

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
Конспект лекций

Введение. Общие понятия и принципы дисциплины «Сопротивление материалов». Реальный объект и расчетная схема. Внешние силовые факторы (классификация). Определение внутренних усилий методом мысленных сечений. Понятие о напряжениях. Нормальные и касательные напряжения и два механизма разрушения (отрыв и срез).

1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ КУРСА «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

1.1. Основные определения сопротивления материалов

Сопротивление материалов – учебная дисциплина, занимающаяся расчетом элементов конструкций на прочность, жесткость, устойчивость и долговечность, а также изучением механических свойств материалов.

Элемент конструкции – некоторая часть конструкции (сооружения, механизма), предназначенная для расчета.

Прочность – способность тела (детали, элемента конструкции) сопротивляться внешним воздействиям (силовым, температурным и т.д.) без разрушения.

Жесткость – способность тела незначительно изменять свой объем и форму под действием внешних сил.

Элементы конструкции должны проектироваться и создаваться так, чтобы они могли воспринимать все силовые воздействия (сопротивляться действию сил), без разрушения и искажения своей формы в течение достаточно длительного времени. Ответственные элементы должны выдерживать, в том числе, и аварийные нагрузки (перегрузки).

Элемент конструкции может оказаться достаточно прочным, но излишне деформативным, недостаточно жестким. Как следствие, в конструкции могут возникать колебания, затрудняющие ее эксплуатацию. Недостаточно жесткие элементы могут искривляться (выпучиваться, терять устойчивость) от действия сил.

Нагруженная конструкция пребывает в **устойчивом** состоянии, если она, будучи выведенной из него какими-либо причинами, не учитываемыми в расчете, возвращается в первоначальное состояние при устранении указанных причин. В противном случае она – неустойчива.

Долговечность состоит в способности конструкции сохранять необходимые для эксплуатации служебные свойства в течение заранее предусмотренного срока времени.

Механические свойства – характеристики материала, описывающие его поведение при внешних силовых воздействиях.

Информацию о механических свойствах можно получить путем механических испытаний, проводимых в экспериментальных лабораториях на специальных испытательных машинах (стендах).

Сопротивление материалов решает указанные задачи, основываясь как на теоретических, так и на опытных данных, имеющих в этой науке одинаково важное значение. Сопротивление материалов базируется на общих принципах механики твердого тела, физики, математики, теоретической механики, материаловедения.

1.2. Реальный объект и расчетная схема. Схематизация понятий

Реальный объект – исследуемый элемент конструкции, взятый с учетом всех своих особенностей: геометрических, физических, механических и других.

Рассчитать реальный объект практически невозможно (пришлось бы учитывать влияние слишком многих взаимосвязанных характеристик объекта), поэтому необходимо перейти к некоторой *расчетной схеме* (модели реального объекта) на основе определенной системы гипотез, идеализирующих расчетную ситуацию.

Расчетная схема – это реальный объект, у которого отброшены все детали (особенности), не связанные с расчетом, а их влияние заменено силовыми воздействиями.

Основная цель сопротивления материалов – создать практически приемлемые, простые приемы (методики) расчета типовых, наиболее часто встречающихся элементов конструкций. Необходимость перехода от реального объекта к расчетной схеме (с целью упрощения расчетов) заставляет вводить **схематизацию понятий**.

Можно выделить следующие типы схематизации:

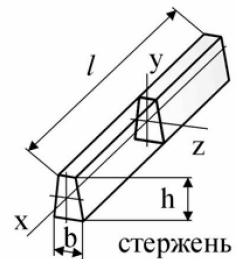
- геометрическая схематизация;*
- физическая схематизация;*
- силовая схематизация.*

Геометрическая схематизация (модель формы)

Для схематизации формы реальных объектов в сопротивлении материалов используются следующие основные типы элементов: *стержень* (брус, балка, вал), *пластина* (плита, оболочка) и *массивное тело*.

Стержень – элемент конструкции, у которого два измерения малы по сравнению с третьим.

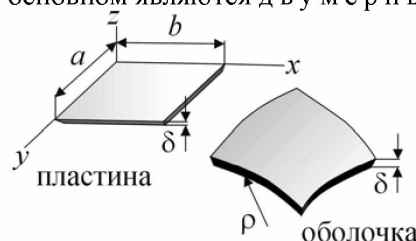
Задачи по расчету стержней в основном являются **одномерными** (линейными, т. е. решение задачи зависит от одной переменной координаты).



Пластина – элемент конструкции, у которого одно измерение (толщина) мало по сравнению с двумя другими.

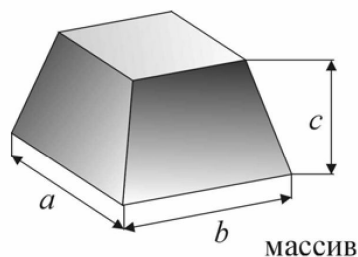
Пластина криволинейная до нагружения называется **оболочкой**.

Задачи по расчету пластин в основном являются **двумерными** (плоскими).



Массивное тело – элемент конструкции, у которого все размеры имеют один порядок.

Задачи по расчету массивных тел в основном являются *трехмерными* (пространственными).



В сопротивлении материалов рассматриваются преимущественно одномерные задачи расчета стержневых элементов конструкций. Решение более сложных двумерных и трехмерных задач расчета пластин, оболочек и массивных тел рассматривает дисциплина, называемая «Теория упругости», которая основывается на меньшем количестве исходных гипотез.

Физическая схематизация (модель материала)

Все изучаемые тела считаются выполненными (изготовленными) из материалов, условно наделенных определенными и *идеализированными* свойствами.

Материал элементов конструкций будем в дальнейшем считать *сплошным, однородным, изотропным и линейно-упругим*.

Сплошной материал – материал, не имеющий разрывов, пустот, трещин, пор, включений и т. д.

Считается, что материал непрерывно (сплошь) заполняет весь объем элемента конструкции, при этом не учитывается конкретная структура материала (зеренная, кристаллическая, волокнистая, слоистая и т. д.).

Однородный материал – материал, в каждой точке которого механические свойства одинаковы и не зависят от величины выделенного объема.

Изотропный материал – материал, свойства которого одинаковы по всем направлениям.

Таким образом, свойства изотропного материала не зависят от направления исследования, например, от направления приложения нагрузки при механических испытаниях.

В противном случае материал называется *анизотропным* (дерево, стеклопластик, слюда и др.).

Упругий материал – материал, обладающий способностью восстанавливать первоначальные форму и размеры тела после снятия внешней нагрузки.

Линейно-упругий материал – материал, подчиняющийся *закону Гука*.

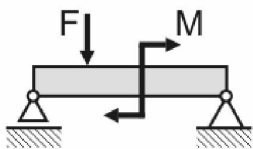
Закон Гука: «Перемещения точек упругого тела (в известных пределах нагружения) прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения».

Силовая схематизация (модель нагружения)

Для правильной постановки задачи в сопротивлении материалов весьма важно уметь классифицировать внешние силы (нагрузки), действующие на элементы конструкций.

Внешние силы – силы взаимодействия между рассматриваемым элементом конструкции и другими телами, связанными с ним.

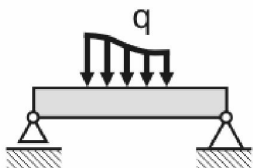
Введем следующую классификацию в н е ш н и х сил по способу приложения:



Сосредоточенные нагрузки – силы и моменты, площадь действия которых мала по сравнению с размерами объекта (приложены в точке).

Обозначения: $F(P)$, $M(T)$.

Единицы измерения: $[F]=Н$; $[M]=Н\cdot м$ в СИ или $[F]=кг$; $[M]=кг\cdot м$ в технической системе.



Распределенные нагрузки – силы, действующие а) на некоторой длине, б) по некоторой площадке, в) по объему.

Обозначение q .

Единицы измерения: а) $[q]=Н/м$, $кг/см$, $кг/мм$; б) $[q]=Н/м^2$, $кг/см^2$, $кг/мм^2$; в) $[q]=Н/м^3$, $кг/см^3$, $кг/мм^3$ и т. д.

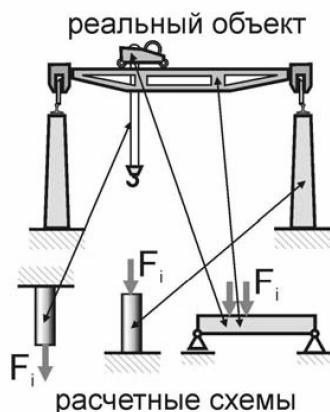
Внешние нагрузки различают также по характеру изменения во времени:

Статические нагрузки медленно и плавно возрастают от нуля до своего конечного значения, а затем остаются неизменными.

Динамические нагрузки сопровождаются ускорениями как деформированного тела, так и взаимодействующих с ним тел.

К динамическим нагрузкам относятся, например, силы действующие на ускорено движущиеся тела, ударные нагрузки и т. д.

Повторно-переменные нагрузки – силы непрерывно и периодически изменяющиеся во времени.



Теперь, введя рассмотренную схематизацию понятий, мы можем переходить к работе с расчетными схемами, к их анализу. При этом отметим, что один и тот же реальный объект может иметь несколько расчетных схем, а одной и той же расчетной схеме может быть поставлено в соответствие много различных реальных объектов. В частности, при расчете мостового крана (см. рисунок) трос и опорная колонна будут рассчитываться по расчетной схеме растянутого или сжатого стержня, а каретка и направляющие – по схеме двухопорной балки и т. д. Отсюда вытекает еще одно определение с о п р о т и в л е н и я м а т е р и а л о в .

Сопротивление материалов – инженерная дисциплина, занимающаяся прочностным (в общем смысле) анализом наиболее типичных (часто встречающихся) расчетных схем, годных для расчета л ю б ы х элементов л ю б ы х конструкций.

1.3. Определение внутренних усилий. Метод мысленных сечений

Итак, в сопротивлении материалов не учитывается реальная атомная структура материала твердого тела. Исходя из этого, сплошность и однородность тела обеспечивается не межатомными силами, а гипотетическими внутренними усилиями.

Внутренние усилия – силы взаимодействия (сцепления) между частицами тела, возникающие внутри элемента конструкции, как противодействие внешнему нагружению.

Внутренние усилия во всех случаях стремятся сохранить тело как единое целое, противодействуя всякой попытке изменить взаимное расположение частиц, т. е. деформировать и разрушить тело. Поэтому именно величиной внутренних усилий определяется возможность разрушения в том или ином опасном сечении элемента конструкции. Таким образом, для решения задач сопротивления материалов необходимо уметь выявлять, а затем определять величину и направление внутренних усилий. При их нахождении широко используется метод мысленных сечений.

Выполнение гипотезы сплошности твердого деформируемого тела обеспечивается внутренними связями, природа которых не рассматривается в сопротивлении материалов. Разрезая тело какой-либо плоскостью, мы мысленно разрушаем эти связи, но для равновесия системы заменяем нарушенные связи силами, которые называются внутренними. Для их определения следует рассмотреть равновесие любой части тела по одну сторону от плоскости мысленного сечения.

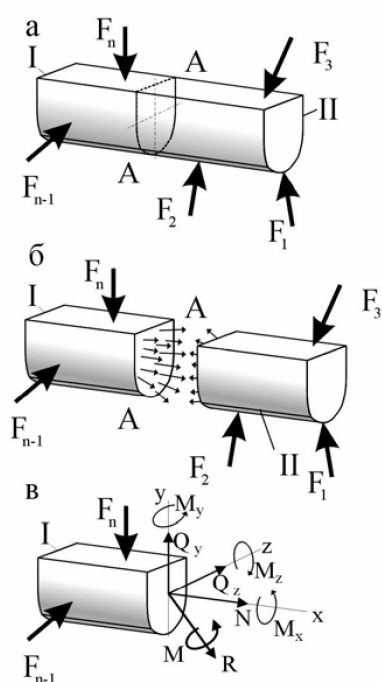
Необходимо подчеркнуть, что из уравнений равновесия для оставленной части тела определяется не закон распределения внутренних сил, а их статический эквивалент в выбранной точке приведения, то есть главный вектор с проекциями N , Q_y , Q_z и главный момент с проекциями M_x , M_y , M_z . В сопротивлении материалов эти проекции часто называют внутренними усилиями.

Метод мысленных сечений позволяет отбросить ненужный для расчета элемент конструкции (или часть этого элемента), заменить его силой, действие которой будет эквивалентно действию отброшенного элемента (его части). Если задача статически определима, то для определения этой силы достаточно использовать уравнения равновесия (уравнения статики).

Рассмотрим какой-либо элемент (например, брус), находящийся в равновесии под действием внешних сил. Пусть требуется определить внутренние усилия в произвольном сечении бруса.

Применим метод мысленных сечений:

а) мысленно рассечем элемент плоскостью $A-A$;



б) отбросим ненужную (наиболее сложно нагруженную) часть элемента, действие отброшенной части заменим внутренними усилиями;

в) внутренние усилия приведем к главному вектору R и главному моменту M , главный вектор и главный момент разложим по трем взаимно перпендикулярным осям x , y и z (ось x – нормальна к сечению элемента);

г) внутренние усилия (N , Q_y , Q_z , M_x , M_y , M_z) определим из уравнений равновесия оставшейся части элемента

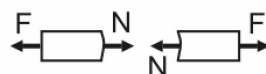
$$\sum F_x = 0; \quad \sum M_x = 0;$$

$$\sum F_y = 0; \quad \sum M_y = 0;$$

$$\sum F_z = 0; \quad \sum M_z = 0.$$

N – осевое (продольное) усилие. Осевое усилие равно сумме проекций на ось x всех внешних сил, действующих с одной стороны сечения:

$$N = \sum F_x.$$

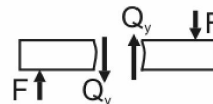


Осевое усилие вызывает *растяжение* элемента.

Q_y , Q_z – поперечные силы. Поперечные силы равны сумме проекций всех внешних сил (с одной стороны сечения) на оси y и z соответственно:

$$Q_y = \sum F_y, \quad Q_z = \sum F_z.$$

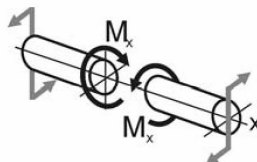
Поперечные силы вызывают *сдвиг* в сечении элемента.



M_x – крутящий момент (T , $M_{кр}$). Крутящий момент равен сумме моментов внешних сил (с одной стороны сечения) относительно оси x :

$$M_x = \sum M_x.$$

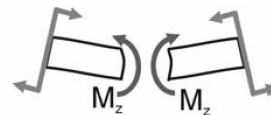
Крутящий момент вызывает *кручение* элемента.



M_y , M_z – изгибающие моменты. Изгибающие моменты равны сумме моментов внешних сил относительно осей y и z соответственно:

$$M_y = \sum M_y, \quad M_z = \sum M_z.$$

Изгибающие моменты вызывают *изгиб* элемента.



Таким образом, введя понятие внутренних усилий, мы получили возможность свести все многообразие внешних нагрузок и конфигураций элементов к 6-ти силовым факторам (N , Q_y , Q_z , M_x , M_y , M_z) и представить даже самое сложное внешнее воздействие как сочетание 4-х видов нагружения: *растяжения, сдвига, кручения, изгиба*.

1.4. Понятие о нормальных и касательных напряжениях

Установить закон (характер) распределения внутренних усилий по сечению элемента методами статики не представляется возможным: составляя уравнения равновесия для сил, приложенных к отсеченной части элемента, можем найти лишь статический эквивалент внутренних усилий, возникающих в рассматриваемом сечении. Чтобы характеризовать закон распределения внутренних усилий по сечению элемента, необходимо ввести для них числовую меру. За такую меру принимается *напряжение*.

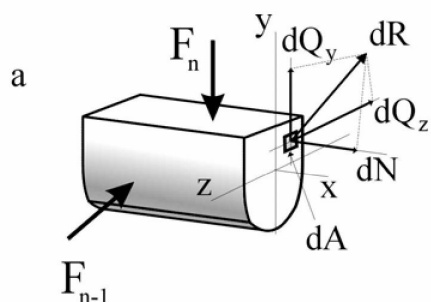
В сопротивлении материалов неявно предполагается, что внутренние усилия достаточно равномерно распределены на малой площадке в окрестности любой точки мысленного сечения. Поэтому отношение главного момента к величине площадки стремится к нулю вместе с этой площадкой. В результате на данной площадке dA остается главный вектор сил dR , отношение которого к величине площадки dA при стягивании последней в точку, называется полным напряжением p :

$$p = \frac{dR}{dA}.$$

Напряжение – есть внутренняя сила, отнесенная к единице площади в данной точке рассматриваемого сечения (иначе говоря, интенсивность внутреннего усилия в данной точке сечения).

