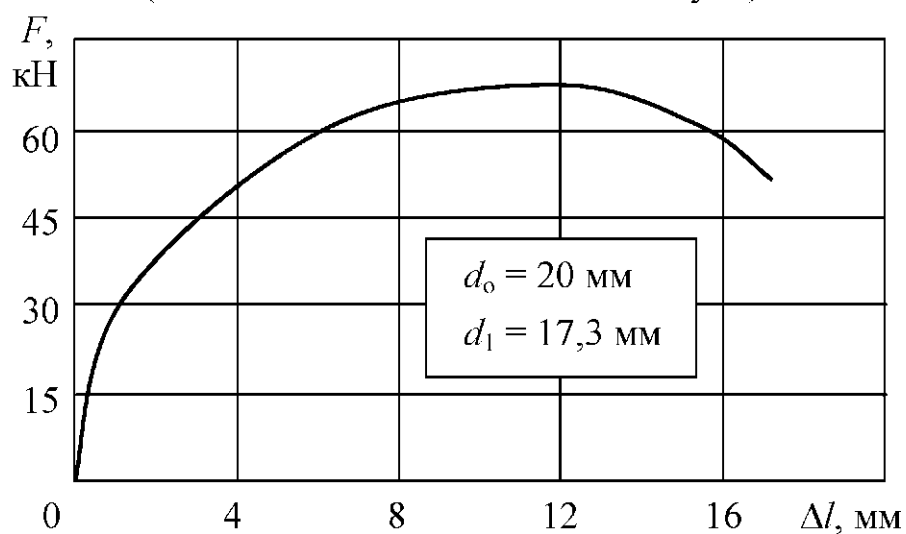


Рис. 37

Деформируемый магниевый сплав МА5
(закалка, искусственное старение)

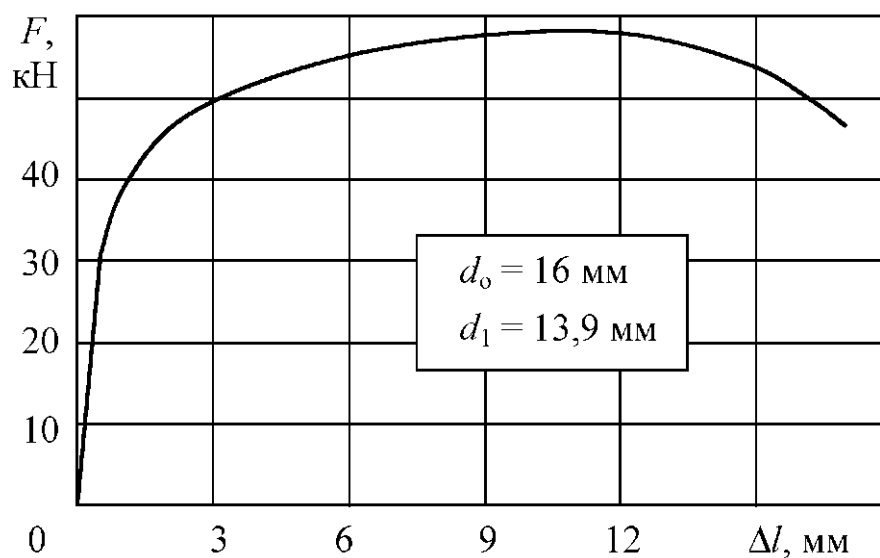


Рис. 38

Титановый сплав ВТ3-1
(закалка, старение)

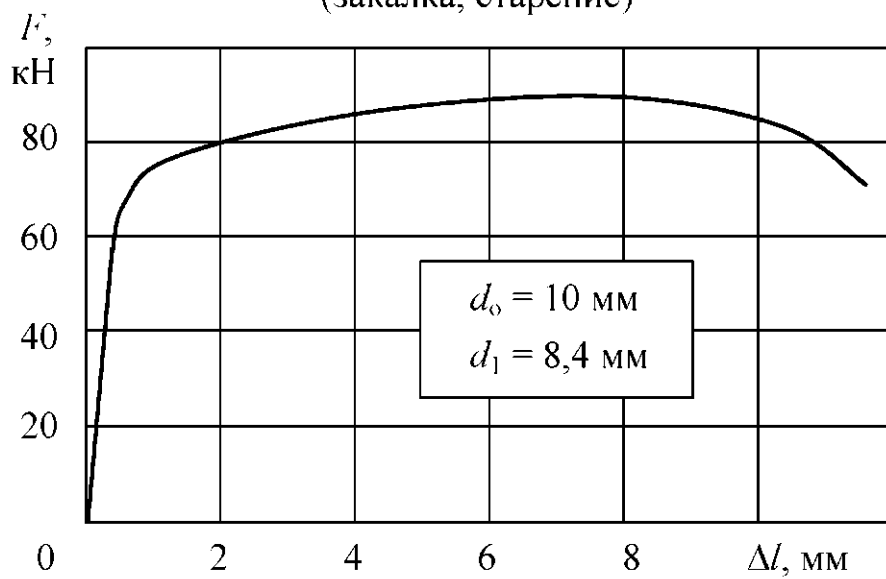


Рис. 39

Титановый сплав ВТ6
(закалка, старение)

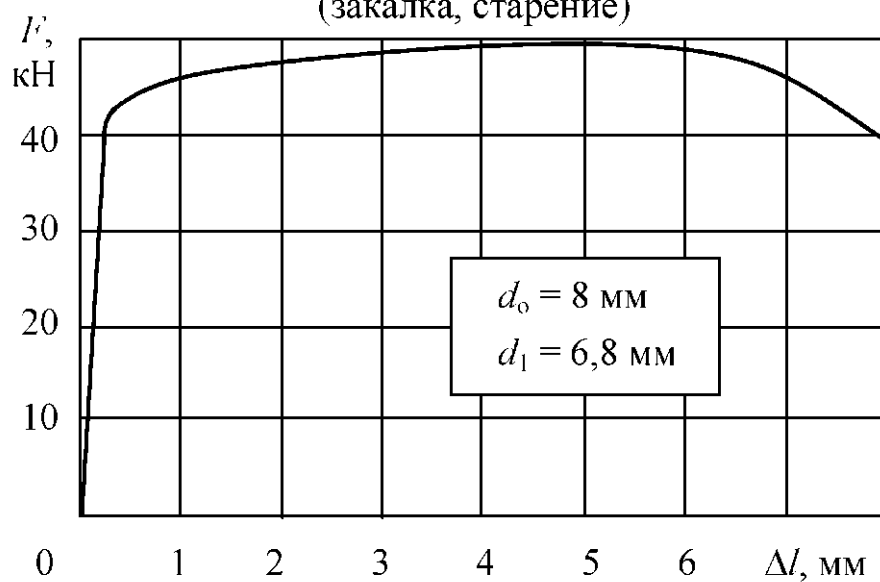


Рис. 40

Титановый сплав ВТ14
(закалка, старение)

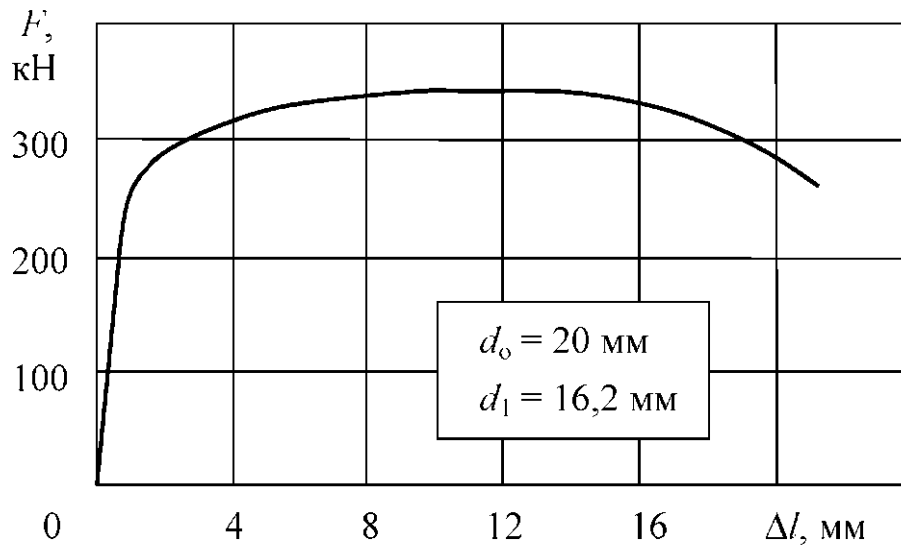


Рис. 41

Титановый сплав ВТ14
(изотермический отжиг)

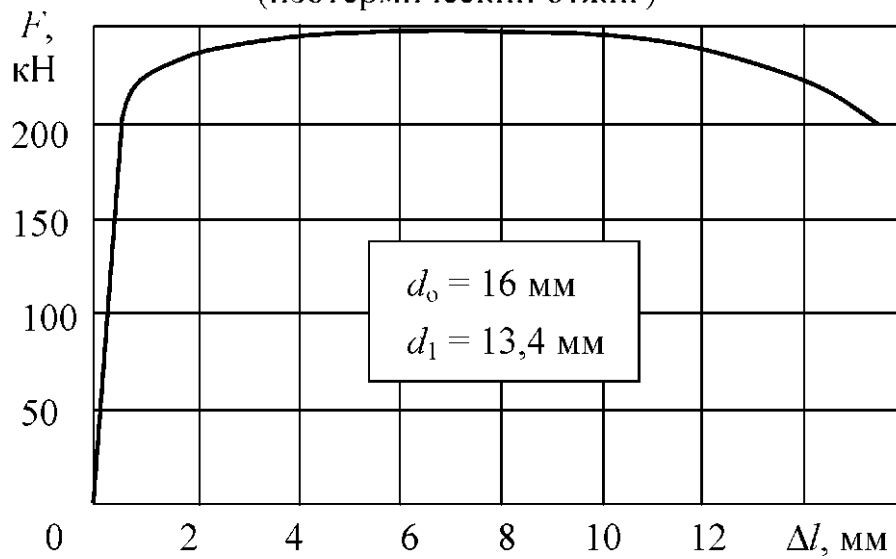


Рис. 42

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ СИМВОЛЫ

(Стандарт ИСО № 3898)

На основе сложившихся в мировой практике традиций стандартом № 3898 для обозначения отдельных понятий расчета конструкций предусматривается использование латинских и греческих букв, цифр и некоторых специальных обозначений. В табл. 1.1-1.3 приведены основные символы, а в табл. 1.4, 1.5 – индексы.

Таблица 1.1

Буква	Значение
<i>A</i>	Площадь
<i>D</i>	Жесткость пластинок и оболочек при изгибе (цилиндрическая жесткость)
<i>E</i>	Модуль продольной упругости (модуль Юнга)
<i>F</i>	Сосредоточенная сила; воздействие вообще
<i>G</i>	Модуль упругости при сдвиге; постоянная нагрузка (вес)
<i>H</i>	Горизонтальная составляющая силы
<i>I</i>	Момент инерции плоской фигуры
<i>L</i>	Может быть использована для обозначения пролета, длины элемента и т.п.
<i>M</i>	Момент вообще; изгибающий момент
<i>N</i>	Нормальное усилие
<i>P</i>	Мощность
<i>Q</i>	Поперечная сила
<i>R</i>	Результирующая сила; реакция опоры
<i>S</i>	Статический момент плоской фигуры
<i>T</i>	Крутящий момент; температура
<i>V</i>	Объем; вертикальная составляющая силы
<i>W</i>	Момент сопротивления
<i>X, Y, Z</i>	Составляющие силы, параллельные осям <i>x, y, z</i> .

Таблица 1.2

Буква	Значение
a	Расстояние; ускорение
b	Ширина
d	Диаметр
e	Эксцентриситет
f	Сопротивление
g	Ускорение силы тяжести
h	Высота, толщина
i	Радиус инерции
k	Коэффициент
l	Пролет, длина элемента
m	Масса; среднее значение
n	Количество чего-либо
q	Интенсивность погонной нагрузки
r	Радиус
s	Расстояние, шаг; стандартное отклонение
t	Время вообще; толщина тонкостенных элементов
x, y, z	Координаты

Таблица 1.3

Буква	Значение
альфа α	Угол; отклонение
бэта β	Угол; отношение
гамма γ	Объемный вес; относительный сдвиг;
дельта δ	Коэффициент изменчивости
эпсилон ε	Относительная деформация
кси ξ	Относительная координата x/l
эта η	Относительная координата y/l
дзета ζ	Относительная координата z/l
тэта θ	Поворот, вращение
лямбда λ	Гибкость
мю μ	Коэффициент трения; коэффициент приведения
ню ν	Коэффициент Пуассона
ро ρ	Плотность
сигма σ	Нормальное напряжение
тау τ	Касательное напряжение

Таблица 1.4

Буква	Значение
<i>c</i>	Сжатие вообще (англ. и франц. <i>compression</i>)
<i>d</i>	Расчетное (англ. <i>design</i>)
<i>e (el)</i>	Упругий (англ. <i>elastic</i>)
<i>f</i>	Трение (англ. <i>friction</i> , франц. <i>frottement</i>)
<i>h</i>	Горизонтальное (англ. <i>horizontal</i>)
<i>i</i>	Начальное (англ. и франц. <i>initial</i>)
<i>k</i>	Характеристическое (нормативное)
<i>l</i>	Продольное (англ. и франц. <i>longitudinal</i>)
<i>m</i>	Среднее значение (англ. <i>mean</i> , франц. <i>moyen</i>)
<i>n</i>	Нетто (<i>net</i> в случае опасности путаницы)
<i>o</i>	Нулевое, начальное
<i>t</i>	Растяжение вообще (англ. <i>tension</i> , франц. <i>tractin</i>) Поперечное (англ. и франц. <i>transversal</i>)
<i>u</i>	Предельное (англ. <i>ultimate</i>)
<i>v</i>	Вертикальное (англ. <i>vertical</i>)
<i>y</i>	Текущее (англ. <i>yield</i>)

Таблица 1.5

Сокращение	Значение
1	2
<i>abc</i>	Абсолютное (англ. <i>absolute</i>)
<i>adm</i>	Допускаемое (англ. <i>admissible</i>)
<i>cal</i>	Вычисленное (англ. <i>calculated</i>)
<i>crit (cr)</i>	Критическое (англ. <i>critical</i>)
<i>ef</i>	Эффективное (англ. <i>effective</i>)
<i>el (e)</i>	Упругое (англ. <i>elastic</i>)
<i>est</i>	Оцениваемое, ожидаемое (англ. <i>estimated</i>)
<i>exs</i>	Особое, исключительное (англ. <i>exeptional</i>)
<i>ext</i>	Внешнее, наружное (англ. <i>external</i>)
<i>inf</i>	Нижнее (франц. <i>inferieur</i>)
<i>int</i>	Внутреннее (англ. <i>internal</i>)
<i>lat</i>	Боковое, из плоскости (англ. <i>lateral</i>)
<i>lim</i>	Предельное (англ. <i>limit</i>)
<i>max</i>	Максимальное (англ. <i>maximum</i>)
<i>min</i>	Минимальное (англ. <i>minimal</i>)

Окончание табл. 1.5

1	2
<i>nom</i>	Номинальное (англ. <i>nominal</i>)
<i>obs</i>	Наблюдаемое, экспериментальное (англ. <i>observed</i>)
<i>pl</i>	Пластическое (англ. <i>plastic</i>)
<i>red</i>	Приведенное (англ. <i>reduced</i>)
<i>rel</i>	Относительное (англ. <i>relative</i>)
<i>ser</i>	Пригодность к эксплуатации (англ. <i>service</i>)
<i>sup</i>	Верхнее (франц. <i>superieur</i>)
<i>tot</i>	Полное, суммарное, общее (англ. <i>total</i>)
<i>var</i>	Переменное (англ. <i>variable</i>)

**Изменения обозначений основных величин,
применяемых в курсе сопротивления материалов,
в соответствии с рекомендациями И С О**

Величина			Примечание
Обозначение		Наименование	
старое	новое		
A	W	Работа	<i>work</i> - работа
F	A	Площадь	<i>area</i> - площадь
N	P	Мощность	<i>power</i> - мощность
P	F	Сила	<i>force</i> - сила
$M_K = M_Z$	$T(M_t)$	Крутящий момент	<i>torque</i> - крутящий момент
$q_z(q)$	n_e	Внешняя распределенная продольная нагрузка	<i>external</i> - внешний
μ	ν	Коэффициент Пуассона	—
δ	t	Толщина тонкостенных элементов	—

Остальные символы не изменились, однако вместо русских индексов используются латинские, соответствующие первым нескольким буквам аналогичного по смыслу английского слова.

1. Прочностные характеристики материала:

– предел пропорциональности	$\sigma_{\text{пц}} - \sigma_{pr}$	(<i>proportionality</i> – пропорциональность)
– предел упругости	$\sigma_y - \sigma_e$	(<i>elasticity</i> – упругость)
– предел текучести	$\sigma_T - \sigma_y$	(<i>yield</i> – текучесть)
– предел прочности	$\sigma_B = \sigma_{\text{пч}} - \sigma_u$	(<i>ultimate</i> – предельный)
а) при растяжении	$\sigma_{\text{вр}} = \sigma_{\text{пчр}} - \sigma_{\text{ит}}$	(<i>ttnsion</i> – растяжение)
б) при сжатии	$\sigma_{\text{вс}} = \sigma_{\text{пчс}} - \sigma_{\text{ис}}$	(<i>compression</i> – сжатие)

2. Характерные напряжения:

– статическое	$\sigma_{\text{ст}} - \sigma_{st}$	(<i>statical</i> – статический)
– динамическое	$\sigma_{\text{д}} - \sigma_d$	(<i>dynamic</i> – динамический)
– контактное	$\sigma_{\text{к}} - \sigma_{\text{con}}$	(<i>cotact</i> – контакт)
– критическое	$\sigma_{\text{кр}} - \sigma_{cr}$	(<i>critical</i> – критический)
– приведенное (эквивалентное)	$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_{\text{экв}} - \sigma_{red}$	(<i>reduced</i> – приведенный)

3. Характерные деформации:

– поперечная	$\varepsilon_{\text{поп}} = \varepsilon' - \varepsilon_l$	(<i>transverse</i> – поперечный)
– упругая	$\varepsilon_{\text{упр}} - \varepsilon_{el}$	(<i>elastic</i> – упругий)
– остаточная	$\varepsilon_{\text{ост}} - \varepsilon_r$	(<i>residual</i> – остаточный)

4. Допускаемое значение данной величины обозначается не с помощью квадратных скобок [...], а индексом *adm* (*admissible* – допускаемое):

– допускаемое напряжение	$[\sigma] - \sigma_{adm}$;
– допускаемая нагрузка	$[F] - F_{adm}$;
– допускаемый прогиб	$[f] - v_{adm}$;
– нормативный коэффициент запаса прочности	$[n] - n_{adm}$;

2. НОРМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ РАЗМЕРЫ

в диапазоне от 1 до 250 мм
(по ГОСТ 6636-86)

Ra5: 1; 1,16; 2,5; 4; 6; 10; 16; 25; 40; 60; 100; 160; 250.

Ra10: 1; 1,2; 1,6; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 16; 20; 25; 32; 40; 50; 60; 80; 100; 120; 160; 200; 250.