Размерность напряжения: Н/м^2 , то есть Па (МПа, кПа).

В расчетах удобнее пользоваться не полным напряжением p , а его нормальной σ и касательными τ составляющими. Рассмотрим эти понятия.



Проекциями вектора dR на оси x, y, z будут элементарное осевое усилие dN и элементарные поперечные силы dQ_y, dQ_z . Разделив величины dN, dQ_y, dQ_z на бесконечно малую площадь dA , получим величины продольных и поперечных сил, приходящихся на единицу площади в данной точке сечения.

Нормальное напряжение (σ_x) – интенсивность осевого внутреннего усилия, или осевое усилие, приходящееся на единицу площади в данной точке рассматриваемого сечения

$$\sigma_x = \frac{dN}{dA}.$$

Касательное напряжение (τ_y, τ_z) – интенсивность внутренних поперечных сил, или поперечная сила, приходящаяся на единицу площади в данной точке рассматриваемого сечения

$$\tau_y = \frac{dQ_y}{dA}, \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dA}.$$

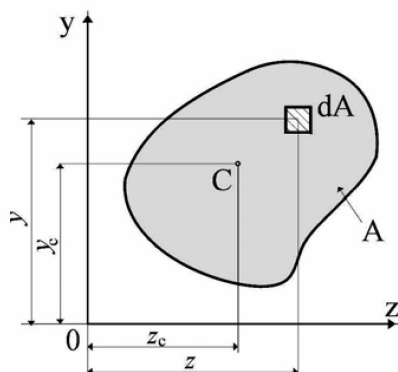
Таким образом, на площадке могут возникать два вида напряжений: нормальные и касательные. В соответствии с двумя видами напряжений на наиболее опасной площадке (там, где напряжения максимальны) может реализовываться два различных механизма разрушения – отрыв или срез.

Понятие о геометрических характеристиках однородных поперечных сечений. Центр тяжести; статические моменты; моменты инерции – осевые, центробежный, полярный; моменты сопротивления; радиусы инерции. Главные оси и главные моменты инерции. Понятие об упруго-геометрических характеристиках неоднородных сечений.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

2.1. Некоторые сведения о геометрических характеристиках

Геометрические характеристики – числовые величины (параметры), определяющие размеры, форму, расположение поперечного сечения однородного по упругим свойствам деформируемого элемента конструкции (и, как следствие, характеризующие сопротивление элемента различным видам деформации).



Рассмотрим произвольное поперечное сечение A (сечение бруса) с координатами центра тяжести z_c, y_c . В точке (z, y) выделим элемент площади dA . Основные геометрические характеристики поперечных сечений элементов конструкций (в том числе и данного сечения) описываются интегралами следующего вида

$$\int_A y^m \cdot z^n \cdot dA.$$

Рассмотрим некоторые характерные варианты записи этого интеграла и получим выражения для основных геометрических характеристик.

Площадь поперечного сечения

При $m=0, n=0$ интеграл приобретает вид

$$\int_A dA = A,$$

а соответствующая характеристика, как видим, представляет собой *площадь поперечного сечения* элемента.

Оказывается, что во многих случаях деформирования тела знание только площади его поперечного сечения недостаточно.

Статические моменты

Если $m=1, n=0$, тогда получим характеристику

$$\int_A y \cdot dA = S_z,$$

которая называется *статическим моментом* относительно оси z ,

или, при $m=0, n=1$,

$$\int_A z \cdot dA = S_y$$

статическим моментом относительно оси y .

Статический момент относительно данной оси – сумма произведений элементарных площадей dA на их расстояние до данной оси, взятая по всей площади сечения A .

На основании теоремы Вариньяна (из курса теоретической механики) следует, что

$$S_z = \int_A y \cdot dA = y_c \cdot A, \quad S_y = \int_A z \cdot dA = z_c \cdot A,$$

а для сложного сечения (состоящего из нескольких простых, каждое из которых имеет площадь A_i и координаты собственного центра тяжести y_{c_i}, z_{c_i})

$$S_z = \sum y_{c_i} \cdot A_i, \quad S_y = \sum z_{c_i} \cdot A_i.$$

Статический момент относительно какой-либо оси равен произведению всей площади фигуры на расстояние от ее центра тяжести до этой оси.

Отсюда можем получить формулы для определения **координат центра тяжести** сечения:

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum y_{c_i} \cdot A_i}{\sum A_i}, \quad z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum z_{c_i} \cdot A_i}{\sum A_i}.$$

Как видим, относительно осей, проходящих через *центр тяжести* сечения, статические моменты равны нулю, а сами эти оси называются *центральными*.

Размерность статических моментов – м^3 в системе СИ.

Осевые моменты инерции

Если $m=2, n=0$, тогда получим характеристику

$$\int_A y^2 \cdot dA = J_z,$$

которая называется *осевым моментом инерции* относительно оси z , или, при $m=0, n=2$,

$$\int_A z^2 \cdot dA = J_y -$$

осевым моментом инерции относительно оси y .

Осевой момент инерции относительно данной оси – сумма произведений элементарных площадей dA на квадрат их расстояний до данной оси, взятая по всей площади сечения A .

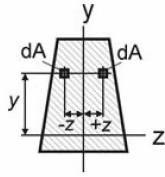
Центробежный момент инерции

Если $m=1, n=1$, тогда получим характеристику

$$\int_A z \cdot y \cdot dA = J_{zy},$$

которая называется *центробежным моментом инерции*.

Центробежный момент инерции относительно осей координат – сумма произведений элементарных площадей dA на их расстояния до этих осей, взятая по всей площади сечения A .



Если хотя бы одна из осей y или z является осью симметрии сечения, центробежный момент инерции такого сечения относительно этих осей равен нулю (так как в этом случае каждой положительной величине $z \cdot y \cdot dA$ можем поставить в соответствие точно такую же, но отрицательную, по другую сторону от оси симметрии сечения, см. рисунок).

Рассмотрим дополнительные геометрические характеристики, которые могут быть получены из перечисленных основных и также часто используются в расчетах на прочность и жесткость.

Полярный момент инерции

Полярным моментом инерции J_p называют характеристику

$$J_p = J_z + J_y.$$

С другой стороны,

$$J_p = J_z + J_y = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A z^2 \cdot dA = \int_A (y^2 + z^2) \cdot dA = \int_A \rho^2 \cdot dA.$$

Полярный момент инерции (относительно данной точки) – сумма произведений элементарных площадей dA на квадраты их расстояний ($\rho^2 = y^2 + z^2$) до этой точки, взятая по всей площади сечения A .

Размерность моментов инерции – м^4 в СИ.

Момент сопротивления

Момент сопротивления относительно некоторой оси – величина равная моменту инерции относительно той же оси отнесенному к расстоянию ($y_{\max}$ или $z_{\max}$) до наиболее удаленной от этой оси точки

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{J_y}{z_{\max}}.$$

Размерность моментов сопротивления – м^3 в СИ.

Радиус инерции

Радиусом инерции сечения относительно некоторой оси, называется величина, определяемая из соотношения:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}.$$

Радиусы инерции выражаются в м в системе СИ.

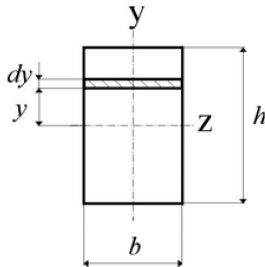
Замечание: сечения элементов современных конструкций часто представляют собой некоторую композицию из материалов с разным сопротивлением упругим деформациям, характеризуемым, как известно из курса физики, модулем Юнга E . В самом общем случае неоднородного сечения модуль Юнга является непрерывной функцией координат точек сечения, т. е. $E=E(z, y)$. Поэтому жесткость неоднородного по упругим свойствам сечения

характеризуется более сложными, чем геометрические характеристики однородного сечения, характеристиками, а именно упруго-геометрическими вида

$$\int_A E(z, y) \cdot y^m z^n dA.$$

2.2. Вычисление геометрических характеристик простых фигур

Прямоугольное сечение



Определим осевой момент инерции прямоугольника относительно оси z.

Разобьем площадь прямоугольника на элементарные площадки с размерами b (ширина) и dy (высота). Тогда площадь такого элементарного прямоугольника (заштрихован) равна $dA = b \cdot dy$. Подставляя значение dA в первую формулу, получим

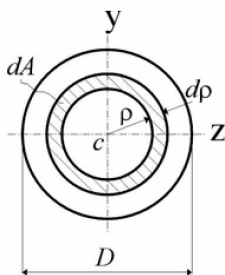
$$J_z = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

По аналогии запишем

$$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}.$$

Подобным образом можно получить геометрические характеристики и для других простых фигур.

Круглое сечение



Сначала удобно найти полярный момент инерции J_p . Затем, учитывая, что для круга $J_z = J_y$, а $J_p = J_z + J_y$, найдем $J_z = J_y = J_p/2$.

Разобьем круг на бесконечно малые кольца толщиной dr и радиусом r ; площадь такого кольца $dA = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$. Подставляя выражение для dA в выражение для J_p и интегрируя, получим

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^{D/2} \rho^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{D/2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32},$$

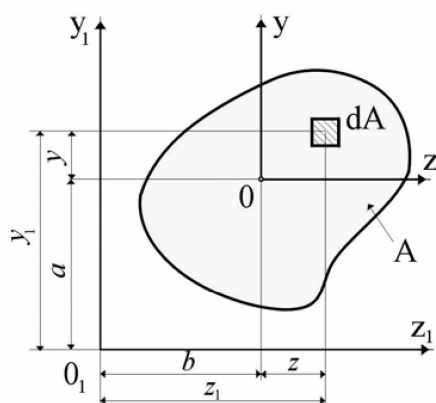
тогда

$$J_z = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}.$$

2.3. Вычисление моментов инерции относительно параллельных осей

Пусть известны моменты инерции произвольного сечения относительно центральных осей z и y:

$$J_z = \int_A y^2 \cdot dA; \quad J_y = \int_A z^2 \cdot dA; \quad J_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA.$$



Требуется определить моменты инерции этого сечения относительно «новых» осей z_1 и y_1 , параллельных центральным и отстоящих от них на расстояние a и b соответственно:

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA; \quad J_{y_1} = \int_A z_1^2 \cdot dA; \quad J_{z_1 y_1} = \int_A z_1 \cdot y_1 \cdot dA.$$

Координаты любой точки в «новой» системе координат $z_1 O_1 y_1$ можно выразить через координаты в «старых» осях z и y так:

$$z_1 = z + b; \quad y_1 = y + a.$$

Подставляем эти значения в формулы для моментов инерции в «новых» осях и интегрируем почленно:

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y + a)^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + 2 \cdot a \cdot \int_A y \cdot dA + a^2 \cdot \int_A dA,$$

$$J_{z_1} = J_z + 2 \cdot a \cdot S_z + a^2 \cdot A.$$

Так как оси z и y – центральные, то $S_z = 0$.

Окончательно можем записать формулы «перехода» при параллельном переносе осей:

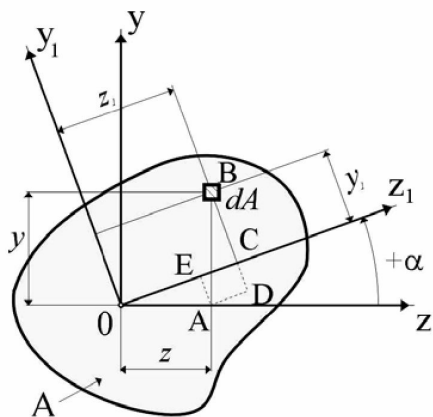
$$J_{z_1} = J_z + a^2 \cdot A;$$

$$J_{y_1} = J_y + b^2 \cdot A;$$

$$J_{y_1 z_1} = J_{yz} + a \cdot b \cdot A.$$

Отметим, что координаты a и b необходимо подставлять с учетом их знака (в системе координат $z_1 O_1 y_1$).

2.4. Вычисление моментов инерции при повороте координатных осей



Пусть известны моменты инерции произвольного сечения относительно центральных осей z , y :

$$J_z = \int_A y^2 \cdot dA; \quad J_y = \int_A z^2 \cdot dA; \quad J_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA.$$

Повернем оси z , y на угол α против часовой стрелки, считая угол поворота осей в этом направлении положительным.

Требуется определить моменты инерции относительно «новых» (повернутых) осей z_1 и y_1 :

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA; \quad J_{y_1} = \int_A z_1^2 \cdot dA; \quad J_{z_1 y_1} = \int_A z_1 \cdot y_1 \cdot dA.$$

Координаты элементарной площадки dA в «новой» системе координат $z_1 y_1$ можно выразить через координаты в «старых» осях так:

$$z_1 = OC = OE + AD = z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha ;$$

$$y_1 = BC = BD - EA = y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha .$$

Подставляем эти значения в формулы для моментов инерции в «новых» осях и интегрируем почленно:

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dA = \\ &= \cos^2 \alpha \cdot \int_A y^2 \cdot dA - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \int_A z \cdot y \cdot dA + \sin^2 \alpha \cdot \int_A z^2 \cdot dA = \\ &= J_z \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha - J_{zy} \cdot \sin 2\alpha . \end{aligned}$$

Проделав аналогичные преобразования с остальными выражениями, запишем окончательно формулы «перехода» при повороте координатных осей:

$$J_{z_1} = J_z \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha - J_{zy} \cdot \sin 2\alpha ; \quad (2.1)$$

$$J_{y_1} = J_y \cdot \cos^2 \alpha + J_z \cdot \sin^2 \alpha + J_{zy} \cdot \sin 2\alpha ; \quad (2.2)$$

$$J_{z_1 y_1} = \frac{J_z - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + J_{zy} \cdot \cos 2\alpha . \quad (2.3)$$

Отметим, что если сложить два первых уравнения, то получим

$$J_{z_1} + J_{y_1} = J_z + J_y = J_p ,$$

т. е. полярный момент инерции есть величина и н в а р и а н т н а я (другими словами, не-изменная при повороте координатных осей).

2.5. Главные оси и главные моменты инерции

До сих пор рассматривались геометрические характеристики сечений в произвольной системе координат, однако наибольший практический интерес представляет система координат, в которой сечение описывается наименьшим количеством геометрических характеристик. Такая «особая» система координат задается положением главных осей сечения. Введем понятия: главные оси и главные моменты инерции.

Главные оси – две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, при этом осевые моменты инерции принимают экстремальные значения (максимум и минимум).

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются **главными центральными осями**.

Моменты инерции относительно главных осей называются **главными моментами инерции**.

Главные центральные оси принято обозначать буквами u и v ; главные моменты инерции – J_u и J_v (по определению $J_{uv}=0$).

Выведем выражения, позволяющие находить положение главных осей и величину главных моментов инерции. Зная, что $J_{uv}=0$, воспользуемся уравнением (2.3):

$$J_{uv} = \frac{J_z - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 + J_{zy} \cdot \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot J_{zy}}{J_z - J_y}. \quad (2.4)$$

Угол α_0 определяет положение главных осей относительно любых центральных осей z и y . Угол α_0 откладывается между осью z и осью u и считается положительным в направлении прот и в часовой стрелки.

Заметим, что если сечение имеет ось симметрии, то, в соответствии со свойством центробежного момента инерции (см. разд.2.1, п.4), такая ось всегда будет главной осью сечения.

Исключая угол α в выражениях (2.1) и (2.2) с помощью (2.4), получим формулы для определения главных осевых моментов инерции:

$$J_{\begin{matrix} max \\ min \end{matrix}} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4 \cdot J_{yz}^2}.$$

Запишем правило: ось максимум всегда составляет меньший угол с той из осей (z или y), относительно которой момент инерции имеет большее значение.

Растяжение (сжатие) элементов конструкций. Определение внутренних усилий, напряжений, деформаций (продольных и поперечных). Коэффициент поперечных деформаций (коэффициент Пуассона). Гипотеза Бернулли и принцип Сен-Венана. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии. Коэффициент запаса прочности. Расчет по допускаемым напряжениям.

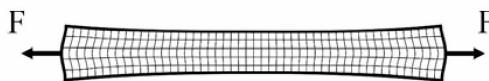
3. ПРОСТЫЕ ВИДЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

3.1. Внутренние усилия и напряжения при растяжении (сжатии)

Растяжение (сжатие) – простой вид сопротивления, при котором стержень нагружен силами, параллельными продольной оси стержня и приложенными в центр тяжести его сечения.



Рассмотрим стержень упруго растянутый центрально приложенными сосредоточенными силами F .