Ra20: 1; 1,1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2; 2,2; 2,5; 2,8; 3; 3,6; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 55; 60; 70; 80; 90; 100; 110; 120; 140; 160; 180; 200; 220; 250.

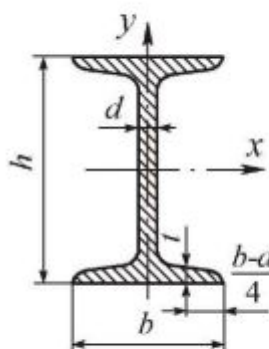
Ra40: 1; 1,05; 1,1; 1,15; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2; 2,1; 2,2; 2,4; 2,5; 2,6; 2,8; 3; 3,2; 3,4; 3,6; 3,8; 4; 4,2; 4,5; 4,8; 5; 5,2; 5,5; 6; 6,3; 6,5; 7; 7,5; 8; 8,5; 9; 9,5; 10; 10,5; 11; 11,5; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 52; 55; 55; 60; 63; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 115; 120; 130; 140; 150; 160; 170; 180; 190; 200; 210; 220; 230; 240; 250.

3. Кратные и дольные единицы системы СИ

Приставка	Обозначение	Множитель	Приставка	Обозначение	Множитель
Тера	Т	10^{12}	Деци	д	10^{-1}
Гига	Г	10^9	Сант	с	10^{-2}
Мега	М	10^6	Милли	м	10^{-3}
Кило	к	10^3	Микро	мк	10^{-6}
Гекто	г	10^2	Нано	н	10^{-9}

4. СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

Таблица 4.1



Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239-89)

A – площадь поперечного сечения;
 W – момент сопротивления;

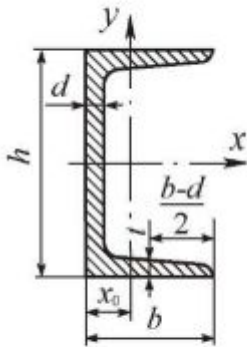
I – момент инерции;
 i – радиус инерции;

S – статический момент полусечения;
 m – масса одного погонного метра.

№	h , мм	b , мм	d , мм	t , мм	A , см ²	m , кг	I_{x_0} , см ⁴	W_{x_0} , см ³	i_{x_0} , см	S_{x_0} , см ³	I_{y_0} , см ⁴	W_{y_0} , см ³	i_{y_0} , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,5	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

Таблица 4.2

Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240-89)

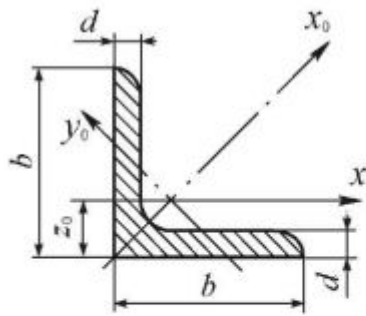


A – площадь поперечного сечения; W – момент сопротивления;
 I – момент инерции; S – статический момент полусечения;
 i – радиус инерции; m – масса одного погонного метра.

№	h , мм	b , мм	d , мм	t , мм	A , см ²	m , кг	I_{x_0} , см ⁴	W_{x_0} , см ³	i_{x_0} , см	S_{x_0} , см ³	I_{y_0} , см ⁴	W_{y_0} , см ³	i_{y_0} , см	x_{0y} , см
5	50	32	4,4	7,0	6,16	4,84	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,945	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	13,3	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18o	180	74	5,1	9,3	22,3	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	19,8	1670	167	8,15	95,9	139	21,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21,0	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22o	220	87	5,4	10,2	28,8	22,6	2330	212	8,90	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	24,0	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24o	240	95	5,6	10,7	32,9	25,8	3180	265	9,84	151	245	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	31,8	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10200	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Таблица 4.3

Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509-86)



A – площадь поперечного сечения;

I – момент инерции; i – радиус инерции;

m – масса одного погонного метра.

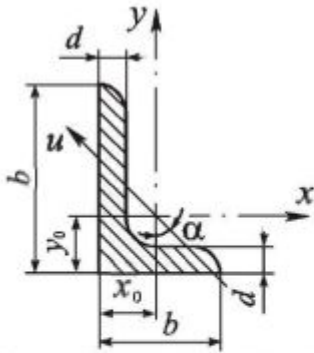
№	h , мм	b , мм	A , см ²	m , кг	I_x , см ⁴	i_x , см	$I_{x_0 \max}$, см ⁴	$i_{x_0 \min}$, см ⁴	$I_{y_0 \min}$, см ⁴	$i_{y_0 \min}$, см ⁴	z_0 , см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	2,97	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	1,17
4,5	45	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
5,6	56	4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	7,93	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,49	2,02
7,5	75	5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	2,18
8	80	5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55

Окончание табл. 4.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	10 0	6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,3	1,98	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
		16	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	3,06
11	11 0	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	12 5	8	19,7	15,5	294	3,87	486	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
		16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
14	14 0	9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
16	16 0	10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
		24	60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	4,70
18	18 0	11	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89
20	20 0	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,73
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	761	3,97	5,46
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
		30	111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	6,07
22	22 0	14	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93
		16	68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
24	24 0	16	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
		20	97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
25	25 0	22	106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00
		25	119,7	94,0	7006	7,65	1112	9,54	2887	4,91	7,11
		28	133,1	104,5	7717	7,61	1224	9,59	3190	4,89	7,23
		30	142,0	11,4	8177	7,59	1296	9,56	3389	4,89	7,31

Таблица 4.4

Уголки стальные горячекатаные неравнополочные (по ГОСТ 8510-86)



A – площадь поперечного сечения;

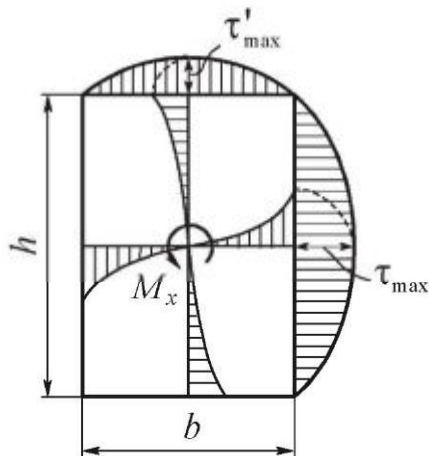
I – момент инерции;

i – радиус инерции; α – угол наклона главной оси

№	B , мм	b , мм	d , мм	A , см ²	m , кг	I_{x_s} , см ⁴	i_{x_s} , см	I_{y_s} , см ⁴	i_{y_s} , см	y_0 , см	x_0 , см	I_u min, см ⁴	i_u min, см	$\operatorname{tg}\alpha$
7,5/5	75	50	5	6,11	7,79	34,8	2,30	12,5	1,43	2,39	1,17	7,24	1,09	0,436
			6	7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	2,44	1,21	8,48	1,08	0,435
			8	9,47	7,43	52,4	2,35	18,3	1,40	2,52	1,29	10,9	1,07	0,430
9/5,6	90	56	5	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	2,92	1,26	11,8	1,22	0,384
			6	8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	2,95	1,28	12,7	1,22	0,384
			8	11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	3,04	1,36	16,3	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	3,23	1,42	18,2	1,38	0,393
			7	11,1	8,70	113,0	3,19	35,0	1,78	3,28	1,46	20,8	1,37	0,392
			8	12,6	9,87	127,0	3,18	39,2	1,77	3,32	1,50	23,4	1,36	0,392
			10	15,5	12,1	154,0	3,15	47,1	1,75	3,40	1,58	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6	11,4	8,98	112,0	3,53	45,6	2,00	3,55	1,58	26,9	1,53	0,402
			8	13,9	10,9	172,0	3,51	54,6	1,98	3,61	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	11,0	227,0	4,01	73,7	2,29	4,01	1,80	43,4	1,76	0,407
			8	16,0	12,5	256,0	4,00	83,0	2,28	4,05	1,84	48,8	1,75	0,406
			10	19,7	15,5	312,0	3,98	100,0	2,26	4,14	1,92	59,3	1,74	0,404
			12	23,4	18,3	365,0	3,95	117,0	2,24	4,22	2,00	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	18	14,1	364,0	4,49	120,0	2,58	4,49	2,03	70,3	1,98	0,411
			10	22,2	17,5	444,0	4,70	146,0	2,56	4,58	2,12	85,5	1,96	0,409
16/10	160	100	9	22,9	18,0	606,0	5,15	186,0	2,85	5,19	2,23	110	2,20	0,391
			10	25,3	19,8	667,0	5,13	204,0	2,84	5,23	2,28	121	2,19	0,390
			12	30,0	23,6	784,0	5,11	239,0	2,82	5,32	2,36	142	2,18	0,388
			14	34,7	27,3	897,0	5,00	272,0	2,80	5,40	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	28,3	22,2	952	5,80	276,0	3,12	5,88	2,44	165	2,42	0,375
			12	33,7	26,4	1123	5,77	324,0	3,10	5,97	2,52	194	2,52	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	27,4	1449	6,45	446,0	3,58	6,50	2,79	264	2,75	0,392
			12	37,9	29,7	1568	6,43	482,0	3,57	6,54	2,83	286	2,74	0,392
			14	43,9	34,4	1801	6,41	551,0	3,54	6,62	2,91	327	2,73	0,390
			16	49,8	39,1	2026	6,38	617,0	3,52	6,71	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	7,97	3,53	604	3,54	0,410
			16	63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8,14	3,69	781	3,50	0,408
			18	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	8,23	3,77	806	3,49	0,407
			20	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	8,31	3,85	949	3,48	0,405

5. Основные расчетные характеристики наиболее употребительных материалов

Материал	Модули упругости, ГПа		Температурный коэффициент, $\alpha_t \cdot 10^6$	Коэффициент Пуассона ν	Плотность, ρ , кг / м ³
	E	G			
Сталь	200	80	12,5	0,3	7850
Чугун	120	45	10,0	0,25	7200
Медь	100	40	16,5	0,32	8500
Титан	100	40	8,5	0,3	4500
Алюминий и дюраль	70	27	26,0	0,3	2700
Бетон	20	–	0,1	0,16	2500
Дерево (сосна)	10	–	–	–	550



6. Данные по расчету на кручение стержней прямоугольного сечения

Момент инерции $I_K = \alpha b^4$

Момент сопротивления $W_K = \beta b^3$

Наибольшие касательные напряжения возникающие посередине:

– длинных сторон $\tau_{\max} = M_K / W_K$;

– коротких сторон $\tau'_{\max} = \gamma \tau_{\max}$.

Значения коэффициентов α , β , γ зависят от отношения $m = h/b$ и приведены в следующей таблице.

m	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	10,0
α	0,140	0,294	0,457	0,790	1,123	1,789	3,123
β	0,208	0,346	0,493	0,801	1,128	1,789	3,123
γ	1,000	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742

7. Прочность на разрыв различных твердых тел

МАТЕРИАЛ	Предел прочности $\sigma_{пчр}$, МПа
МЕТАЛЛЫ	
Стали:	
– малоуглеродистая	400
– специально для сосудов высокого давления	2500
– рояльная проволока	3000
Чугуны:	
– серый	100-400
– специальный	300-600
Алюминиевые сплавы	100-600
Магниевые сплавы	100-300
Латунь	200-700
Бронза	100-800
Титановые сплавы	600-1500
НЕМЕТАЛЛЫ	
Мышечная ткань	0,1
Цемент и бетон	4
Обычный кирпич	5,5
Дерево (сухое)	
– вдоль волокон	100
– поперек волокон	3,5
Кость	110
Обыкновенное стекло	35-175
Человеческий волос	190
Паутина	240
Хорошая керамика	35-350
Шелк, хлопковое волокно	350
Льняное полотно	700
Нейлоновая ткань	1050
Пластики, армированные стекловолокном или углеволокном	350-1050
Искусственно выращенные кристаллы:	
– усы железа	13000
– графитовые нити	24000

8. Механические характеристики конструкционных материалов

МАТЕРИАЛ	Напряжения, МПа				δ , %
	$\sigma_{\text{ГЧ}}$	σ_{T}	σ_{-1}	τ_{-1}	
1. КОНСТРУКЦИОННЫЕ СТАЛИ					
1.1. Углеродистые стали					
20	420	250	170	100	25
30	480	280	200	110	21
35	540	320	220	130	20
40	580	340	230	140	19
45	610	360	250	150	16
50	640	380	270	160	14
60	690	410	310	180	12
1.2. Легированные стали					
20Х (40Х), отжиг	700	400	310	170	25
20Х (40Х), закалка	950	700	390	220	9
12ХНЗА, закалка	1000	800	400	240	9
40Х (40ХН), закалка, отпуск 600° С	1050	600	420	250	15
12Х2МВ8ФБ (ЭИ503)	1100	940	500	270	10
40ХНМА, закалка, отпуск 560° С	1150	950	520	280	9
18ХГТ (18ХГМ), закалка	1200	1100	460	230	6
40Х (40ХН), закалка, отпуск 500° С	1300	1000	580	320	10
18Х2Н4МА (18ХНВА), закалка	1600	720	600	360	8
30ХГСН, изотермическая закалка 330°С	1700	1500	700	400	8
30ХГСА, закалка					
2. АЛЮМИНИЕВЫЕ СПЛАВЫ					
АК4, закалка, искусственное старение ..	400	200	130	80	15
Д16Т, закалка, естественное старение. . .	500	340	140	120	8
В95, закалка, искусственное старение. . .	650	550	260	160	7
3. ТИТАНОВЫЕ СПЛАВЫ (термообработанные)					
BT3-1	950	850	480	300	18
BT6	1050	950	500	310	14
BT8	1200	1100	600	360	12
BT14	1400	1200	700	420	10

9. Удельные характеристики прочности конструкционных материалов

Материал		Удельный вес	Модуль упругости	Предел текучести	Предел прочности	Удельная прочность
		γ	E	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{\text{пч}}$	$\sigma_{\text{пч}} / \gamma$
		кН/м ³	ГПа	МПа		кМ
Стали	углеродистые	78,5	200	210-480	350-800	10
	легированные			800-1450	1000-1800	23
	сверхпрочные			2250-3150	2500-3500	45
Чугуны	Серые	72	80	150-250	200-350	5
	высокопрочные	74	150	320-560	450-800	11
Алюминиевые сплавы	литые	28	70	130-175	180-250	9
	деформируемые			280-420	400-600	21,5
Магниеые сплавы	литые	18	45	80-130	120-200	11
	деформируемые			160-200	250-300	16,5
Конструкционные бронзы		88	110	320-480	400-600	7
Титановые сплавы		45	110	700-1350	800-1500	33
Конструкционные пластики	дельта-древесина	14	50	–	150-200 (вдоль слоев)	13
	стекловолокниты	16	50	–	250-300	37
	СВАМ	19	60	–	400-700 (вдоль волокон)	37
Ситаллы		30	150	450-720	500-800	27

10. Механические свойства и допускаемые напряжения конструкционных сталей

Таблица 10.1

Качественные углеродистые стали

Марка стали ГОСТ 1050-74	Термо-обработка*	Предел прочности при растяжении $\sigma_{\text{цц}}$	Предел текучести σ_{T}	Предел выносливости при			Допускаемые напряжения**, МПа при													
				растяжении $\sigma_{-1\text{P}}$	изгибе σ_{-1}	кручении τ_{-1}	растяжении $[\sigma_{\text{p}}]$			изгибе $[\sigma_{\text{из}}]$			кручении $[\tau_{\text{кр}}]$			срезе $[\tau_{\text{ср}}]$			смятии $[\sigma_{\text{см}}]$	
							МПа	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I
				3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
8	Н	330	200	120	150	90	110	80	60	130	95	75	80	60	45	60	45	35	165	120
10	Н Ц-В59	340 400	210 250	125 145	155 180	95 110	110 130	80 90	60 70	145 155	100 115	75 90	80 100	60 65	45 55	65 70	45 50	35 40	165 195	120 135
15	Н Ц-В59	380 450	230 250	135 160	170 200	100 120	125 145	85 50	65 80	150 175	110 125	85 100	95 110	65 80	50 60	75 85	50 60	40 45	185 210	125 75
20	Н Ц-В58	420 500	250 300	150 180	190 225	115 135	140 165	115 115	95 90	170 200	120 140	95 110	105 125	70 75	55 55	85 100	60 60	45 45	210 240	175 175
25	Н У	460 550	280 350	170 200	210 250	125 150	150 180	110 130	85 100	180 210	130 160	105 125	110 135	80 95	60 75	90 110	65 80	50 60	220 270	165 195
30	Н У	500 600	300 350	180 215	225 270	135 160	165 200	115 140	90 105	200 240	140 175	110 135	125 150	90 105	70 80	100 120	65 85	55 65	240 300	175 210
35	Н У В35	540 650 1000	320 380 650	190 230 360	240 290 450	145 175 270	180 210 330	125 150 230	95 115 180	210 260 400	155 185 290	120 145 220	135 160 250	90 110 165	70 85 135	110 130 200	75 90 140	55 70 110	270 520 500	190 220 350
40	Н У В35	580 700 1000	340 400 650	210 250 360	260 315 450	155 190 270	190 230 340	130 160 230	105 125 180	230 270 400	165 200 290	130 155 220	140 170 250	100 120 175	75 95 135	115 140 200	80 100 140	60 80 110	280 340 500	200 240 350
45	Н У М35 В42 В48 ТВЧ56	610 750 900 900-1200 1200 750	360 450 650 700 950 450	220 270 325 325 430 270	275 340 405 405 540 340	165 190 270 300 325 205	200 240 300 300 400 240	140 170 210 210 280 170	110 135 160 160 210 135	240 290 360 360 480 290	175 215 260 260 340 210	135 170 200 200 270 170	150 185 230 230 300 185	105 130 165 160 210 130	80 100 120 120 160 100	125 145 185 185 240 145	85 105 125 125 170 105	65 80 95 95 130 80	300 360 450 450 600 360	210 260 310 310 420 260
50	Н У	640 900	380 700	230 325	290 405	175 245	210 300	140 210	115 160	250 360	185 260	145 200	160 230	110 180	85 120	125 185	85 125	65 95	310 450	220 310
20Г	Н В	460 570	280 420	165 205	205 255	125 150	150 195	100 130	80 100	180 230	130 165	100 125	110 145	80 100	60 75	90 115	65 80	50 60	220 290	160 190
30Г	Н В	550 680	320 560	200 245	250 305	150 180	180 230	130 160	100 120	210 270	160 195	125 150	135 170	95 120	75 90	110 140	80 100	60 75	270 340	190 240

Окончание табл. 10.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
40Г	Н	600	360	220	270	160	200	140	110	240	175	135	150	105	80	120	85	65	300	210
	В45	840	590	350	380	230	280	190	150	330	240	190	210	150	115	170	120	95	420	290
50Г	Н	660	400	235	295	175	210	150	115	260	185	145	160	110	75	130	90	70	320	220
	В	820	560	300	370	220	270	190	150	330	250	185	250	155	110	165	105	75	410	290
65Г	Н	750	440	270	340	200	240	175	135	290	210	170	185	130	100	145	105	80	360	260
	У	900	700	325	405	245	300	210	160	360	260	200	230	160	120	185	125	95	450	310
	М45	1500	125	530	670	400	500	350	260	600	430	330	380	260	200	300	210	160	760	520

* - Условные обозначения термической обработки в табл. 1 и 2:

0 – отжиг;

Н – нормализация;

У – улучшение;

Ц – цементация;

ТВЧ – закалка с нагревом токами высокой частоты;

В – закалка с охлаждением в воде;

М – закалка с охлаждением в масле;

НВ – твердость по Бринелю.