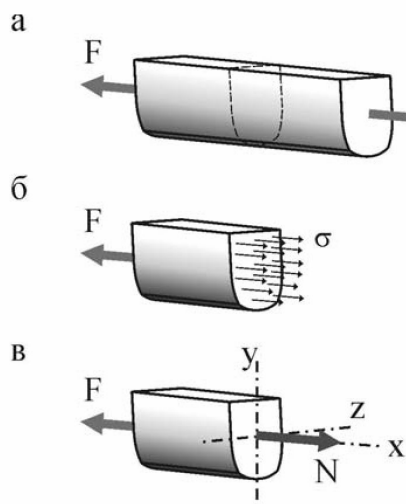


Прежде чем перейти к исследованию внутренних усилий и напряжений, возникающих в растянутом стержне, рассмотрим некоторые гипотезы, связанные с характером деформирования такого стержня и имеющие в сопротивлении материалов исключительно важное значение.

Принцип Сен-Венана: в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения сил, распределение напряжений и деформаций мало зависит от способа приложения нагрузок.

Принцип Сен-Венана дает возможность вести расчет без учета местных (локальных) деформаций, возникающих вблизи от точек приложения внешних сил (см. рисунок) и отличающихся от деформаций основного объема материала, что в большинстве случаев упрощает решение задачи.

Гипотеза плоских сечений (гипотеза Я. Бернулли): поперечные сечения стержня плоские и перпендикулярные его оси до деформации остаются плоскими и перпендикулярными оси и после деформации (см. рисунок).



Используя метод мысленных сечений, определим *внутренние усилия в растянутом стержне*:

а) стержень, нагруженный растягивающими силами F и находящийся в равновесии, пересекаем произвольным сечением;

б) отбрасываем одну из частей стержня, а ее действие на другую часть компенсируем внутренними усилиями, интенсивностью σ ;

в) осевое внутреннее усилие N , возникающее в сечении стержня, определим, составляя уравнения равновесия для отсеченной части:

$$N = \sum F_x.$$

Проецируя внешнюю силу F , действующую на отсеченную часть стержня, на другие оси (y и z), а также составляя уравнения моментов относительно координатных осей, легко убедиться, что осевое усилие N является единственным внутренним усилием, возникающим в сечении стержня (остальные тождественно равны нулю).

Таким образом, при растяжении (сжатии) из шести внутренних усилий в сечении стержня возникает только одно – **осевое усилие N** .

Нормальные напряжения σ_x , возникающие в сечении стержня, связаны с осевым усилием N следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{dN}{dA}, \text{ или } N = \int_A \sigma_x \cdot dA.$$

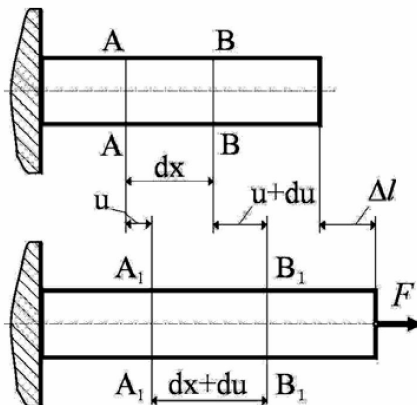
Учитывая, что в соответствии с гипотезой Бернулли напряжения равномерно распределены по поперечному сечению (т. е. $\sigma_x = \text{const}$), можно записать:

$$N = \sigma_x \cdot A.$$

Таким образом, **нормальные напряжения** при растяжении (сжатии) определяются как

$$\sigma_x = \frac{N}{A}.$$

3.2. Перемещения и деформации при растяжении (сжатии)



Рассмотрим стержень, находящийся под действием растягивающей нагрузки. Выделим (до деформации) два произвольных сечения стержня $A-A$ и $B-B$, отстоящие друг от друга на расстоянии dx . От приложенной нагрузки сечение $A-A$ переместится в положение A_1-A_1 на расстояние u , а сечение $B-B$ – в положение B_1-B_1 на расстояние $u+du$ (du – бесконечно малая величина). Следовательно, абсолютное удлинение отрезка dx равно разности его размеров до и после деформации $\Delta dx = du$.

Относительная продольная деформация точек сечения $A-A$ стержня при растяжении

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}.$$

Для линейно-упругого материала относительная деформация при растяжении связана с нормальными напряжениями **по закону Гука**:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E},$$

или, учитывая, что $\sigma_x = N/A$,

$$\varepsilon_x = \frac{N}{E \cdot A},$$

здесь E – модуль нормальной упругости (модуль Юнга), постоянный коэффициент, который является константой материала (например, для стали $E=2 \cdot 10^{11}$ Па, для меди $E=1 \cdot 10^{11}$ Па, для титана $E=1,2 \cdot 10^{11}$ Па).

Исходя из этих формул, можно записать выражение для **перемещений** точек растягиваемого стержня в рассматриваемом сечении

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{E \cdot A} \Rightarrow du = \frac{N}{E \cdot A} \cdot dx.$$

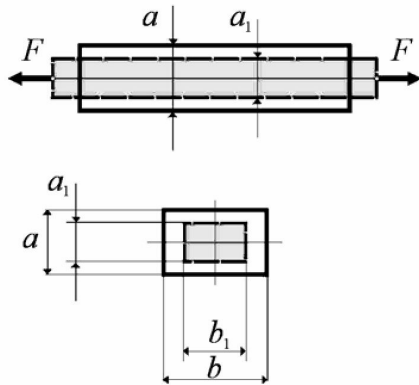
Тогда, полное удлинение стержня при растяжении Δl , равное перемещению точек правого крайнего сечения, относительно левого крайнего:

$$\Delta l = u = \int_0^l \frac{N}{E \cdot A} \cdot dx.$$

При постоянстве величин N , A , E вдоль оси стержня, абсолютное удлинение можно найти так:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}.$$

При растяжении стержень деформируется не только в продольном направлении, но и в поперечном.



Абсолютная поперечная деформация стержня определяется как разность его поперечных размеров до и после деформации:

$$\Delta a = a_1 - a; \quad \Delta b = b_1 - b.$$

Относительная поперечная деформация стержня определяется отношением абсолютной поперечной деформации к соответствующему первоначальному размеру.

Относительная поперечная деформация при растяжении (сжатии) для изотропных материалов во всех направлениях одинакова:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta b}{b}; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{\text{попер}}.$$

Между поперечной и продольной относительными деформациями при растяжении (сжатии) в пределах применимости закона Гука существует постоян-

ное соотношение, которое называется коэффициентом поперечных деформаций (коэффициентом Пуассона μ).

Коэффициент Пуассона равен абсолютной величине отношения поперечной деформации к продольной

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{\text{попер}}}{\varepsilon_{\text{прод}}} \right| = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| = \left| \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \right|.$$

Коэффициент Пуассона – безразмерная величина.

Так как продольная и поперечная деформация для большинства конструктивных материалов имеют противоположные знаки, можем записать

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \cdot \varepsilon_x,$$

или, учитывая, что, согласно закону Гука,

$$\varepsilon_x = \sigma_x / E,$$

запишем

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \cdot \frac{\sigma_x}{E}.$$

Коэффициент Пуассона μ наряду с модулем Юнга E характеризуют упругие свойства материала. Для изотропных материалов коэффициент Пуассона лежит в пределах от 0 до 0,5 (пробка $\mu \approx 0$; сталь $\mu \approx 0,3$; каучук $\mu \approx 0,5$).

3.3. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении (сжатии)

Одна из основных задач сопротивления материалов – обеспечить надежные размеры деталей, подверженных тому или иному силовому, температурному или другому воздействию. Указанные размеры можно определить из расчета на прочность или жесткость. Рассмотрим условия прочности и жесткости для случаев простого растяжения (сжатия). Опасность наступления разрушения характеризуется величинами наибольших нормальных и касательных напряжений, возникающих при нагружении в опасных (т. е. наиболее напряженных) точках сечения. Очевидно, что реальные материалы не могут выдерживать сколь угодно большие напряжения. Поэтому величины наибольших напряжений из условия надежности работы детали необходимо ограничивать некоторыми допустимыми значениями, такими, чтобы деталь испытывала только упругие деформации. Их называют **допускаемыми напряжениями**. При растяжении и сжатии допускаемые напряжения обозначают $[\sigma_+]$, $[\sigma_-]$ соответственно (принято также обозначение σ_{adm}).

Если из расчета известны максимальные и минимальные (по алгебраической величине) напряжения, возникающие в опасном сечении детали, то **условия прочности** могут быть записаны следующим образом:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma_+], \quad |\sigma_{min}| \leq [\sigma_-].$$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, что характерно для пластичных материалов (более строго – для материалов в пластичном состоянии), а значит $[\sigma_+] = [\sigma_-] = [\sigma]$, то

$$\sigma_{max} = \frac{|N|_{max}}{A},$$

и **условие прочности при растяжении (сжатии)** запишем в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{|N|_{max}}{A} \leq [\sigma].$$

В некоторых случаях для обеспечения нормальной работы машин и сооружений размеры их деталей нужно выбирать так, чтобы обеспечивалось условие жесткости, то есть ограничить предельные деформации (перемещения) элементов конструкции.

Условие жесткости, ограничивающее изменение длины элемента, имеет следующий общий вид:

$$\Delta l \leq [\Delta l],$$

где Δl – изменение размеров детали; $[\Delta l]$ – допускаемая величина этого изменения.

Учитывая, что при растяжении (сжатии) абсолютное удлинение в общем виде определяется как алгебраическая сумма величин Δl по участкам

$$\Delta l = \sum \int \frac{N(x) \cdot dx}{E \cdot A(x)},$$

условие жесткости при растяжении (сжатии) запишем следующим образом:

$$|\Delta l| = \left| \sum \int \frac{N(x) \cdot dx}{E \cdot A(x)} \right| \leq [\Delta l].$$

3.4. Допускаемые напряжения. Коэффициент запаса прочности. Виды расчетов

Итак, размеры деталей необходимо подбирать таким образом, чтобы под действием приложенных нагрузок элемент конструкции не разрушался и не получал деформаций, превышающих допустимые. Отметим при этом, что в большинстве машиностроительных деталей не допускается возникновение остаточных деформаций под действием эксплуатационных нагрузок.

Как показывают механические испытания (испытания на растяжение и сжатие), разрушение хрупких материалов начинается, когда напряжения в сечении элемента конструкции превысят величину временного сопротивления (предела прочности) σ_B . Поэтому для хрупких материалов, деформация которых, как правило, незначительна, за **о п а с н о е** (предельное) напряжение следует принимать именно предел прочности σ_B :

$$\sigma_o = \sigma_B.$$

Для пластичных материалов за о п а с н о е (предельное) напряжение следует принимать предел текучести σ_T (или условный предел текучести $\sigma_{0,2}$, если площадка текучести отсутствует), так как за пределом текучести в пластичных материалах возникают значительные пластические деформации, приводящие при сбросе нагрузки до нуля к появлению остаточных напряжений, следовательно:

$$\sigma_o = \sigma_T.$$

Естественно, что эти опасные напряжения не могут быть использованы в качестве допускаемых. Их следует уменьшить настолько, чтобы в эксплуатационных условиях действующие напряжения гарантированно были меньше опасных, а деформации были упругими. Таким образом, **допускаемое напряжение** может быть определено по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_o}{n},$$

где σ_o – опасное напряжение; n – **коэффициент запаса прочности**.

Допускаемые напряжения – это наибольшие напряжения, которые можно допустить в конструкции при условии его безопасной, надежной и долговечной работы.

Выбор коэффициента запаса прочности зависит от состояния материала (хрупкое или пластичное), характера приложения нагрузки (статическая, динамическая или повторно-переменная) и некоторых общих факторов, основными из которых являются:

- 1) различие механических характеристик материала в лабораторных образцах и реальной детали;
- 2) неточность задания величины внешних нагрузок;
- 3) неточность расчетных схем и приближенность методов расчета;
- 4) учет конкретных условий работы рассчитываемой конструкции;
- 5) долговечность и значимость проектируемого сооружения или машины.

Для конструкционных сталей значение коэффициента запаса прочности принимается $n=1,4 \dots 1,6$; для хрупких материалов $n=2,5 \dots 3$; для древесины $n=3,5 \dots 6$. Тогда величина допускаемых напряжений для среднеуглеродистых сталей $[\sigma]=140 \dots 180$ МПа; для высоколегированных $[\sigma]=200 \dots 400$ МПа.

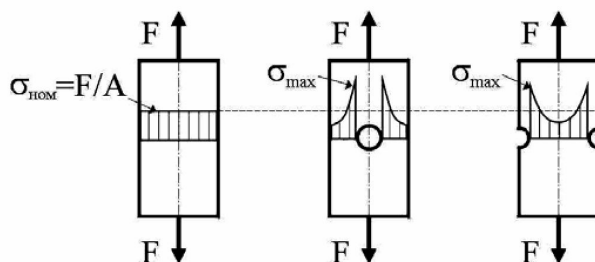
Используя условие прочности, можно решать три типа задач:

- 1) **проектировочный расчет** – по известным нагрузкам для известного материала найти надежные с точки зрения прочности размеры поперечного сечения стержня (спроектировать прочную деталь);
- 2) **проверочный расчет** – по заданным размерам и материалу детали проверить, может ли она выдержать приложенную нагрузку;

3) **расчет по несущей способности (грузоподъемности)** – по известным размерам детали, материалу и схеме нагружения определить допустимую величину нагрузки на деталь.

3.5. Понятие о концентрации напряжений

Равномерное распределение напряжений по сечению растянутого стержня сохраняется только в случае, если сечения стержня остаются постоянными по его длине. Резкие изменения площади поперечного сечения вследствие наличия поперечных отверстий, выточек, канавок, надрезов приводят к неравномерному распределению напряжений (вызывают концентрацию напряжений) и называются концентраторами напряжений.



При исследовании явления концентрации напряжений вводят понятия номинального напряжения, наибольшего местного напряжения и коэффициента концентрации напряжений.

Номинальное напряжение – напряжение, вычисленное на основе предположения об отсутствии концентрации напряжений.

При растяжении номинальное напряжение вычисляется как

$$\sigma_{\text{ном}} = N/A.$$

Наибольшее местное напряжение – максимальное напряжение, действующее в месте концентрации напряжений.

Местные напряжения, действующие в области концентратора напряжений, могут быть найдены теоретически – методами теории упругости, либо экспериментально – непосредственным измерением при помощи специальных приборов и методик.

Коэффициент концентрации напряжений – отношение максимального местного напряжения к номинальному напряжению

$$\alpha = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma_{\text{ном}}}.$$

Коэффициент концентрации зависит от вида концентратора, размеров и формы образца, а также свойств материала.

Понятие о статически определимых и неопределимых системах. Порядок решения статически неопределимых задач. Расчет статически неопределимой стержневой системы при растяжении и сжатии (на примере семестрового задания). Влияние температуры, монтажных зазоров и натягов на прочность статически неопределимой конструкции.

4. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

4.1. Основные сведения о статически неопределимых системах

В инженерной практике часто встречаются системы, в которых число наложенных связей больше числа уравнений равновесия. В этих системах, используя только уравнения равновесия, невозможно определить ни усилия в связях (реакции опор), ни внутренние усилия, возникающие в элементах конструкций. Такие системы называют статически неопределимыми.

Статически неопределимые системы – это упругие стержневые системы (конструкции), в которых количество неизвестных внутренних усилий и реакций опор больше числа уравнений статики, возможных для этой системы.

Кроме уравнений статики для расчета таких систем (конструкций) приходится привлекать дополнительные условия, описывающие деформацию элементов данной системы. Их условно называют уравнениями перемещений или уравнениями совместности деформаций (а сам метод решения иногда называют методом сравнения деформаций).

Степень статической неопределимости системы – это разность между числом неизвестных и числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы.

Количество дополнительных уравнений перемещений, необходимых для раскрытия статической неопределимости, должно быть равно степени статической неопределимости системы.

4.2. Порядок решения статически неопределимых задач

Статически неопределимые конструкции будем рассчитывать, решая совместно уравнения, полученные в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задач. При этом будем придерживаться следующего порядка:

1. **Статическая сторона задачи.** Составляем уравнения равновесия отсеченных элементов конструкции, содержащие неизвестные усилия. Определяем степень статической неопределимости.
2. **Геометрическая сторона задачи.** Рассматривая систему в деформированном состоянии, устанавливаем связи между деформациями и перемещениями отдельных элементов конструкции и записываем уравнения совместности деформаций (уравнения перемещений).

3. **Физическая сторона задачи.** На основании закона Гука выражаем перемещения или деформации элементов конструкции через действующие в них неизвестные (пока) усилия.

4. **Математическая сторона задачи (синтез).** Решая совместно статические, геометрические и физические уравнения, находим неизвестные усилия.

Рассмотрим примеры расчета некоторых простейших статически неопределимых конструкций.