Число после М, В, Н или ТВЧ – среднее значение твердости по НРС.

** – Римскими цифрами обозначен вид нагрузки:

I – статическая;

II – переменная, действующая от нуля до максимума
и от максимума до нуля (пульсационная);

III – знакопеременная.

Таблица 10.2

Легированные стали

Марка стали ГОСТ 1050-74	Термо-обработка*	Предел прочности при растяжении $\sigma_{\text{ПЧ}}$	Предел текучести σ_{T}	Предел выносливости при			Допускаемые напряжения**, МПа при													
				растяжении σ_{-1}	изгибе σ_{-1}	кручении τ_{-1}	растяжении [$\sigma_{\text{р}}$]			изгибе [$\sigma_{\text{из}}$]			кручении [$\tau_{\text{кр}}$]			срезе [$\tau_{\text{ср}}$]			смятии [$\sigma_{\text{см}}$]	
							МПа	И	II	III	И	II	III	И	II	III	И	II	III	И
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
10Г2	Н	430	250	175	220	125	140	110	90	170	135	110	105	75	60	85	65	50	210	165
09Г2С	—	500	350	190	240	140	170	120	95	200	150	120	125	90	70	100	70	55	250	180
10ХСД	—	540	400	215	270	155	185	140	110	220	160	135	140	100	80	ПО	80	65	280	210
20Х	Н	600	300	210	260	150	190	135	105	230	165	130	140	100	75	115	85	60	280	200
	У	700	500	280	350	200	240	175	140	290	220	175	180	130	100	145	105	80	360	260
	М59	850	630	340	420	240	290	210	170	350	145	210	220	155	120	175	125	95	430	320
40Х	Н	630	330	250	310	180	200	355	125	240	190	155	150	115	90	120	95	75	300	230
	У	800	650	320	400	230	270	200	160	320	250	200	200	150	115	160	115	90	400	300
	М39	1100	900	440	550	320	380	280	220	450	340	280	280	200	160	230	165	130	560	420
	М48	1300	1100	520	650	380	440	330	260	530	410	320	330	240	190	270	195	150	670	490
45Х	Н	650	350	260	320	185	210	160	130	250	195	160	155	115	90	125	95	75	310	240
	У	950	750	380	470	270	320	240	190	380	290	230	240	175	135	190	135	105	480	360
	М48	1400	1200	560	700	400	480	350	280	570	430	350	360	260	200	290	200	160	720	520
50Х	Н	650	350	260	325	185	210	160	130	250	200	160	160	120	90	125	90	70	310	240
	М48	1500	1300	600	750	430	500	370	300	600	460	370	370	270	210	300	220	170	750	550
35Г2	Н	630	370	250	315	180	200	155	125	240	190	160	150	115	90	120	95	75	330	230
	В,НВ249	800	650	320	400	230	270	200	160	320	250	200	200	145	115	160	115	90	400	300
40Г2	Н	670	390	270	335	195	220	170	135	260	210	170	165	120	95	130	95	75	330	250
	М,НВ331	1120	950	540	660	380	380	310	270	460	380	330	290	230	190	230	180	150	580	460
45Г2	Н	700	410	280	350	200	230	175	140	270	210	175	175	125	100	140	100	80	340	260
	М,НВ295	850	700	340	425	245	290	210	170	350	145	210	220	155	120	175	125	95	440	330
33ХС	Н	600	300	210	260	150	190	135	105	230	165	130	140	100	75	115	65	65	280	200
	М	900	700	360	450	260	300	220	180	360	280	220	230	165	130	180	135	105	450	330
38ХС	У	950	750	370	470	280	320	230	185	390	290	230	240	175	140	190	140	110	480	350
18ХГТ	Н	700	430	280	350	200	230	175	140	270	210	175	175	125	100	140	100	80	340	260
	Ц-М59	1000	800	400	500	290	330	250	200	400	310	250	250	185	145	200	145	115	490	380

Окончание табл. 10.2

Мар- ка сталли ГОСТ 1050- 74	Тер- мо- обра- ботка*	Пре- дел проч- ности при рас- тяже- нии $\sigma_{\text{лц}}$	Пре- дел теку- чести σ_{T}	Предел вы- носливости при			Допускаемые напряжения**, МПа при													
				рас- тяже- нии $\sigma_{-1\text{p}}$	из- гибс σ_{-1}	кру- че- нии τ_{-1}	растяжении $[\sigma_{\text{p}}]$			изгибе $[\sigma_{\text{из}}]$			кручении $[\tau_{\text{кр}}]$			срезе $[\tau_{\text{ср}}]$			смятии $[\sigma_{\text{см}}]$	
							МПа	І	ІІ	ІІІ	І	ІІ	ІІІ	І	ІІ	ІІІ	І	ІІ	ІІІ	І
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
30ХГТ	М43	1250	1050	500	620	360	430	310	250	510	390	310	320	230	180	260	185	140	640	460
	Ц-М59	1100	800	440	550	320	370	270	220	440	340	270	280	200	160	220	160	125	550	410
20ХГНР	М40	1300	1200	520	650	375	450	330	260	540	410	320	340	230	170	270	180	135	680	500
	М50	1450	1400	580	725	420	500	360	290	600	450	360	380	270	210	300	215	170	750	540
40ФХА	М30	900	750	360	450	260	320	230	180	380	280	220	240	170	130	190	135	105	480	340
	М50	1600	3130	640	800	480	550	410	320	660	500	400	410	310	240	330	240	195	820	610
30ХМ	М	950	750	380	475	230	320	240	190	390	300	240	240	155	115	190	125	90	480	360
35ХМ	М, НВ270	1000	850	400	500	290	340	250	200	410	310	250	260	185	145	200	130	950	520	380
	М	1600	140	640	800	480	550	410	320	660	500	400	420	310	240	330	250	200	820	610
40ХН	Н	780	460	310	390	225	260	195	160	310	240	195	190	140	110	155	115	90	390	290
	М43	1200	100	480	600	345	410	310	240	490	370	300	310	220	170	250	175	135	620	460
12ХН2	М	800	600	320	400	230	270	200	160	320	250	200	200	145	115	160	115	90	400	300
	Ц-М59	800	600	320	400	230	270	200	160	320	250	200	200	145	115	160	115	90	400	300
12ХН3А	У	950	700	380	470	270	320	240	190	380	280	230	240	175	140	190	140	110	480	300
	ТВ459	1000	850	400	500	300	340	260	200	410	310	250	250	190	150	200	150	120	510	380
20Х2Н4А	ТВ459	680	450	270	340	200	230	170	135	270	210	170	170	125	100	140	100	80	340	260
	Ц-М59	1100	850	440	550	320	370	270	220	440	340	270	210	200	160	220	160	125	550	410
	М	1300	1100	520	650	375	440	330	260	530	400	320	330	240	190	260	190	150	660	500
20ХГСА	М	800	650	320	400	230	270	200	160	330	250	200	200	145	115	160	115	90	410	300
30ХГС	О	600	360	240	300	170	200	150	120	240	185	150	150	110	85	120	90	70	300	220
30ХГСА	У	1100	850	440	550	320	370	270	220	440	340	270	210	200	160	220	160	125	550	410
	М46	1500	300	600	750	430	510	380	300	620	470	380	390	270	210	310	220	170	760	570
38Х210	М	800	700	320	400	230	280	200	160	330	250	200	200	150	115	170	120	95	410	300
	М	900	750	360	450	260	310	240	190	370	290	240	230	170	135	185	140	110	460	360
50ХФА	М	1300	100	520	650	340	440	330	260	540	400	320	340	220	170	260	180	135	660	500
	М46	1500	300	600	750	360	520	380	300	620	470	380	390	240	180	310	200	145	770	570
60С2	М, НВ269	1300	1200	520	650	340	440	330	260	540	400	320	340	220	170	260	180	135	670	550
	М, НВ269	1600	1600	640	800	465	550	400	320	660	500	400	410	300	230	330	240	185	820	600
ЦХ15	О	600	3800	240	300	180	200	150	120	240	180	150	150	110	90	120	90	75	300	220
	М62	2200	1700	460	660	330	740	350	230	890	480	330	550	250	165	440	200	130	100	520

** Римскими цифрами обозначен вид нагрузки, см. табл. 1.

11. Данные к расчетам на устойчивость

Таблица 11.1

Коэффициенты продольного изгиба φ (увеличенные в 1000 раз)

Материалы	Гибкость λ														
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
Амг	973	945	917	870	770	685	603	530	465	415	365	327	296	265	235
Амгб	973	946	890	770	640	542	458	387	322	280	243	213	183	162	148
АВТІ	996	992	900	780	660	557	463	387	312	252	210	175	150	129	113
Д16Т	999	998	835	700	568	455	353	269	212	172	142	119	101	87	76
Ст2, 3, 4	990	970	950	920	890	860	810	750	690	600	520	450	400	360	320
Ст5	980	950	930	900	840	800	740	660	590	500	430	380	320	280	270
НЛ-2 15ХСНД	980	950	930	900	830	780	710	630	540	450	390	330	290	260	230
СЧ12, 15 СЧ18, 21	970	910	810	690	570	440	340	260	200	160	-	-	-	-	-
СЧ24, 28	950	870	750	600	430	320	230	180	140	120	-	-	-	-	-
Сосна	990	970	930	870	800	710	610	490	380	310	250	220	180	160	140

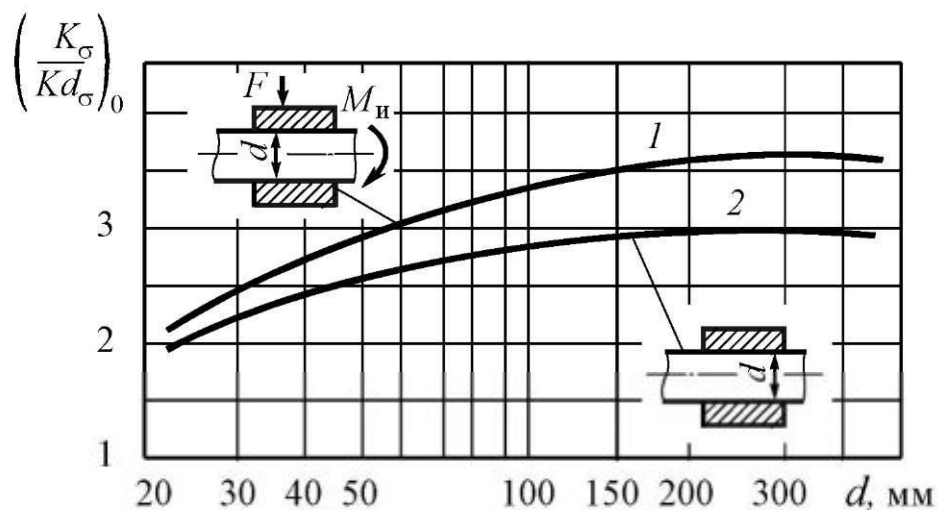
Таблица 11.2

Значения коэффициентов, входящих в эмпирическую формулу Тетмайера – Ясинского для критической силы, и пределы применимости этой формулы

№ п/п	Материал	E , ГПа	a	b	c	$\lambda_{\text{пц}}$ (λ_1)	$\lambda_{\text{прсд}}$ (λ_2)
			МПа				
1	Сосна	10	40	0,203	-	60	-
2	Сталь Ст3	200	310	1,14	-	100	61
3	Ст5, сталь 30	200	464	3,26	-	90	60
4	15ХСНД (НЛ2)	200	589	3,82	-	100	60
5	Авиаль АВТІ	70	320	1,70	-	55	22
6	Дюралюминий Д16Т	70	380	2,19	-	50	20
7	Чугун	120	776	12	0,053	80	-

12. Данные к расчету характеристик сопротивления усталости

Валы с напрессованными деталями при изгибе



Для случая, когда $\sigma_{\text{пч}} = 500$ МПа, давление $p \geq 30$ МПа:

1 – через напрессованную деталь передается сила или момент;

2 – через напрессованную деталь не передается усилие

Поправочный коэффициент ξ'
на предел прочности $\sigma_{\text{пч}}$

Поправочный коэффициент ξ''
на давление напресовки p

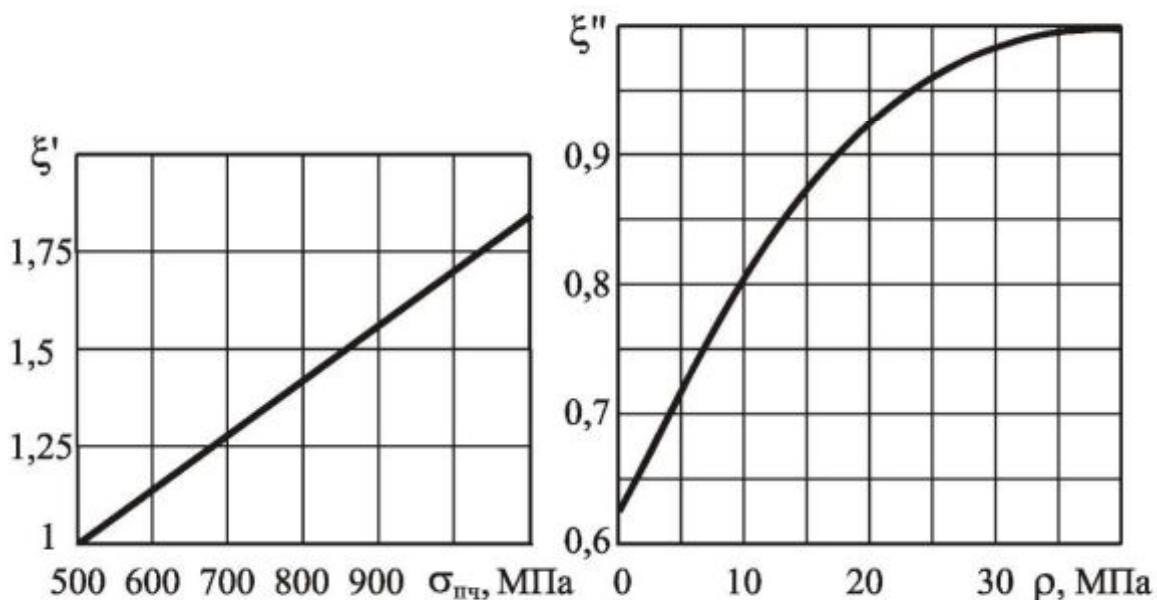


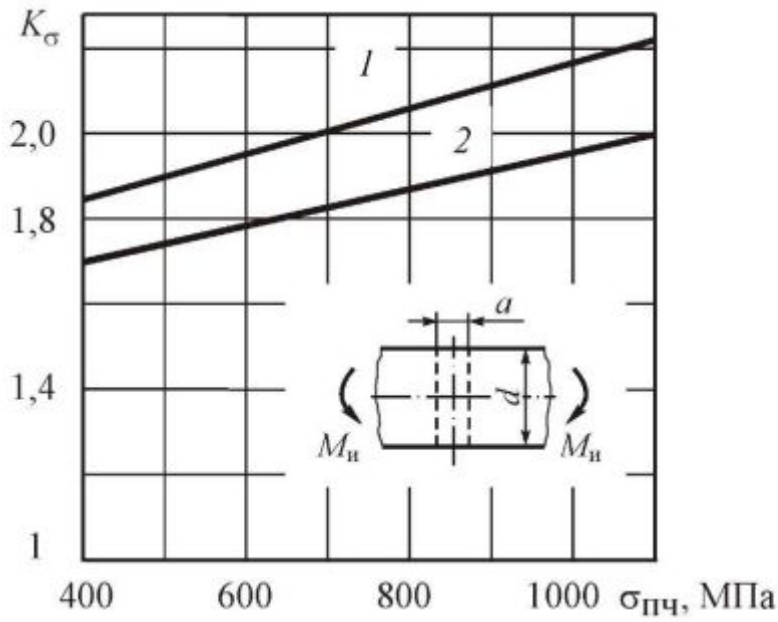
Рис. 12.1

Таблица 12.1

**Линейная протяженность очага концентрации
и относительный градиент напряжений**

Деталь	L, мм	Вид деформации		
		изгиб	растяжение и сжатие	кручение $\bar{G}_\tau, \text{мм}^{-1}$
		$\bar{G}, \text{мм}^{-1}$		
	2b	$H/h \geq 1,5$		—
		$2/r + 2/h$	$2/r$	
		$H/h < 1,5$		
		$\frac{2(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{h}$	$\frac{2(1+\varphi)}{r}$	
	πd	$D/d \geq 1,5$		$\frac{1}{r} + \frac{2}{d}$
		$2/r + d$	$2/r$	
		$D/d < 1,5$		
		$\frac{2(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{d}$	$\frac{2(1+\varphi)}{r}$	
	2b	$H/h \geq 1,5$		—
		$2,3/r + 2/h$	$2,3/r$	
		$H/h < 1,5$		
		$\frac{2,3(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{h}$	$\frac{2,3(1+\varphi)}{r}$	
	πd	$D/d \geq 1,5$		$\frac{1,15}{r} + \frac{2}{d}$
		$2,3/r + 2/d$	$2,3/r$	
		$D/d < 1,5$		
		$\frac{2,3(1+\varphi)}{r} + \frac{2}{d}$	$\frac{2,3(1+\varphi)}{r}$	
	2b	—	$\frac{2,3}{r}$	—

Примечание. Для случаев, указанных в таблице $\varphi = \frac{1}{2 + 4\sqrt{t/r}}$, где $t = \frac{H-h}{2}$ или $t = \frac{D-d}{2}$