4.3. Примеры решения статически неопределимых задач

Пример 1

Дано:

Стальные стержни BC и AD поддерживают абсолютно жесткую (недеформирующуюся) балку AB , на которую действует сила F . Площади поперечных сечений и длины стержней известны: $A_{BC}=A$, $A_{AD}=2\cdot A$, $l_{OB}=2\cdot l_{OA}$, $l_{BC}=l_{AD}$.

Определить:

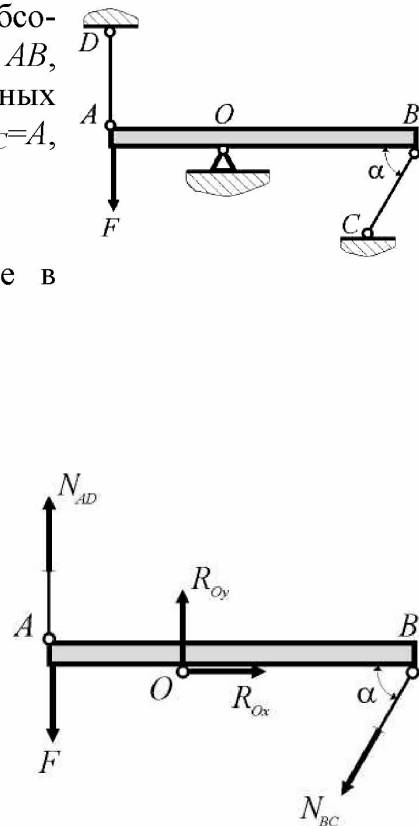
Внутренние усилия N_{AD} и N_{BC} , возникающие в стержнях.

Решение.

1. Статическая сторона задачи

Покажем все силы, действующие на конструкцию, включая реакции опор и внутренние усилия в стержнях. Для этого, используя метод мысленных сечений, «разрежем» стержни и избавимся от всех наложенных на систему связей.

Внутренние усилия в стержнях для удобства расчета будем считать растягивающими (положительными) и направленными от сечения стержня.



Выясним степень статической неопределимости. Балка находится в равновесии под действием пяти сил (F , R_{Ox} , R_{Oy} , N_{AD} , N_{BC}), из которых **четыре** неизвестны (R_{Ox} , R_{Oy} , N_{AD} , N_{BC}). Статика для плоской системы сил дает **три** уравнения равновесия

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M_O = 0,$$

следовательно, заданная система **один** раз статически неопределима:

$$4 \text{ (неизвестных)} - 3 \text{ (уравнения статики)} = 1 \text{ (степень статич. неопр. системы).}$$

Так как определять реакции шарнира по условию задачи не требуется, то из трех используем только одно уравнение равновесия:

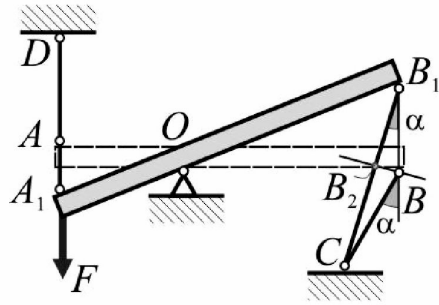
$$\sum M_O = 0 \Rightarrow N_{AD} \cdot l_{OA} - F \cdot l_{OA} + N_{BC} \cdot l_{OB} \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$N_{AD} + 2 \cdot N_{BC} \cdot \sin \alpha = F. \quad (4.1)$$

2. Геометрическая сторона задачи

Для составления дополнительного уравнения (уравнения совместности деформаций) рассмотрим систему в деформированном виде.

Балка AB повернется вокруг шарнира O , при этом точки A и B займут новые положения A_1 и B_1 . Вследствие малости перемещений узлов конструкции действительные перемещения точек A и B по дугам окружности заменим перемещениями по вертикальным прямым AA_1 и BB_1 . По той же причине будем считать, что углы между элементами конструкции до и после деформации остаются постоянными.



Из подобия треугольников OAA_1 и OBB_1 имеем

$$\frac{AA_1}{l_{OA}} = \frac{BB_1}{l_{OB}} \Rightarrow BB_1 = \frac{l_{OB}}{l_{OA}} \cdot AA_1 \Rightarrow BB_1 = 2 \cdot AA_1,$$

при этом заметим, что удлинение стержня AD равно перемещению AA_1 :

$$\Delta l_{AD} = AA_1.$$

Так как $A_1D > AD$, то, очевидно, что стержень AD растягивается, и его удлинение будем считать положительным.

Построим треугольник BB_1B_2 , опустив перпендикуляр из точки B на отрезок B_1C (получим точку B_2).

Удлинение стержня BC найдем из рассмотрения треугольника BB_1B_2 , учитывая, что $\Delta l_{BC} = B_1B_2$,

$$\Delta l_{BC} = B_1B_2 = BB_1 \cdot \sin \alpha.$$

Так как $B_1C > B_2C$, то, очевидно, что стержень BC растягивается, и его удлинение будем считать положительным.

Учитывая, что $BB_1 = 2 \cdot AA_1$ запишем уравнение совместности деформаций стержней AD и BC :

$$\Delta l_{BC} = BB_1 \cdot \sin \alpha = 2 \cdot AA_1 \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \Delta l_{AD} \cdot \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Delta l_{BC} = 2 \cdot \Delta l_{AD} \cdot \sin \alpha. \quad (4.2)$$

3. Физическая сторона задачи

Здесь необходимо установить связь между перемещениями и внутренними усилиями. Такая связь устанавливается при помощи закона Гука с учетом знаков Δl и N (в данной задаче они – положительные):

$$\begin{aligned}\Delta l_{AD} &= \frac{N_{AD} \cdot l_{AD}}{E \cdot A_{AD}}, \\ \Delta l_{BC} &= \frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{E \cdot A_{BC}}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

4. Математическая сторона задачи (синтез)

Подставим выражения закона Гука (4.3) в формулы уравнения совместности деформаций (4.2):

$$\begin{aligned}\frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{E \cdot A_{BC}} &= 2 \cdot \frac{N_{AD} \cdot l_{AD}}{E \cdot A_{AD}} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \\ N_{BC} &= N_{AD} \cdot \sin \alpha.\end{aligned}$$

Данное уравнение вместе с уравнением равновесия (4.1) образуют, так называемую, полную систему уравнений, решение которой позволяет найти все неизвестные усилия в стержнях:

$$\begin{cases} N_{BC} = N_{AD} \cdot \sin \alpha, \\ N_{AD} + 2 \cdot N_{BC} \cdot \sin \alpha = F, \end{cases}$$
$$N_{AD} = \frac{F}{1 + 2 \cdot \sin^2 \alpha}, \quad N_{BC} = \frac{F \cdot \sin \alpha}{1 + 2 \cdot \sin^2 \alpha}.$$

Напряжения в стержнях при растяжении:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}}, \quad \sigma_{AD} = \frac{N_{AD}}{A_{AD}}.$$

Если в задаче требуется определить площади сечений стержня, то необходимо воспользоваться условием прочности:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} \leq [\sigma], \quad \sigma_{AD} = \frac{N_{AD}}{A_{AD}} \leq [\sigma],$$

отсюда

$$A_{BC} = A \geq \frac{N_{BC}}{[\sigma]}, \quad A_{AD} = 2 \cdot A \geq \frac{N_{AD}}{[\sigma]},$$

при этом необходимо проверить оба условия, а площадь A принять равной большему из двух полученных значений.

Отметим, что при решении статически неопределимых задач обязательно должны быть заданы либо площади сечений стержней, либо, по крайней мере, соотношения этих площадей.

4.4. Начальные (монтажные) и температурные напряжения

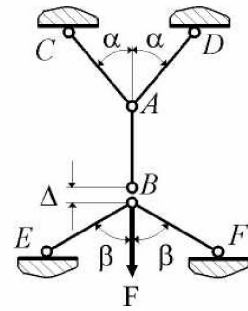
Пример 2

Дано:

Стержневая система, состоящая из стержней одинаковой длины l и одинаковой площади сечения A , загружена силой F . При этом при сборке системы за счет зазора Δ в стержнях были созданы начальные (монтажные) напряжения и температурные напряжения за счет нагрева стержня AB на температуру t .

Определить:

Внутренние усилия, возникающие в стержнях.



Решение

1. Статическая сторона задачи

Применяя метод мысленных сечений, вырежем каждый из шарниров A и B и запишем для них уравнения равновесия.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{AC} = N_{AD}$$

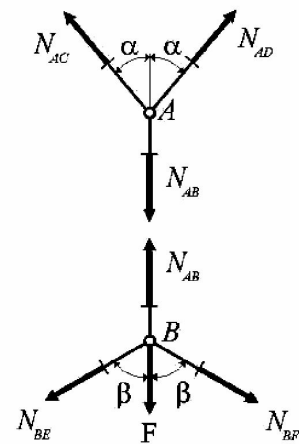
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{AB} = 2 \cdot N_{AC} \cdot \cos \alpha$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{BE} = N_{BF}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{AB} = 2 \cdot N_{BE} \cdot \cos \beta$$

Шарнир A

Шарнир B



Как видим, в данные четыре уравнения входят пять неизвестных внутренних усилий, то есть система один раз статически неопределима (дополнительно требуется составить одно уравнение совместности деформаций стержней).

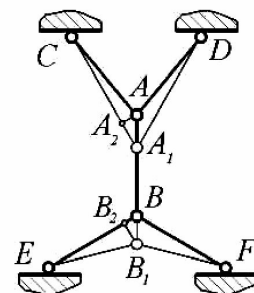
2. Геометрическая сторона задачи

Рассмотрим систему в деформированном состоянии и запишем уравнения, связывающие перемещения элементов системы с деформациями стержней.

$$\Delta l_{AC} = A_1 A_2, \text{ растяжение } (A_1 C > AC);$$

$$\Delta l_{BE} = BB_2, \text{ сжатие } (B_1 E < BE);$$

$$\Delta l_{AB} = \Delta + (BB_1 - AA_1), \text{ растяжение.}$$



Заметим, что деформацию стержня AB в данном случае считаем растягивающей, полагая $BB_1 > AA_1$ и учитывая монтажный зазор Δ , для устранения которого при сборке стержень AB необходимо растянуть.

Рассматривая треугольники AA_1A_2 и BB_1B_2 , найдем:

$$BB_1 = \frac{BB_2}{\cos \beta}, \quad AA_1 = \frac{A_1A_2}{\cos \alpha}.$$

После подстановки, получим уравнение совместности деформаций:

$$\Delta l_{AB} = \Delta + \frac{\Delta l_{BE}}{\cos \beta} - \frac{\Delta l_{AC}}{\cos \alpha}.$$

3. Физическая сторона задачи

Запишем закон Гука, здесь же необходимо учесть и температурные деформации $\alpha_t t \cdot l_{AB}$ (α_t – коэффициент линейного расширения материала стержня):

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot l_{AB}}{E \cdot A_{AB}} + \alpha_t \cdot t \cdot l_{AB},$$

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot l_{AC}}{E \cdot A_{AC}},$$

$$\Delta l_{BE} = -\frac{N_{BE} \cdot l_{BE}}{E \cdot A_{BE}}.$$

Здесь учтено, что все усилия и деформации стержней приняты положительными.

4. Математическая сторона задачи (синтез)

Подставим выражения закона Гука в уравнение совместности деформаций:

$$N_{AB} = -\left(\frac{N_{BE}}{\cos \beta} + \frac{N_{AC}}{\cos \alpha} - \frac{\Delta \cdot E \cdot A_{AB}}{l_{AB}} + \alpha_t \cdot t \cdot E \cdot A_{AB} \right).$$

Решая данное уравнение совместно с уравнениями равновесия, найдем неизвестные внутренние усилия в стержнях.

Теория напряженного состояния. Понятие о тензоре напряжений, главные напряжения. Линейное, плоское и объемное напряженное состояние. Определение напряжений при линейном и плоском напряженном состоянии. Решения прямой и обратной задач.

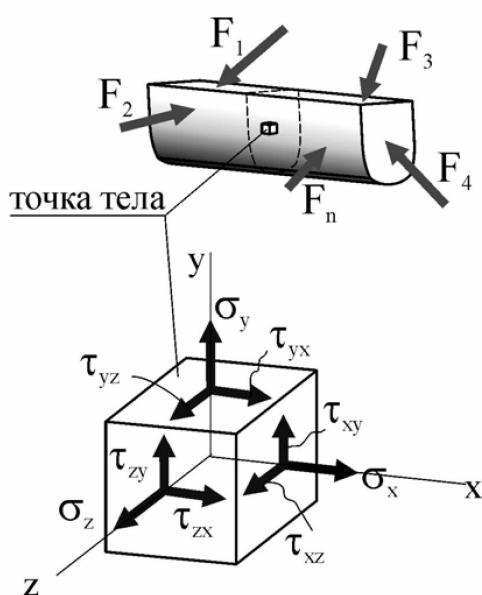
5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

5.1. Напряжения в точке. Главные напряжения и главные площадки

Напряжения являются результатом взаимодействия частиц тела при его нагружении. Внешние силы стремятся изменить взаимное расположение частиц, а возникающие при этом напряжения препятствуют их смещению. Расположенная в данной точке частица по-разному взаимодействует с каждой из соседних частиц. Поэтому в общем случае в одной и той же точке напряжения различны по различным направлениям.

В сложных случаях действия сил на брус (в отличие от растяжения или сжатия) вопрос об определении наибольших напряжений, а также положения площадок, на которых они действуют, усложняется. Для решения этого вопроса приходится специально исследовать законы изменения напряжений при изменении положения площадок, проходящих через данную точку. Возникает проблема исследования напряженного состояния в точке деформируемого тела.

Напряженное состояние в точке – совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через эту точку.



Исследуя напряженное состояние в данной точке деформируемого тела, в ее окрестности выделяют бесконечно малый (элементарный) параллелепипед, ребра которого направлены вдоль соответствующих координатных осей. При действии на тело внешних сил на каждой из граней элементарного параллелепипеда возникают напряжения, которые представляют нормальными и касательными напряжениями – проекциями полных напряжений на координатные оси.

Нормальные напряжения обозначают буквой σ с индексом, соответствующим нормали к площадке, на которой они действуют. Касательные напряжения обозначают буквой τ с двумя индексами: первый соответствует нормали к площадке, а второй – направлению самого напряжения (или наоборот).

Таким образом, на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности точки нагруженного тела, действует девять компонентов напряжения. Запишем их в виде следующей квадратной матрицы:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Эта совокупность напряжений называется **тензором напряжений**.

Тензор напряжений полностью описывает напряженное состояние в точке, то есть если известен тензор напряжений в данной точке, то можно найти напряжения на любой из площадок, проходящих через данную точку (заметим, что тензор представляет собой особый математический объект, компоненты которого при повороте координатных осей подчиняются специфическим правилам тензорного преобразования, при этом тензорное исчисление составляет отдельный раздел высшей математики и здесь не рассматривается).

Не все девять компонентов напряжений, действующих на гранях параллелепипеда, независимые (несвязанные друг с другом). В этом легко убедиться, составив уравнения равновесия элемента в отношении его вращений относительно координатных осей. Записав уравнения моментов от сил, действующих по граням параллелепипеда, и пренебрегая их изменением при переходе от одной грани к другой ей параллельной, получим, что

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Данные равенства называют **законом парности касательных напряжений**.

Закон парности касательных напряжений: по двум взаимно перпендикулярным площадкам касательные напряжения, перпендикулярные линии пересечения этих площадок, равны между собой.

В окрестности исследуемой точки можно выделить бесконечное множество взаимно перпендикулярных площадок. В том числе можно найти и такие площадки, на которых действуют только нормальные напряжения, а касательные напряжения равны нулю. Такие площадки называют **главными** (более точно – площадки главных напряжений).

Главные площадки – три взаимно перпендикулярные площадки в окрестности исследуемой точки, на которых касательные напряжения равны нулю.

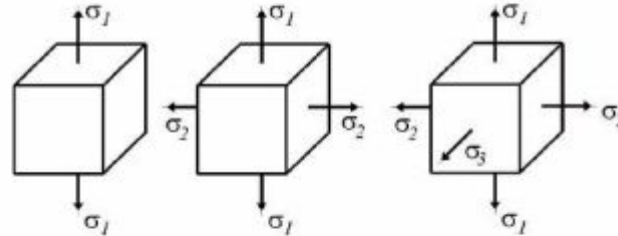
Главные напряжения – нормальные напряжения, действующие по главным площадкам (то есть площадкам, на которых отсутствуют касательные напряжения).