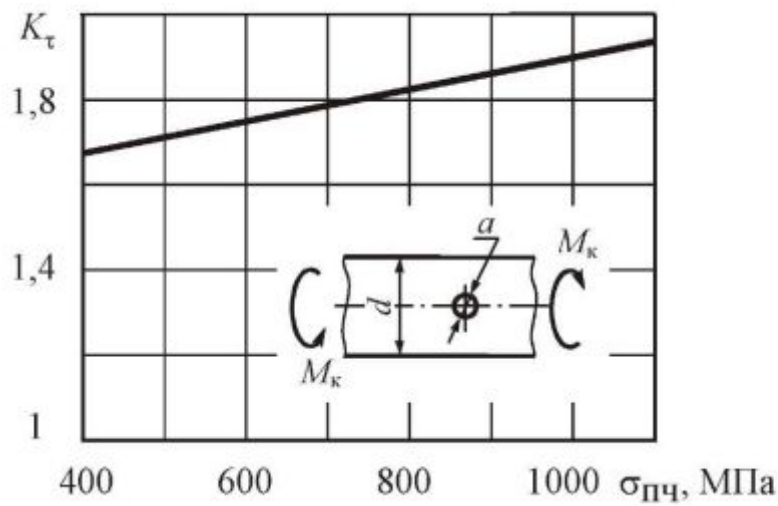


$$1 - a/d = 0,05 - 0,10$$

$$2 - a/d = 0,15 - 0,25$$

$$\sigma_n = \frac{M_n}{W_{\text{нетто}}}$$

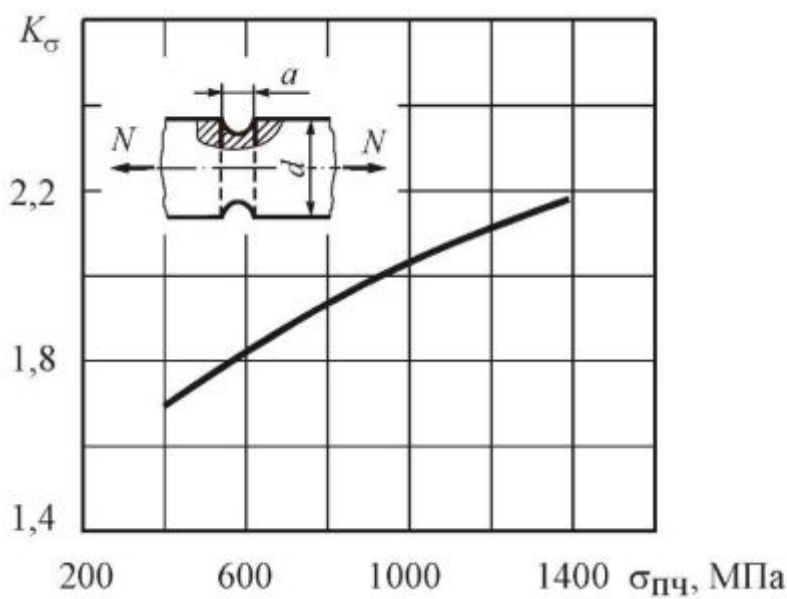
при $d = 30 - 50$ мм



$$a/d = 0,15 - 0,25$$

$$\tau_n = \frac{M_k}{W_{\text{нетто}}}$$

при $d = 30 - 50$ мм

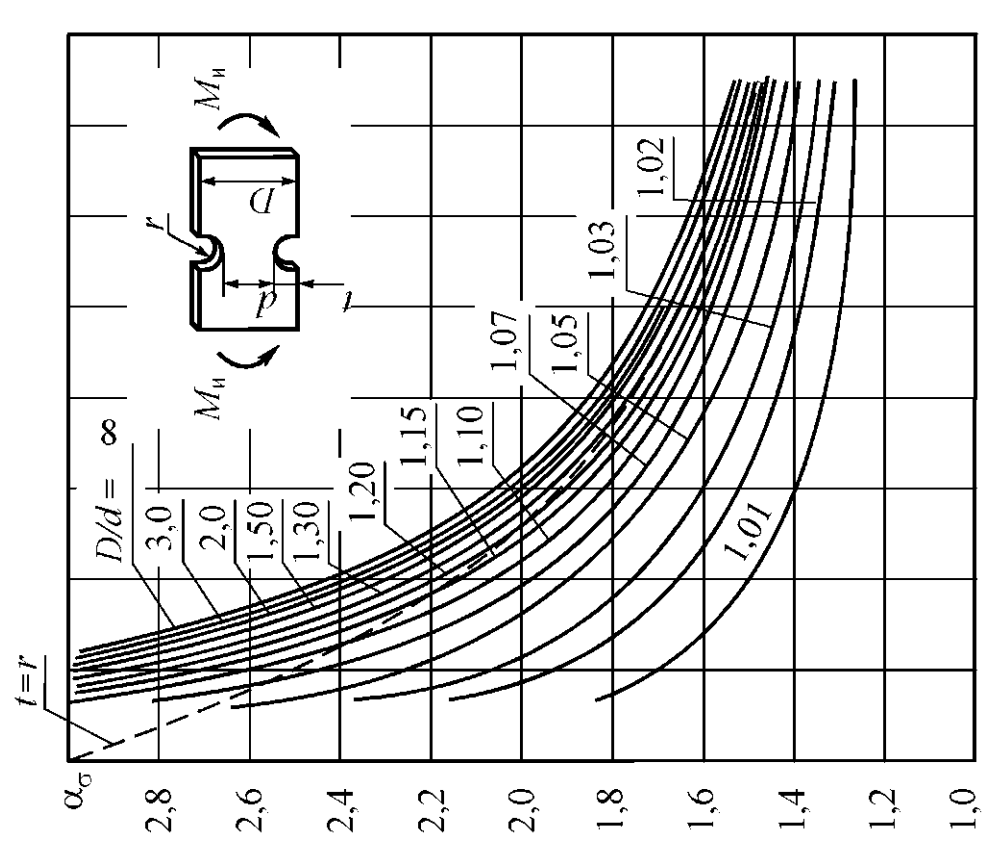
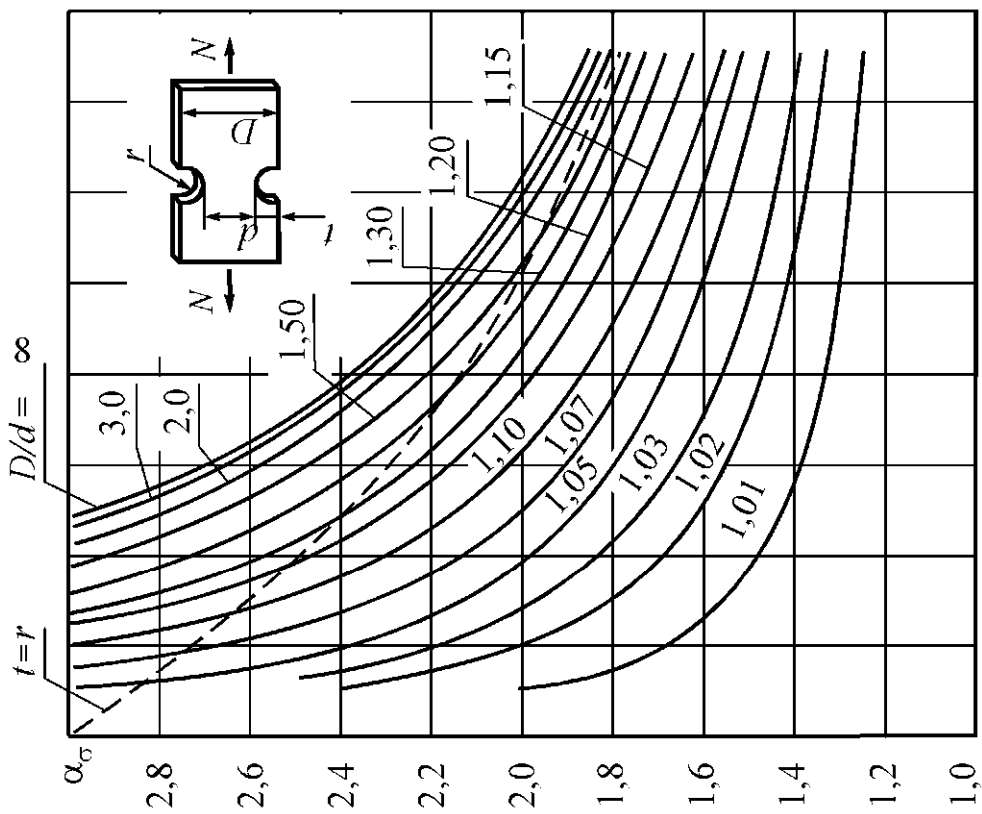