На главных площадках нормальные напряжения (главные напряжения) принимают свои экстремальные значения – максимум σ_1 , минимум σ_3 и минимакс σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$). Тензор напряжений, записанный через главные напряжения, принимает наиболее простой вид:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

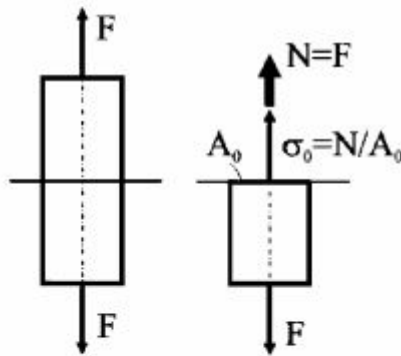
В зависимости от того, сколько главных напряжений действует в окрестности данной точки, различают три вида напряженного состояния:

- 1) **линейное (одноосное)** – если одно главное напряжение отлично от нуля, а два других равны нулю ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$);
- 2) **плоское (двухосное)** – если два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$);
- 3) **объемное (трехосное)** – если все три главных напряжения отличны от нуля ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$).



5.2. Напряжения на наклонных площадках при линейном напряженном состоянии

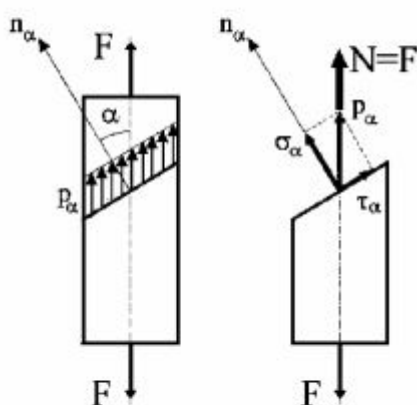
Элементы, находящиеся в линейном напряженном состоянии, можно выделить в окрестности некоторых точек стержня, работающего на изгиб, иногда – при сложном нагружении, но главным образом на растяжение или сжатие.



Рассмотрим стержень, испытывающий простое растяжение. Нормальные напряжения в его поперечных сечениях определяются следующим образом:

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_0} = \frac{F}{A_0}.$$

Касательные напряжения здесь равны нулю. Следовательно, эти сечения являются главными площадками ($\sigma_1 = \sigma_0$).



Перейдем теперь к определению напряжений на неглавных, наклонных площадках. Выделим площадку, нормаль к которой составляет с осью стержня угол α . Проведенную таким образом наклонную площадку будем обозначать α -площадкой, а действующие на ней полные, нормальные и касательные напряжения – $p_\alpha, \sigma_\alpha, \tau_\alpha$ соответственно. При этом площадь α -площадки (A_α) связана с площадью поперечного сечения стержня (A_0) следующим образом:

$$A_\alpha = A_0 / \cos \alpha.$$

Для определения напряжений воспользуемся методом мысленных сечений. Считая, что наклонная площадка рассекла стержень на две части, отбросим одну из них (верхнюю) и рассмотрим равновесие оставшейся (нижней). Осе-

вая сила (N) в сечении представляет собой равнодействующую полных напряжений p_α . Следовательно,

$$N = p_\alpha \cdot A_\alpha.$$

Отсюда

$$p_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{N}{A_0} \cdot \cos \alpha = \sigma_0 \cdot \cos \alpha.$$

Нормальные и касательные напряжения определим, проецируя полное напряжение на нормаль и плоскость α -площадки соответственно:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos \alpha;$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin \alpha,$$

или, учитывая, что $p_\alpha = \sigma_0 \cdot \cos \alpha$

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cdot \cos^2 \alpha;$$

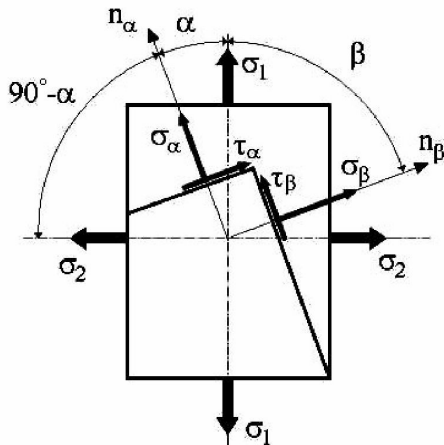
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Из анализа формул видно, что

- 1) при $\alpha=0$ в поперечных сечениях стержня $\tau_\alpha=0$, $\sigma_\alpha=\sigma_0$ ($\sigma_1=\sigma_0$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=0$);
- 2) при $\alpha=\pi/2$ в поперечных сечениях стержня $\tau_\alpha=0$, $\sigma_\alpha=0$;
- 3) при $\alpha=\pm\pi/4$ в поперечных сечениях стержня возникают максимальные касательные напряжения $\tau_\alpha = \tau_{\max} = \sigma_0/2$ (нормальные напряжения $\sigma_\alpha = \sigma_0/2$).

5.3. Напряжения на наклонных площадках при плоском напряженном состоянии

Плоское (двухосное) напряженное состояние встречается при кручении, изгибе и сложном сопротивлении и является одним из наиболее распространенных видов напряженного состояния.



Определим напряжения на наклонных площадках при плоском напряженном состоянии. Рассмотрим элементарный параллелепипед, грани которого являются главными площадками. По ним действуют положительные напряжения σ_1 и σ_2 , а третье главное напряжение $\sigma_3=0$.

Проведем сечение, нормаль к которому повернута на угол α от большего из двух главных напряжений (σ_1) против часовой стрелки (положительное направление α). Напряжения σ_α и τ_α на этой площадке будут вызываться как действием σ_1 , так и действием σ_2 .

Запишем правила знаков. Будем считать положительными следующие направления напряжений и углов: нормальные напряжения σ – растягивающие; касательные напряжения τ – вращающие элемент по часовой стрелке; угол α – против часовой стрелки от наибольшего из главных напряжений ($\alpha \leq 45^\circ$).

Плоское напряженное состояние может быть представлено как суперпозиция (наложение) двух ортогональных (взаимноперпендикулярных) одноосных напряженных состояний. При этом:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma'_{\alpha} + \sigma''_{\alpha},$$

$$\tau_{\alpha} = \tau'_{\alpha} + \tau''_{\alpha},$$

где σ'_{α} , τ'_{α} – напряжения, вызванные действием σ_1 ; σ''_{α} , τ''_{α} – напряжения, вызванные действием σ_2 .

Напряжения при одноосном напряженном состоянии (от действия σ_1) связаны между собой как

$$\sigma'_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha;$$

$$\tau'_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Напряжения σ''_{α} , τ''_{α} , вызванные действием σ_2 , можно найти аналогично, но при этом необходимо учесть, что вместо угла α в формулы необходимо подставить угол $\beta = -(90^\circ - \alpha)$ – угол между α -площадкой и напряжением σ_2 . Отсюда получим

$$\sigma''_{\alpha} = \sigma_2 \cdot \cos^2 [-(90^\circ - \alpha)] \Rightarrow \sigma''_{\alpha} = \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha;$$

$$\tau''_{\alpha} = \frac{\sigma_2}{2} \cdot \sin 2 \cdot [-(90^\circ - \alpha)] \Rightarrow \tau''_{\alpha} = -\frac{\sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Окончательно можем записать

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha; \quad (5.1)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha - \frac{\sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

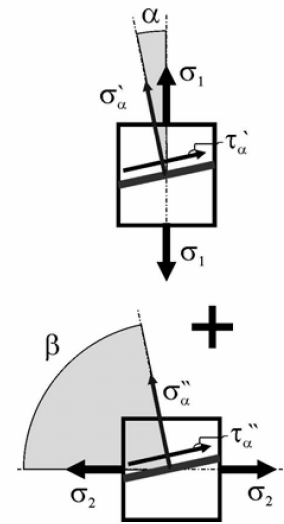
На площадке, перпендикулярной данной, значения напряжений можно найти из этих же формул, подставляя вместо угла α величину угла $\beta = -(90^\circ - \alpha)$:

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha; \quad (5.2)$$

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Если сложить левые и правые части выражений для напряжений на α - и β -площадках, получим следующие равенства:

1) $\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2$, из которого следует, что сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина **инвариантная**, то есть не зависит от поворота площадки.



2) $\tau_\alpha = -\tau_\beta$, которое еще раз указывает на закон парности касательных напряжений (знак «минус» связан с вышеприведенным правилом знаков для касательных напряжений).

Решая совместно уравнения (5.1) и (5.2) относительно напряжений σ_1 и σ_2 , получим выражения для определения главных напряжений при плоском напряженном состоянии по известным напряжениям на произвольных взаимноперпендикулярных площадках:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4 \cdot \tau_\alpha^2} . \quad (5.3)$$

Обозначения главных напряжений $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ здесь оправданы тем, что одно из трех главных напряжений равно нулю.

Направление главных площадок найдем, исключая из выражений (5.1), (5.2) величины σ_1 , σ_2 и решая полученное уравнение относительно угла α :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot \tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} . \quad (5.4)$$

Задачи, рассматриваемые в теории напряженного состояния, могут даваться в прямой и обратной постановке.

Прямая задача. В точке известны положения главных площадок и соответствующие им главные напряжения; требуется найти нормальные и касательные напряжения по площадкам, наклоненным под заданным углом α к главным (аналитическое решение прямой задачи дается формулами (5.1) и (5.2)).

Обратная задача. В точке известны нормальные и касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным произвольным площадкам, проходящим через данную точку; требуется найти направление главных площадок и главные напряжения (аналитическое решение обратной задачи дается формулами (5.3) и (5.4)).

Отметим, что именно обратная задача оказывается наиболее распространенной в сопротивлении материалов, так как наиболее часто удается определить (теоретически или экспериментально) нормальные и касательные напряжения (σ_α , τ_α , σ_β , τ_β) на некоторых произвольных площадках. Затем по этим данным требуется найти положение главных площадок и величину главных напряжений, по которым и производится дальнейший расчет на прочность.

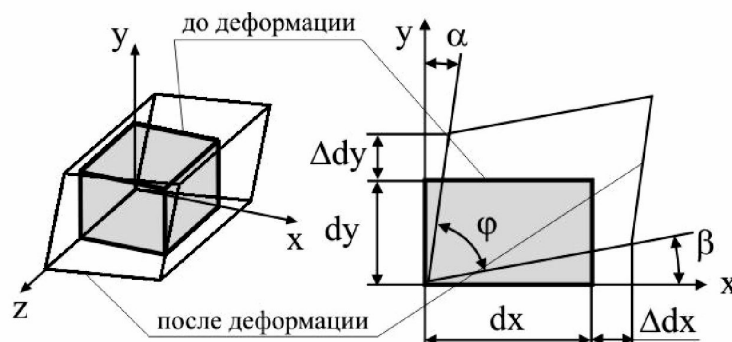
Теория деформированного состояния. Понятие о тензоре деформаций, главные деформации. Обобщенный закон Гука для изотропного тела. Деформация объема при трехосном напряженном состоянии. Потенциальная энергия деформации. Потенциальная энергия изменения формы и объема.

6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

6.1. Деформированное состояние в точке. Главные деформации

Под действием внешних сил элементы машин и конструкций изменяют свои первоначальные форму и размеры. Как правило, такие изменения невелики, но в ряде случаев могут препятствовать нормальной работе. Умение определять деформации, установление их допустимых величин имеют важное значение при проектировании и расчете конструкций. Рассмотрение деформаций необходимо также для выяснения закона распределения напряжений в элементах конструкций, при решении статически неопределимых задач, для оценки работоспособности по условиям прочности.

Рассмотрим особенности деформирования материала в окрестности некоторой точки A деформируемого тела. Вырежем около точки A внутри сплошного тела бесконечно малый параллелепипед. В процессе деформации тела точки выделенного элемента будут перемещаться, сам он – деформироваться, то есть будут искажаться первоначально прямые углы между гранями и изменяться длины их ребер.



Отношение изменения длины ребра параллелепипеда к первоначальной длине ребра определяет **относительную линейную деформацию** ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$) элемента вдоль соответствующей оси

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \quad \epsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \quad \epsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

Искажение первоначально прямого угла между ребрами элемента в плоскостях его граней определяет **угол сдвига** или **угловую деформацию** ($\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$) в соответствующей плоскости, например, для плоскости xu (см. рисунок) $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$. Если угол $\varphi = 90^\circ - (\alpha + \beta)$ – острый, то угол сдвига считается положительным. Растяжение ребер отвечает положительным значениям $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$.

Деформации элемента в трех ортогональных плоскостях представим в виде матрицы

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix},$$

которая, по аналогии с тензором напряжений, называется **тензором малых деформаций**, или сокращенно – **тензором деформаций**.

Деформированное состояние в точке – это совокупность относительных линейных деформаций и углов сдвига для всевозможных направлений осей, проведенных через данную точку.

При этом можно сделать утверждение, что деформированное состояние в точке вполне определено, если задан тензор деформаций для этой точки.

Аналогично напряженному состоянию можно указать такие три ортогональные направления (с индексами 1, 2, 3), называемые **главными осями деформации**, для которых угловые деформации равны нулю, при этом линейные деформации принимают свои экстремальные значения (ε_1 – максимум, ε_3 – минимум, ε_2 – минимакс), причем по алгебраической величине

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3.$$

Деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ в направлениях, для которых отсутствуют углы сдвига, называются **главными деформациями** в точке.

Для главных направлений тензор деформаций получит наиболее удобный вид

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора деформаций при повороте осей изменяются совершенно аналогично компонентам тензора напряжений (по законам тензорного преобразования). Так, при плоском напряженном состоянии деформации в некоторой плоскости на произвольной наклонной площадке можно выразить через главные деформации и угол наклона α следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= \varepsilon_1 \cdot \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \cdot \sin^2 \alpha; \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\alpha} &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Главные деформации можно выразить через произвольные деформации по двум взаимно перпендикулярным площадкам в виде:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4 \cdot (\gamma_{xy}/2)^2},$$

а положение главных площадок будет задаваться углом α , который определяется из выражения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot (0,5 \cdot \gamma_{\alpha\beta})}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta}.$$

6.2. Обобщенный закон Гука при объемном напряженном состоянии

Изучая простое растяжение-сжатие, мы выяснили, что относительная продольная деформация

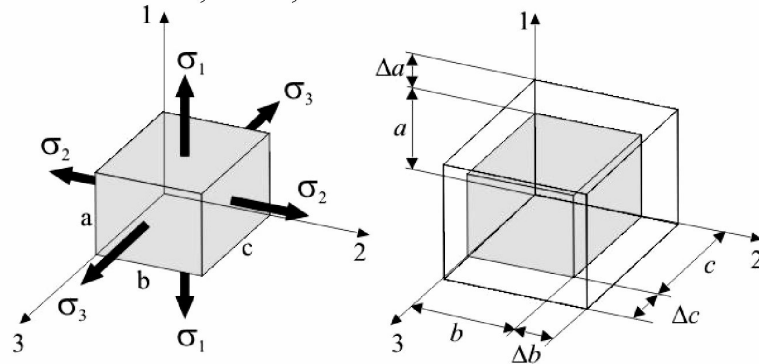
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

а относительная поперечная деформация

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \frac{\sigma}{E}.$$

Эти два равенства выражали закон Гука (зависимость между напряжениями и деформациями) при простом растяжении или сжатии, то есть при линейном напряженном состоянии. Далее установим связь между напряжениями и деформациями в общем случае объемного напряженного состояния.

Рассмотрим деформацию элемента тела, выбрав этот элемент в виде прямоугольного параллелепипеда размерами $a \times b \times c$, по граням которого действуют главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (для вывода предполагаем, что все они положительны). Вследствие деформации ребра элемента изменяют свою длину и становятся равными $a + \Delta a; b + \Delta b; c + \Delta c$.



Величины

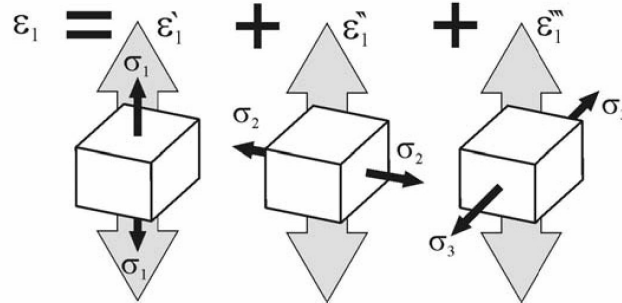
$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}$$

называются главными деформациями и представляют собой относительные удлинения в главных направлениях.

Применяя принцип суперпозиции, деформацию ε_1 можно представить следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' ,$$

где ε_1' – относительное удлинение в направлении σ_1 , вызванное действием только напряжений σ_1 (при $\sigma_2=\sigma_3=0$); ε_1'' – относительное удлинение в направлении σ_1 , вызванное действием только напряжений σ_2 (при $\sigma_1=\sigma_3=0$); ε_1''' – относительное удлинение в направлении σ_1 , вызванное действием только напряжений σ_3 (при $\sigma_1=\sigma_2=0$).



Поскольку деформации в направлении напряжения σ_1 в данном случае являются продольными, а деформации в направлении напряжений σ_2 и σ_3 – поперечными (см. рисунок), то, применяя формулы закона Гука для продольных и поперечных деформаций при линейном напряженном состоянии, находим, что

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_1'' = -\mu \cdot \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_1''' = -\mu \cdot \frac{\sigma_3}{E}.$$

Сложив эти величины, будем иметь

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогично получим выражения и для двух других главных деформаций. В результате запишем **обобщенный закон Гука для изотропного тела**, то есть зависимость между линейными деформациями и главными напряжениями в общем случае объемного напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned}$$

Данные выражения справедливы и для относительных деформаций по любым трем взаимно перпендикулярным направлениям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned}$$

При этом угловые деформации на соответствующих площадках будут вычисляться как

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},$$

где G – модуль сдвига.

Далее будет показано, что модуль сдвига G можно выразить через E и μ . Следовательно, для изотропного тела угловые деформации не влияют на линейные деформации и наоборот (однако, для анизотропного тела в общем случае это утверждение неверно).

6.3. Объемная деформация при сложном напряженном состоянии

Установим связь между относительным изменением объема ε_V и главными напряжениями. До деформации элемент занимал объем $V_0 = a \times b \times c$. В деформированном состоянии его объем

$$\begin{aligned} V &= (a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) \cdot (c + \Delta c) = \\ &= a \cdot b \cdot c \cdot \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) = \\ &= V_0 \cdot (1 + \varepsilon_1) \cdot (1 + \varepsilon_2) \cdot (1 + \varepsilon_3) = \\ &= V_0 \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3). \end{aligned}$$

Учитывая незначительную величину относительных деформаций по сравнению с единицей, последними четырьмя слагаемыми можем пренебречь, как величинами более высокого порядка малости. Тогда относительное изменение объема

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3 \cdot \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$ – средняя деформация в точке.

Выразив главные деформации через главные напряжения при помощи обобщенного закона Гука, получим

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2 \cdot \mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Если ввести среднее напряжение в точке

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3},$$

то последнее равенство можно преобразовать до вида закона Гука для объемной деформации

$$\varepsilon_V = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (6.1)$$

где $K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu)}$ – модуль объемной упругости.

6.4. Потенциальная энергия деформации при объемном напряженном состоянии

До сих пор для анализа напряженного и деформированного состояния элементов конструкции нами рассматривались дифференциальные методы, основанные на статических, геометрических и физических соотношениях, описывающих поведение, «условия жизни» частицы (малого элемента) материала. Существуют и другие методы анализа (энергетические методы), основанные на изучении общих количественных характеристик конструкции, таких как энергия деформации, работа внешних сил при деформации конструкции в целом и т. п. Далее получим формулы для потенциальной энергии деформации, часто используемые в таких методах.

Потенциальная энергия деформации (U) – это энергия, которая накапливается в теле при его упругой деформации.

Удельная потенциальная энергия деформации (u) – это величина потенциальной энергии деформации, приходящаяся на единицу объема тела.

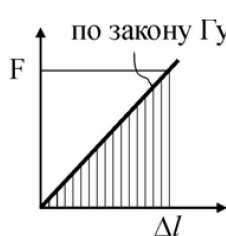
В соответствии с законом сохранения энергии без учета ее рассеивания (диссипации), потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил, затраченной при упругой деформации тела:

$$U = A_F.$$

Тогда в случае простого растяжения (сжатия) потенциальную энергию деформации можно определить как

$$U = \int_0^{\Delta l} F \cdot d(\Delta l),$$

где F и Δl – значения усилия и удлинения в промежуточный момент нагружения.



Учитывая, что на упругом участке усилие прямо пропорционально удлинению растягиваемого стержня (по закону Гука), легко найти данный интеграл (площадь треугольника под кривой деформирования на рисунке):

$$U = \frac{F \cdot \Delta l}{2}.$$

Удельная потенциальная энергия

$$u = \frac{U}{V} = \frac{F \cdot \Delta l}{2 \cdot A \cdot l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} \cdot \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}.$$

Обобщая эту формулу на случай одновременного действия трех главных напряжений при объемном напряженном состоянии, то есть, суммируя потенциальную энергию деформации от каждого напряжения, получим

$$u = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2}.$$

Подставляя сюда выражения деформаций из обобщенного закона Гука, получим выражение для удельной потенциальной энергии через главные напряжения

$$u = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)].$$

При дальнейшем рассмотрении вопроса о прочности материала при объемном напряженном состоянии удобно рассматривать удельную потенциальную энергию как состоящую из двух частей:

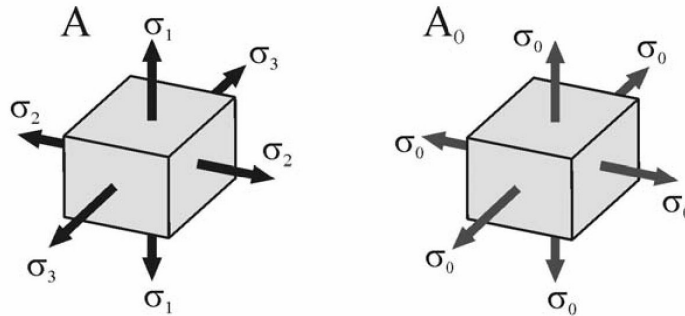
1) удельной потенциальной энергии изменения объема u_v , то есть энергии, накапливаемой за счет изменения объема V рассматриваемого элементарного объема (одинакового изменения всех его размеров без искажения его формы);

2) удельной потенциальной энергии формоизменения u_ϕ , то есть энергии, накапливаемой за счет изменения формы элементарного объема (расходуемой на превращение кубика в параллелепипед)

$$u = u_v + u_\phi.$$

Подсчитаем величину обеих составляющих удельной потенциальной энергии.

Рассмотрим два элементарных объема A и A_0 , по граням первого из которых действуют произвольные главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а по граням второго – три главных растягивающих напряжения, равные по величине среднему напряжению $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$.



Удельная потенциальная энергия деформации элемента в первом состоянии (A) равна

$$u = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)].$$

Удельная потенциальная энергия деформации элемента во втором состоянии (A_0) равна

$$u_0 = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot [\sigma_0^2 + \sigma_0^2 + \sigma_0^2 - 2 \cdot \mu \cdot (\sigma_0 \cdot \sigma_0 + \sigma_0 \cdot \sigma_0 + \sigma_0 \cdot \sigma_0)] = \frac{3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu)}{2 \cdot E} \cdot \sigma_0^2.$$

Очевидно, что деформация второго состояния A_0 проходит без искажения формы, так как действующие по его граням одинаковые главные напряжения σ_0 вызывают одинаковое изменение размеров по всем направлениям, поэтому

потенциальная энергия формоизменения в этом случае равна нулю $u_{\phi_0} = 0$.

Значит потенциальная энергия изменения объема в этом случае

$$u_{V_0} = \frac{3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu)}{2 \cdot E} \cdot \sigma_0^2 = \frac{\sigma_0^2}{2 \cdot K}.$$

Нетрудно убедиться, что, согласно (6.1), относительное изменение объема обоих кубиков одинаково, то есть

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{V_0} = \frac{\sigma_0}{K}.$$

Следовательно, потенциальная энергия изменения объема у них также одинакова:

$$u_V = u_{V_0}.$$

Отсюда

$$u_V = \frac{\sigma_0^2}{2 \cdot K} = \frac{3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu)}{2 \cdot E} \cdot \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9},$$

окончательно запишем формулу для определения удельной потенциальной энергии изменения объема

$$u_V = \frac{1 - 2 \cdot \mu}{6 \cdot E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Теперь найдем удельную потенциальную энергию формоизменения

$$u_{\phi} = u - u_V.$$

Подставляя вместо u и u_V их выражения через главные напряжения, получим

$$u_{\phi} = \frac{1 + \mu}{6 \cdot E} \cdot \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right].$$

7. КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

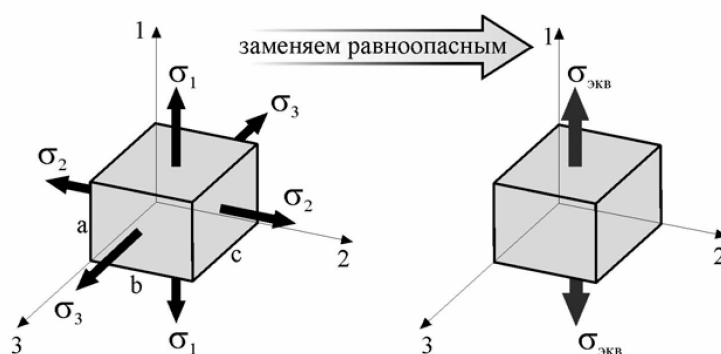
7.1. Задачи теорий прочности. Эквивалентные напряжения

Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности детали по известному напряженному состоянию. Если напряженное состояние в элементах сооружения является одноосным (линейным), то определение момента появления опасных деформаций или разрушения осуществляется достаточно просто путем сопоставления максимальных деформаций или напряжений в опасном сечении элемента конструкции с допускаемым.

Рассмотрим вопрос о прочности материала при сложном напряженном состоянии (плоском или объемном). В этом случае, как показывают опыты, для одного и того же материала опасное состояние может иметь место при различных предельных значениях главных напряжений в зависимости от соотношений между ними. Экспериментально найти величины этих предельных напряжений, как это делалось при растяжении-сжатии, не представляется возможным – число возможных сочетаний величины и направления главных напряжений при сложном напряженном состоянии бесконечно велико. Приходится вводить некоторый **критерий прочности или пластичности** – гипотезу (предположение) о преимущественном влиянии на прочность материала при сложном напряженном состоянии того или иного фактора, который якобы и ответствен за возникновение опасного состояния материала. Предельное же значение этого фактора, определяющего прочность (пластичность) материала, находят из обычных опытов на растяжение. Таким образом, введение критерия прочности позволяет перейти от сложного напряженного состояния к эквивалентному, равноопасному ему (с точки зрения прочности материала) простому одноосному растяжению.

Введем понятие эквивалентного напряжения.

Эквивалентное напряжение ($\sigma_{\text{экв}}$) – это напряжение, под действием которого материал в условиях простого растяжения-сжатия оказывается в равноопасном состоянии с рассматриваемым сложным напряженным состоянием.



Тогда, для того чтобы провести расчет на прочность при сложном напряженном состоянии, необходимо сначала «перейти» от сложного напряженного состояния к простому растяжению, то есть, используя наиболее подходящий для данного случая критерий прочности или пластичности, найти эквивалентное напряжение. Затем необходимо сравнить это эквивалентное напряжение с допускаемым, найденным из опытов на растяжение:

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma].$$

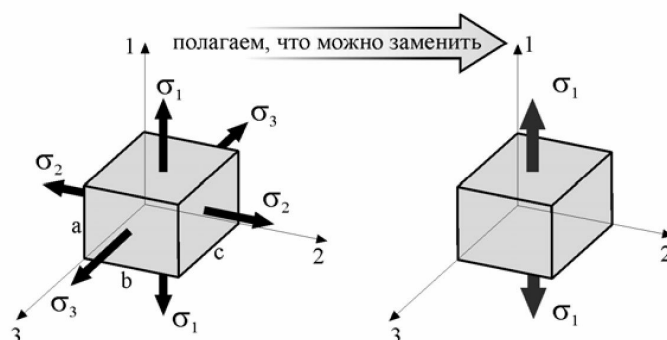
Основной же задачей при выработке критерия прочности оказывается правильный выбор основного фактора, влияющего на прочность материала при сложном напряженном состоянии.

7.2. Классические критерии прочности (теории прочности)

I. Критерий наибольших нормальных напряжений

В качестве первого критерия прочности, называемого обычно первой теорией прочности, был принят критерий наибольших нормальных напряжений, в соответствии с которым причиной разрушения материала считались наибольшее (из трех главных) нормальное напряжение.

Согласно этому критерию, разрушение материала при сложном напряженном состоянии, как и при простом растяжении-сжатии, наступает от действия всего лишь одного напряжения $|\sigma|_{\text{max}}$, при этом действие двух других напряжений не учитывается.



Таким образом, эквивалентные напряжения для пластичного материала будут равны наибольшему по модулю главному напряжению:

$$\sigma_{\text{экв}_I} = |\sigma|_{\text{max}},$$

а условие прочности запишется следующим образом:

$$\sigma_{\text{экв}_I} \leq [\sigma].$$

Обратим внимание, что эквивалентные напряжения всегда положительная величина.

Данная теория прочности в настоящее время практически не используется, так как она подтверждается экспериментами лишь для некоторых очень хрупких материалов (камень, кирпич, керамика и т. п.).

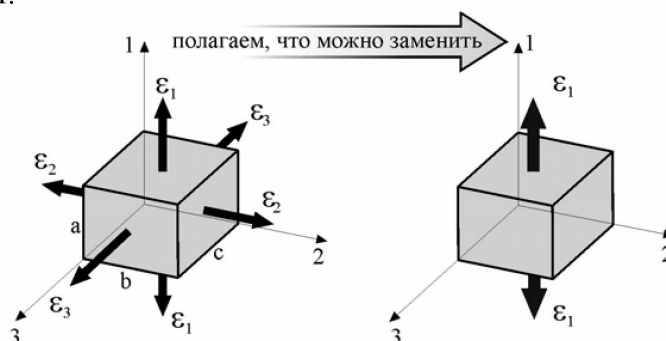
II. Критерий наибольших линейных деформаций

Согласно второй теории прочности, в качестве критерия прочности принимают наибольшую по абсолютной величине линейную деформацию.

Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступает, когда наибольшая линейная деформация достигает своего допускаемого значения, то есть

$$|\epsilon|_{\max} \leq [\epsilon].$$

При этом допускаемая деформация материала определяется при простом растяжении-сжатии.



Используя обобщенный закон Гука, запишем данное условие прочности в напряжениях. Пусть наибольшее относительное удлинение будет равно ϵ_1 , тогда

$$\epsilon_{\max} = \epsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Допускаемые деформации при растяжении-сжатии связаны с допускаемыми напряжениями также по закону Гука:

$$[\epsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Таким образом, условие прочности можем записать в виде:

$$\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Эквивалентное напряжение в этом случае

$$\sigma_{\text{эквII}} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3),$$

а, окончательно, условие прочности:

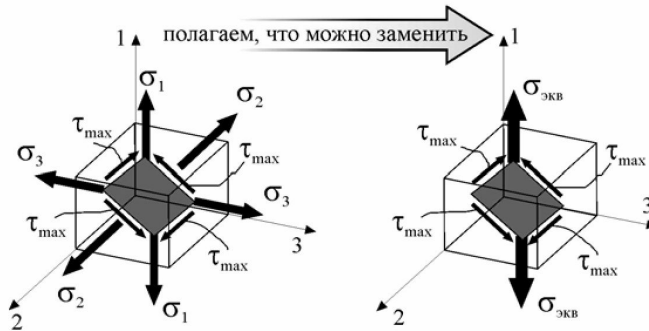
$$\sigma_{\text{эквII}} \leq [\sigma].$$

Данная теория также в настоящее время редко применяется в инженерной практике, так как находит экспериментальное подтверждение лишь для некоторых хрупких материалов (легированный чугун, высокопрочная сталь).

III. Критерий наибольших касательных напряжений

Здесь в качестве критерия прочности принята величина наибольшего касательного напряжения. Согласно этой теории, предполагается, что предельное состояние материала наступает, когда наибольшее касательное напряжение достигает своего допускаемого значения, которое определяется из опытов на растяжение-сжатие. В этом случае условие прочности принимает вид:

$$\tau_{max} \leq [\tau].$$



Максимальные касательные напряжения при объемном напряженном состоянии определяются как

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

тогда допускаемые касательные напряжения, определяемые при простом растяжении, можно найти следующим образом:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Таким образом, окончательно, условие прочности по III теории прочности запишем в виде:

$$\sigma_{экв_{III}} \leq [\sigma],$$

где эквивалентное напряжение

$$\sigma_{экв_{III}} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

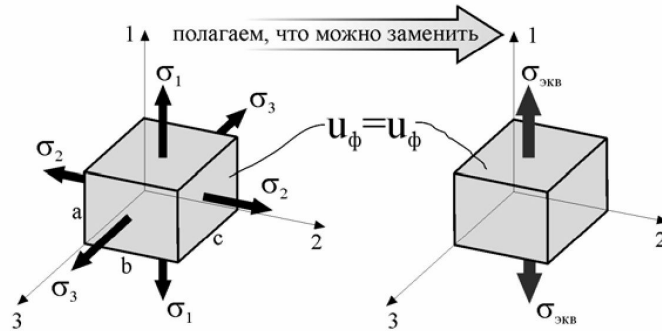
Третья теория прочности хорошо подтверждается опытами для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Недостаток ее заключается в том, что она не учитывает среднего по величине главного напряжения σ_2 , которое, как показывают эксперименты, также оказывает, хотя и не значительное, влияние на прочность материалов.