$$a/d = 0,20 - 0,45$$

$$\sigma_n = \frac{N}{\frac{\pi d^2}{4} - ad}$$

$d = 15$ мм

Рис. 12.2



Пунктирная линия $t = r$ полуокружность $r/d = 0,02$ 0,30

Рис. 12.3

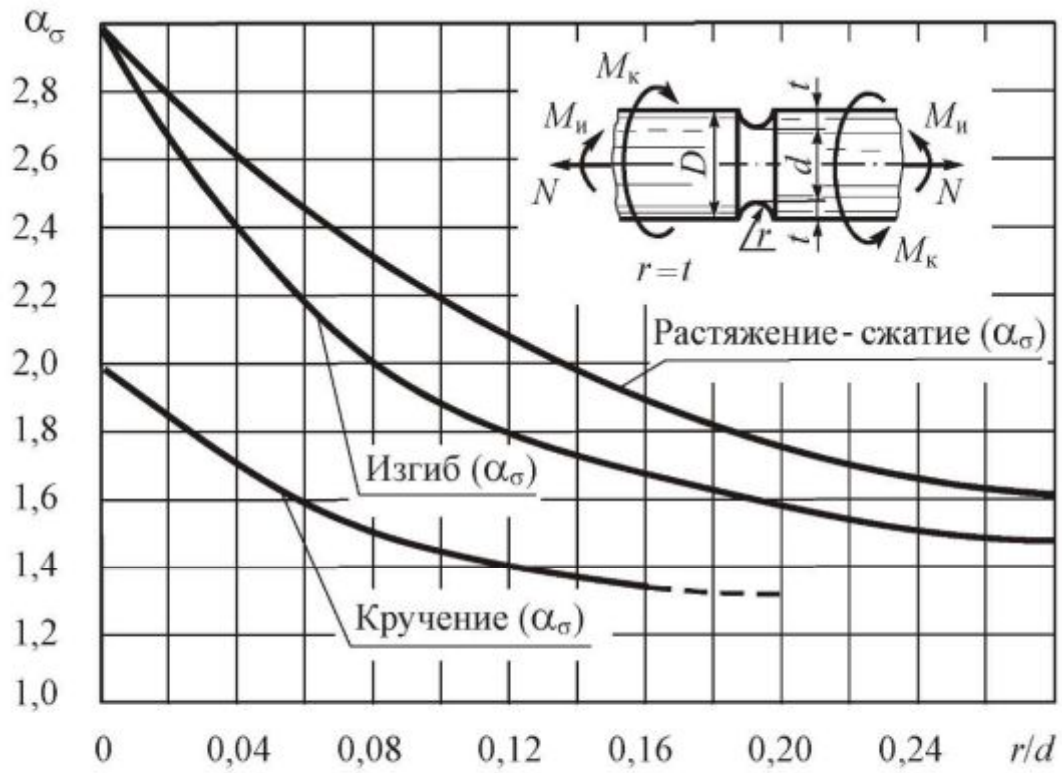


Рис. 12.4

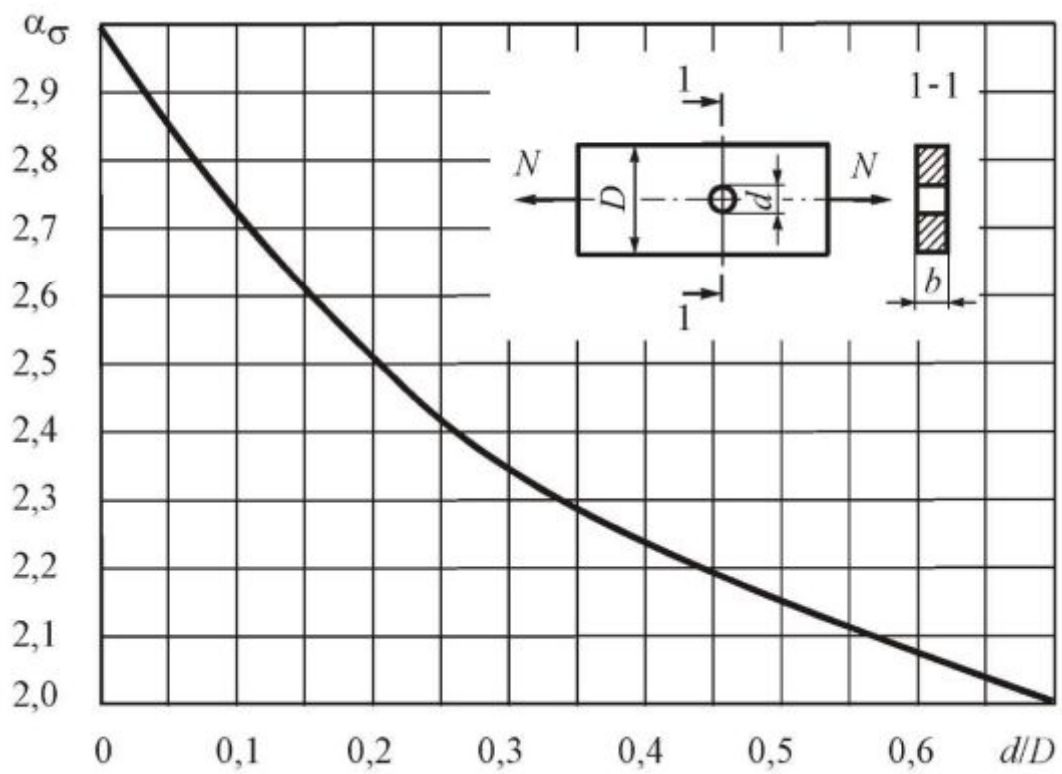


Рис. 12.5

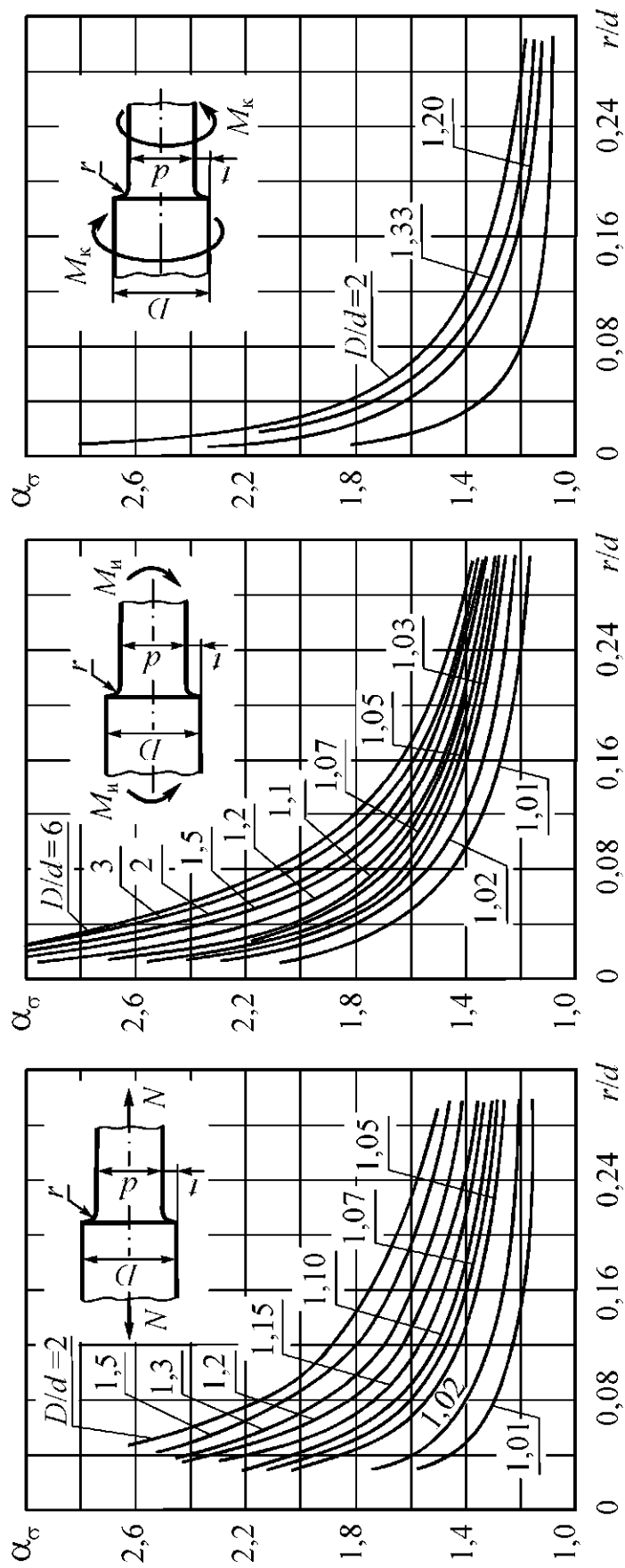


Рис. 12.6

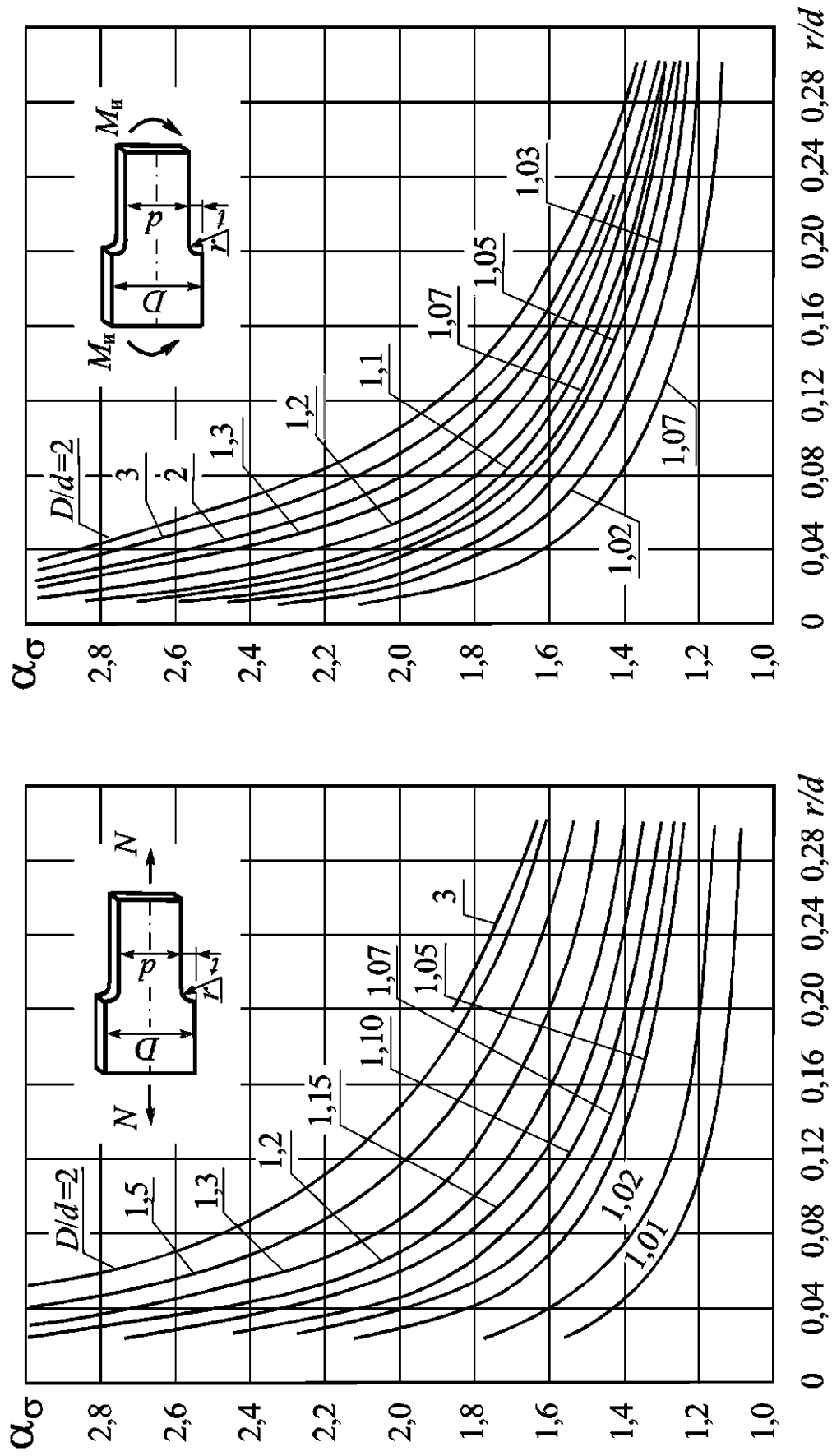


Рис. 12.7