IV. Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения

В качестве критерия прочности в этом случае принимают количество удельной потенциальной энергии формоизменения, накопленной деформированным элементом. Согласно этой теории, опасное состояние наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия формоизменения достигает своего

предельного значения, которое определяется из опытов на простое растяжение-сжатие. Здесь условие прочности можно записать так:

$$u_{\phi} \leq [u_{\phi}].$$



Запишем удельную потенциальную энергию формоизменения через главные напряжения при объемном напряженном состоянии

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6 \cdot E} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

откуда при растяжении-сжатии

$$[u_{\phi}] = \frac{1+\mu}{3 \cdot E} \cdot [\sigma]^2.$$

Отсюда, условие прочности, записанное через нормальные напряжения, примет вид

$$\sigma_{\text{экв}_{IV}} \leq [\sigma],$$

при этом эквивалентные напряжения будем определять по формуле:

$$\sigma_{\text{экв}_{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.$$

Опыты хорошо подтверждают четвертую теорию для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. При этом четвертая теория более точно, чем третья, описывает появление в материале малых пластических деформаций. По сути дела эти две теории более правильно называть теориями пластичности.

V. Теория Мора

Согласно теории Мора, два напряженных состояния равноопасны, если для соответствующих двух главных напряжений (σ'_1, σ'_3 и σ''_1, σ''_3) соблюдается соотношение

$$\sigma'_1 - k \cdot \sigma'_3 = \sigma''_1 - k \cdot \sigma''_3.$$

Отсюда вытекает формула для эквивалентного напряжения:

$$\sigma_{\text{экв}_M} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3.$$

Здесь коэффициент k представляет собой отношение предельных напряжений при одноосном растяжении и при одноосном сжатии. Если принять, что коэффициенты запаса прочности по отношению к предельным напряжениям растяжения и сжатия одинаковы, то k можно определить из выражения:

$$k = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

Окончательно условие прочности по теории Мора запишется следующим образом

$$\sigma_{\text{экв}_M} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_+].$$

Теория прочности Мора позволяет установить сопротивление разрушению материалов, обладающих разными сопротивлениями растяжению и сжатию. Как видим, гипотеза Мора (как и III теория) не учитывает влияния промежуточного главного напряжения σ_2 – это несомненный ее недостаток. Опыты показывают, что достаточно точные результаты гипотеза Мора дает для напряженных состояний смешанного типа, то есть для тех случаев, когда σ_1 и σ_3 имеют разные знаки.

Таким образом, для практических расчетов следует рекомендовать четвертую (или третью) теории прочности для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, и теорию Мора – для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, то есть для хрупких материалов (для них в настоящее время пока еще применяют и вторую теорию прочности).

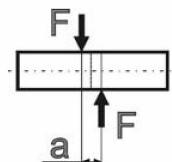
Сдвиг элементов конструкций. Определение внутренних усилий, напряжений и деформаций при сдвиге. Понятие о чистом сдвиге. Закон Гука для сдвига. Удельная потенциальная энергия деформации при чистом сдвиге. Расчеты на прочность.

8. ПРОСТЫЕ ВИДЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ. СДВИГ

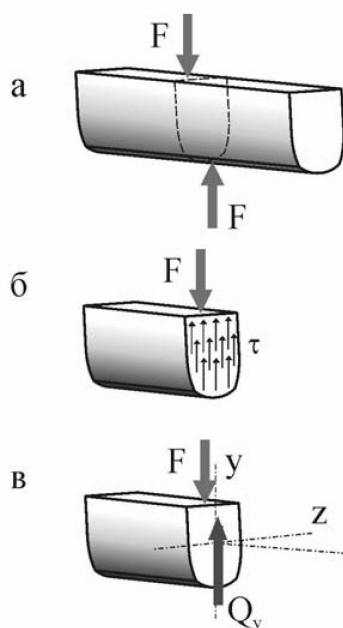
8.1. Определение внутренних усилий при сдвиге

Кроме деформации растяжения или сжатия (см. лекцию № 3) материал нагруженного элемента конструкции может испытывать деформацию сдвига.

Сдвиг – вид сопротивления, при котором стержень нагружен двумя равными силами (на малом расстоянии друг от друга), перпендикулярными к оси бруса и направленными в противоположные стороны.



Примером такого действия сил на брус может быть разрезание ножницами прутьев, деформация заклепок, болтов, сварных швов между металлическими листами и т. п. Вообще же на практике сдвиг в чистом виде получить трудно, так как обычно деформация сдвига сопровождается другими видами деформаций и чаще всего изгибом.



Установим формулы для внутренних усилий, напряжений и деформаций, необходимые при расчете на сдвиг элементов конструкций, имеющих форму бруса. Пусть известна внешняя нагрузка F , вызывающая сдвиг одной части бруса относительно другой. Используя метод мысленных сечений (см. рисунок), находим величину внутренних усилий, действующих в сечении бруса. Очевидно, что в данном случае нагружения из шести уравнений равновесия лишь одно не обращается тождественно в ноль:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q_y = F.$$

Таким образом, при сдвиге из шести внутренних усилий (N , Q_y , Q_z , M_x , M_y , M_z) в сечении элемента конструкции возникают только одно – поперечная сила (Q_y или Q_z).

8.2. Определение напряжений при сдвиге. Понятие о чистом сдвиге

Так как поперечная сила Q_y (или Q_z) является единственным внутренним усилием, возникающим в сечении стержня при сдвиге, и при этом она лежит в плоскости этого сечения, то и напряжения, возникающие здесь, должны лежать в плоскости сечения стержня. То есть при сдвиге в точках поперечного сечения стержня возникают только касательные напряжения τ .

В соответствии с определением (см. лекцию № 1), касательные напряжения τ , действующие в поперечном сечении (A) бруса, представляют собой интенсивность внутренних поперечных сил

$$\tau = \frac{dQ}{dA},$$

исходя из чего можем записать (опуская соответствующие индексы):

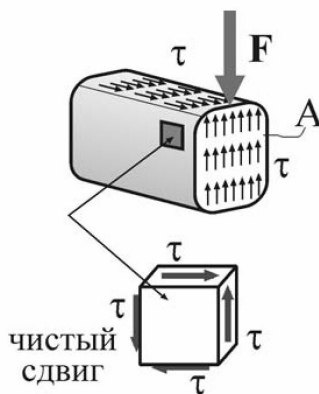
$$Q = \int_A \tau \cdot dA.$$

При сдвиге условно считают, что касательные напряжения равномерно распределены по площади поперечного сечения ($\tau = \text{const}$), поэтому

$$Q = \tau \cdot A.$$

Тогда **касательные напряжения** при сдвиге определяются так:

$$\tau = \frac{Q}{A} \Rightarrow \tau = \frac{F}{A}. \quad (8.1)$$



Рассмотрим характер напряженно-деформированного состояния, которое возникает в точках стержня при сдвиге.

По закону парности касательных напряжений в продольных сечениях бруса, так же как и в его поперечных сечениях будут возникать только касательные напряжения. Тогда на гранях (параллельных соответствующим осям координат) бесконечно малого элемента, «вырезанного» в окрестности любой точки стержня при сдвиге, будут действовать только касательные напряжения τ . Такой случай напряженного состояния называют **чистым сдвигом**.

Чистый сдвиг – частный случай плоского напряженного состояния, при котором по граням прямоугольного элемента действуют только касательные напряжения.

Определим величину и направление главных напряжений при чистом сдвиге:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2},$$

так как $\sigma_x = \sigma_y = 0$, то можем записать

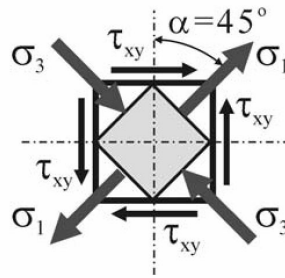
$$\sigma_1 = \tau_{xy}, \quad \sigma_3 = -\tau_{xy}.$$

Направление главных площадок определяется углом α , который найдем по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

учитывая, что $\sigma_x = \sigma_y = 0$,

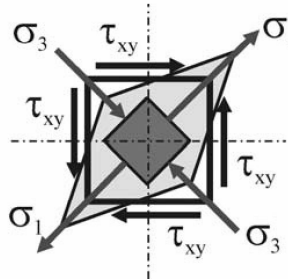
$$\operatorname{tg} 2 \cdot \alpha = -\infty \Rightarrow 2 \cdot \alpha = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$



Как видим, при чистом сдвиге главные напряжения одинаковы по величине, противоположны по знаку ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{xy}$) и направлены под углом 45° к оси стержня (третья главная площадка элемента совпадает с ненагруженной фасадной гранью элемента, следовательно $\sigma_2 = 0$).

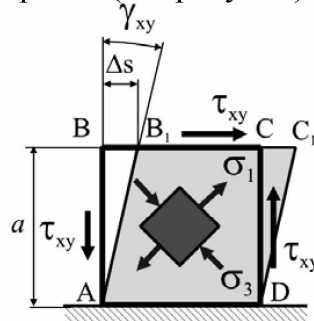
8.3. Определение деформаций и закон Гука при чистом сдвиге

Рассмотрим деформацию квадратного элемента при чистом сдвиге (см. рисунок).



Поскольку по граням элемента не действуют нормальные напряжения, то вдоль граней нет и удлинений. В то же время диагональ, совпадающая с направлением σ_1 , удлинится, а другая диагональ, совпадающая с направлением сжимающего напряжения σ_3 , укоротится. В результате квадрат трансформируется в ромб без изменения длины граней. Таким образом, деформация чистого сдвига характеризуется изменением первоначально прямых углов.

Более наглядное представление о деформации элемента при сдвиге можно получить, закрепив одну из граней (см. рисунок).



Малый угол γ_{xy} , на который изменяется первоначально прямой угол элемента при сдвиге, называется **углом сдвига** или **относительным сдвигом**:

$$\gamma_{xy} = \angle BAB_1.$$

Величину абсолютного смещения грани обозначают Δs и называют **абсолютным сдвигом**.

Из треугольника BAB_1 следует, что

$$\operatorname{tg} \gamma_{xy} = \frac{\Delta s}{a}.$$

Учитывая малость угла, можно считать, что

$$\operatorname{tg} \gamma_{xy} \approx \gamma_{xy},$$

тогда окончательно запишем взаимосвязь между относительным и абсолютным сдвигом элемента

$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta s}{a}. \quad (8.2)$$

Зависимость между нагрузкой и деформацией при сдвиге можно проследить по так называемой **диаграмме сдвига**, которую получают обычно из опытов на кручение тонкостенных трубчатых образцов (в стенках которых, как увидим далее, также возникает напряженное состояние чистого сдвига). Для пластичных материалов диаграмма сдвига аналогична диаграмме растяжения и имеет с ней одинаковые характерные участки, в том числе и участок упругости.

Рассматривая деформацию сдвига в пределах упругости, найдем, что между углом сдвига γ_{xy} и касательными напряжениями τ_{xy} существует линейная зависимость, которая носит название **закона Гука при сдвиге** и может быть выражена следующими формулами:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \text{или} \quad \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}, \quad (8.3)$$

где G – коэффициент пропорциональности, который называется модулем упругости при сдвиге или модулем упругости второго рода и является константой для данного материала. Модуль сдвига может быть определен аналитически, если известны величины модуля Юнга и коэффициента Пуассона:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}.$$

Заметим, что все рассмотренные характеристики упругости материала E , μ , G , K взаимосвязаны, однако в сопротивлении материалов и в теории упругости только две из них (чаще всего E и μ) принимаются независимыми.

Подставляя выражения (8.1) и (8.2) в формулы (8.3), можно записать закон Гука при сдвиге и во «внешних формах» (через абсолютные деформации и внутренние усилия):

$$\Delta s = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A},$$

где a – расстояние между сдвигаемыми гранями; A – площадь грани.

Удельную потенциальную энергию деформации (см. лекцию № 6) при сдвиге определим, учитывая, что $\sigma_1 = \tau_{xy}$, $\sigma_3 = -\tau_{xy}$, следующим образом:

$$u = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)] \Rightarrow$$

$$u = \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{2 \cdot E} \cdot \tau^2 = \frac{\tau^2}{2 \cdot G}.$$

8.4. Расчет на прочность и допускаемые напряжения при сдвиге

Проверим прочность элемента, испытывающего деформацию чистого сдвига. Пусть касательные напряжения на гранях элемента максимальны и равны τ_{max} , а допускаемое напряжение для материала при растяжении – $[\sigma]$.

Если для материала известна величина допускаемых касательных напряжений при сдвиге $[\tau]$, то условие прочности может быть записано в виде:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{A} \leq [\tau]. \quad (8.4)$$

Величина допускаемых напряжений $[\tau]$ зависит от свойств материала, характера нагрузки, типа элементов конструкции и для чистого сдвига определяется обычно по III теории прочности:

$$\sigma_{эkv_{III}} \leq [\sigma].$$

Учитывая, что по III теории прочности

$$\sigma_{эkv_{III}} = \sigma_1 - \sigma_3,$$

а при чистом сдвиге

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{max},$$

можем записать

$$\tau_{max} - (-\tau_{max}) \leq [\sigma],$$

или

$$\tau_{max} \leq \frac{[\sigma]}{2}. \quad (8.5)$$

Сравнивая выражения (8.4) и (8.5), заметим, что по III теории прочности

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

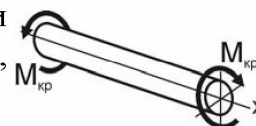
Полученную величину допускаемых касательных напряжений $[\tau]$ используют при расчетах на прочность деталей, испытывающих деформацию сдвига, в соответствии с условием прочности (8.4).

Кручение стержней с круглым поперечным сечением. Внутренние усилия при кручении, напряжения и деформации. Напряженное состояние и разрушение при кручении. Расчет на прочность и жесткость вала круглого поперечного сечения.

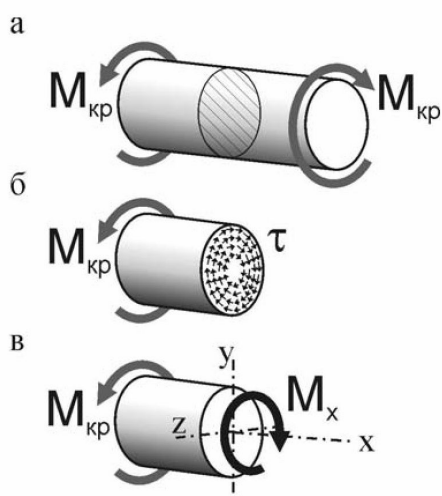
9. ПРОСТЫЕ ВИДЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ. КРУЧЕНИЕ

9.1. Определение внутренних усилий при кручении

Кручение – простой вид сопротивления (нагружения), при котором на стержень действуют моменты в плоскостях, перпендикулярных к продольной оси стержня.



Стержень, работающий на кручение, в дальнейшем будем называть **валом**.



Используя метод мысленных сечений (см. рисунок), находим величину внутренних усилий, действующих в сечении вала при кручении. Очевидно, что в данном случае нагружения из шести уравнений равновесия, составленных для отсеченной части стержня относительно внешних сил и внутренних усилий, лишь одно не обращается тождественно в ноль:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_x = M_{кр}.$$

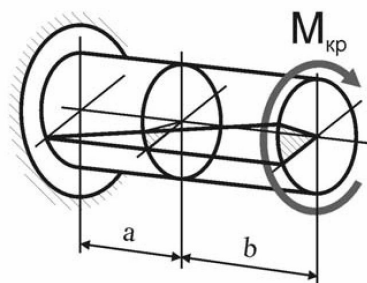
Таким образом, при кручении в произвольном поперечном сечении вала из шести внутренних силовых факторов возникает только один – **внутренний крутящий момент** (M_x).

9.2. Определение напряжений и деформаций при кручении

Выведем формулу для определения касательных напряжений τ и найдем зависимость между углом закручивания φ и внутренним крутящим моментом M_x . Данная задача применительно к валам круглого сечения может быть решена с помощью элементарного математического аппарата, если ввести соответствующие гипотезы, которые достаточно хорошо подтверждаются экспериментами.

Гипотезы, принимаемые при расчете на кручение:

- 1) сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза Бернулли, гипотеза плоских сечений);
- 2) все радиусы данного сечения остаются прямыми (не искривляются) и поворачиваются на один и тот же угол φ , то есть каждое сечение поворачивается относительно оси x как жесткий тонкий диск;

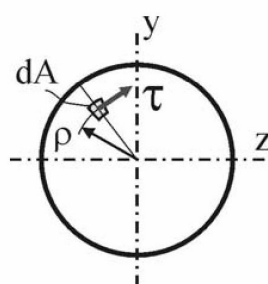


3) расстояния между сечениями при деформации не изменяются.

Статическая сторона задачи

Чтобы определить напряжения в поперечных сечениях стержня, рассмотрим, прежде всего, статическую сторону задачи.

Поскольку крутящий момент M_x – единственный внутренний силовой фактор в поперечном сечении, действующий при этом в плоскости данного сечения, можно предположить, что при кручении в поперечных сечениях вала возникают только касательные напряжения.



В сечении вала выделим элементарную площадку dA на расстоянии ρ от продольной оси (ось x) стержня. При кручении на площадке dA , будут действовать касательные напряжения τ , которые создадут элементарный крутящий момент dM_x относительно оси x :

$$dM_x = \tau \cdot dA \cdot \rho.$$

Тогда полный момент, возникающий во всем сечении, найдем как

$$M_x = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA, \quad (9.1)$$

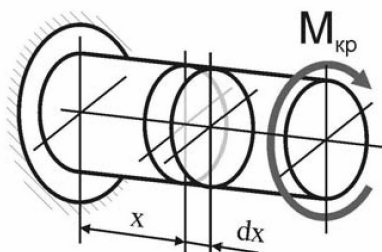
где τ – касательное напряжение, действующее на элементарной площадке dA , расположенной на произвольном расстоянии (радиусе) ρ от центра сечения.

Перпендикулярность вектора касательных напряжений радиусу объясняется отсутствием на поверхности вала касательных напряжений, параллельных его оси, и, соответственно (по закону парности касательных напряжений), отсутствием касательных напряжений вдоль радиуса.

Как видим, задача является внутренне статически неопределимой (см. лекцию № 4), так как неизвестен характер распределения касательных напряжений по сечению – $\tau(\rho)=?$. В соответствии с общим планом решения статически неопределимых задач, рассмотрим геометрическую картину деформаций.

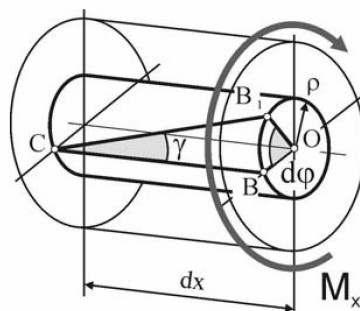
Геометрическая сторона задачи

Рассмотрим деформацию элемента стержня (вала) длиной dx , выделенного из закручиваемого стержня в произвольной точке с координатой x .



Условно примем, что левое сечение элемента dx остается неподвижным, а правое поворачивается на угол $d\phi$, создаваемый за счет закручивания вала на

длине dx . Один из радиусов OB , оставаясь прямым, поворачивается вместе с сечением на угол $d\varphi$, при этом точка B переходит в положение B_1 , а образующая CB – в положение CB_1 , поворачиваясь на угол γ – угол сдвига в этой точке вала.



Длину дуги BB_1 найдем из рассмотрения треугольников $OB B_1$ и $CB B_1$:

$$\cup BB_1 = \rho \cdot d\varphi = \gamma \cdot dx \Rightarrow$$

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \quad (9.2)$$

Физическая сторона задачи

Запишем закон Гука, связывающий касательные напряжения с углом сдвига (см. лекцию № 9)

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (9.3)$$

Математическая сторона задачи

Подставим выражение (9.2) в формулу (9.3):

$$\tau = \rho \cdot G \cdot \frac{d\varphi}{dx}, \quad (9.4)$$

а полученное выражение (9.4) – в формулу (9.1):

$$M_x = \int_A \rho^2 \cdot G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot dA. \quad (9.5)$$

Так как в выражении (9.5) величины G и $d\varphi/dx$, в соответствии с принятыми гипотезами, остаются постоянными по данному сечению, то их можно вынести за знак интеграла:

$$M_x = G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot \int_A \rho^2 \cdot dA.$$

Величина

$$J_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

называется полярным моментом инерции и является геометрической характеристикой данного сечения (см. лекцию № 2).

Таким образом, окончательно можем записать

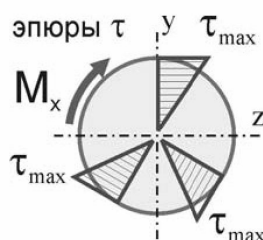
$$M_x = G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot J_\rho, \quad (9.6)$$

или, подставляя (9.4) в (9.6),

$$M_x = \frac{\tau}{\rho} \cdot J_\rho.$$

Величина **касательных напряжений при кручении** определяется следующим образом:

$$\tau = \frac{M_x \cdot \rho}{J_\rho}.$$



Как видим, касательные напряжения распределены по сечению вала по линейному закону и достигают максимальной величины на поверхности вала (при $\rho = \rho_{max}$):

$$\tau_{max} = \frac{M_x \cdot \rho_{max}}{J_\rho} = \frac{M_x}{W_\rho},$$

где $W_\rho = J_\rho / \rho_{max}$ – полярный момент сопротивления.

Из формулы (9.6) легко найти и другие величины, характеризующие деформацию вала при кручении.

Величина

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (9.7)$$

называется **относительным (погонным) углом закручивания** и имеет размерность рад/м.

Используя выражение (9.6), найдем формулу для определения относительного угла закручивания:

$$\theta = \frac{M_x}{G \cdot J_\rho}. \quad (9.8)$$

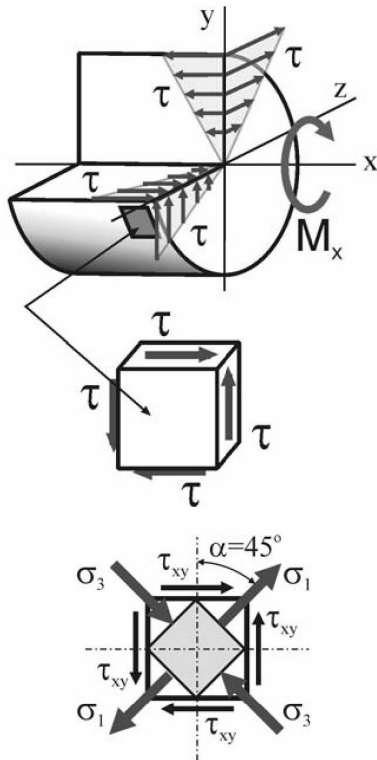
Зная формулы (9.7) и (9.8) для определения относительного угла закручивания, можно записать формулу для определения взаимного угла поворота двух сечений, расположенных на расстоянии l друг от друга:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_x}{G \cdot J_\rho} \cdot dx.$$

Если в пределах участка длиной l крутящий момент и геометрические характеристики сечения вала остаются постоянными, то угол закручивания можно определить как

$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_x \cdot l}{G \cdot J_\rho}$$

9.3. Напряженное состояние и виды разрушения при кручении



Исследуем напряженное состояние при кручении. По закону парности касательных напряжений в диаметральных сечениях вала возникают такие же касательные напряжения, как и в поперечном сечении. При этом все остальные напряжения равны нулю, то есть при кручении возникает частный случай плоского напряженного состояния – **чистый сдвиг**.

Как было показано в лекции № 8, главные нормальные напряжения σ_1 и σ_3 при чистом сдвиге противоположны по знаку, одинаковы по величине и в наиболее опасных точках (на поверхности вала) равны τ_{max} :

$$\sigma_1 = \tau_{max}, \quad \sigma_3 = -\tau_{max}.$$

Кроме того известно, что главные напряжения при чистом сдвиге действуют по линии (для цилиндрического образца – по винтовой линии), наклоненной к оси вала под углом 45° .

Именно по этой линии, как показывают эксперименты, будут разрушаться хрупкие материалы (например, чугун), которые плохо сопротивляются растягивающим напряжениям. Материалы, плохо сопротивляющиеся действию касательных напряжений, будут разрушаться в плоскостях действия наибольших касательных напряжений: например, в случае кручения деревянных валов с продольным расположением волокон трещины разрушения ориентированы вдоль образующей, а стальные валы в пластическом состоянии на практике часто разрушаются по поперечному сечению, перпендикулярному к оси вала.

9.4. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

При расчетах на прочность при кручении (также как и при растяжении) могут решаться три задачи:

- а) проверочный расчет – проверить выдержит ли вал приложенную нагрузку;
- б) проектировочный расчет – определить размеры вала из условия его прочности;
- в) расчет по несущей способности – определить максимально допустимый крутящий момент.

При проверочном расчете на прочность рекомендуется следующий порядок расчета валов при кручении:

- 1) по схеме вала и действующим на него скручивающим моментам строят эпюру внутренних крутящих моментов по отдельным участкам;
- 2) выбирают материал для рассчитываемого вала и определяют для этого материала допускаемое напряжение $[\tau] = [\sigma]/2$;
- 3) для участка вала с максимальным по модулю значением крутящего момента записывают условие прочности при кручении

$$\tau_{max} = \frac{|M_x|_{max}}{W_p} \leq [\tau].$$

Проектировочный расчет проводится, исходя из условия прочности на основе следующего соотношения:

$$W_p \geq \frac{M_x}{[\tau]}.$$

Для сплошного круглого сечения $W_p = \pi \cdot d^3 / 16$, отсюда можем записать выражение для определения диаметра вала из условия его прочности:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_x}{\pi \cdot [\tau]}}.$$

Определив размеры вала из условия прочности, проверяют вал на жесткость по формуле

$$\theta_{max} = \frac{M_x}{G \cdot J_p} \leq [\theta],$$

здесь $[\theta]$ – допустимый относительный угол закручивания вала.

Если данное условие не выполняется, то необходимо выбрать размеры вала из условия жесткости:

$$J_p \geq \frac{M_x}{G \cdot [\theta]}.$$

Учитывая, что для сплошного круглого сечения $J_p = \pi \cdot d^4 / 32$, можем записать выражение для определения диаметра вала из условия его жесткости:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_x}{G \cdot \pi \cdot [\theta]}}.$$

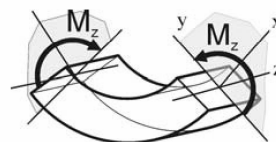
Окончательно выбирают диаметр d , удовлетворяющий условиям прочности и жесткости.

Плоский поперечный изгиб балок. Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные зависимости внутренних усилий. Правила проверки эпюр внутренних усилий при изгибе. Нормальные и касательные напряжения при изгибе. Расчет на прочность по нормальным и касательным напряжениям.

10. ПРОСТЫЕ ВИДЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

10.1. Общие понятия и определения

Изгиб – это такой вид нагружения, при котором стержень загружен моментами в плоскостях, проходящих через продольную ось стержня.



Стержень, работающий на изгиб, называется **балкой** (или **брусом**). В дальнейшем будем рассматривать прямолинейные балки, поперечное сечение которых имеет хотя бы одну ось симметрии.

В сопротивлении материалов различают изгиб плоский, косой и сложный.

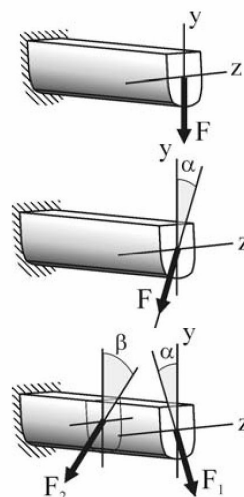
Плоский изгиб – изгиб, при котором все усилия, изгибающие балку, лежат в одной из плоскостей симметрии балки (в одной из главных плоскостей).

Главными плоскостями инерции балки называют плоскости, проходящие через главные оси поперечных сечений и геометрическую ось балки (ось x).

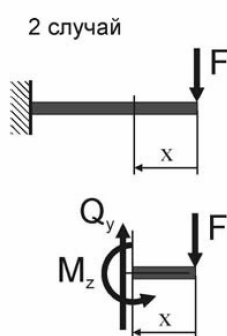
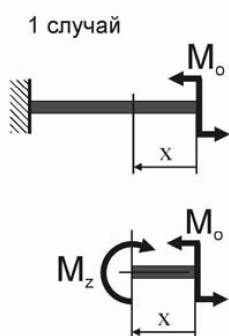
Косой изгиб – изгиб, при котором нагрузки действуют в одной плоскости, не совпадающей с главными плоскостями инерции.

Сложный изгиб – изгиб, при котором нагрузки действуют в различных (произвольных) плоскостях.

Далее будем рассматривать плоский изгиб, то есть все силы будем прилагать в плоскости симметрии балки.



10.2. Определение внутренних усилий при изгибе



Рассмотрим два характерных случая изгиба: в первом – консольная балка изгибается сосредоточенным моментом M_o ; во втором – сосредоточенной силой F .

Используя метод мысленных сечений и составляя уравнения равновесия для отсеченных частей балки, определим внутренние усилия в том и другом случае:

1 случай

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q_y = 0;$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_z = M_o.$$

2 случай

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q_y = F;$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_z = -F \cdot x.$$

Остальные уравнения равновесия, очевидно, тождественно равны нулю.

Таким образом, в общем случае плоского изгиба в сечении балки из шести внутренних усилий возникает два – **изгибающий момент** M_z и **поперечная сила** Q_y (или при изгибе относительно другой главной оси – изгибающий момент M_y и поперечная сила Q_z).

При этом, в соответствии с двумя рассмотренными случаями нагружения, плоский изгиб можно подразделить на **чистый** и **поперечный**.

Чистый изгиб – плоский изгиб, при котором в сечениях стержня из шести внутренних усилий возникает только одно – изгибающий момент (см. первый случай).

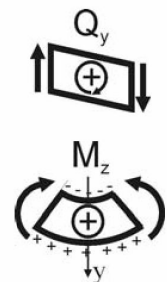
Поперечный изгиб – изгиб, при котором в сечениях стержня кроме внутреннего изгибающего момента возникает и поперечная сила (см. второй случай).

Строго говоря, к простым видам сопротивления относится лишь чистый изгиб; поперечный изгиб относят к простым видам сопротивления условно, так как в большинстве случаев (для достаточно длинных балок) действием поперечной силы при расчетах на прочность можно пренебречь.

При определении внутренних усилий будем придерживаться следующего правила знаков:

1) поперечная сила Q_y считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемый элемент балки по часовой стрелке;

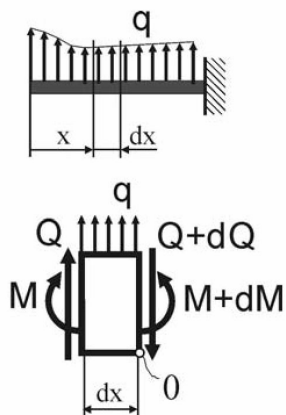
2) изгибающий момент M_z считается положительным, если при изгибе элемента балки верхние волокна элемента оказываются сжатыми, а нижние – растянутыми (правило зонты).



Таким образом, решение задачи по определению внутренних усилий при изгибе будем выстраивать по следующему плану: 1) на первом этапе, рассматривая условия равновесия конструкции в целом, определяем, если это необходимо, неизвестные реакции опор (отметим, что для консольной балки реакции в заделке можно и не находить, если рассматривать балку со свободного конца); 2) на втором этапе выделяем характерные участки балки, принимая за границы участков точки приложения сил, точки изменения формы или размеров балки, точки закрепления балки; 3) на третьем этапе определяем внутренние усилия в сечениях балки, рассматривая условия равновесия элементов балки на каждом из участков.

10.3. Дифференциальные зависимости при изгибе

Установим некоторые взаимосвязи между внутренними усилиями и внешними нагрузками при изгибе, а также характерные особенности эпюр Q и M , знание которых облегчит построение эпюр и позволит контролировать их правильность. Для удобства записи будем обозначать: $M \equiv M_z$, $Q \equiv Q_y$.



Выделим на участке балки с произвольной нагрузкой в месте, где нет сосредоточенных сил и моментов, малый элемент dx . Так как вся балка находится в равновесии, то и элемент dx будет находиться в равновесии под действием приложенных к нему поперечных сил, изгибающих моментов и внешней нагрузки. Поскольку Q и M в общем случае меняются вдоль оси балки, то в сечениях элемента dx будут возникать поперечные силы Q и $Q+dQ$, а также изгибающие моменты M и $M+dM$. Из условия равновесия выделенного элемента получим

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q + q \cdot dx - (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow M + Q \cdot dx + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

Первое из двух записанных уравнений дает условие

$$q = \frac{dQ}{dx}. \quad (10.1)$$

Из второго уравнения, пренебрегая слагаемым $q \cdot dx \cdot (dx/2)$ как бесконечно малой величиной второго порядка, найдем

$$Q = \frac{dM}{dx}. \quad (10.2)$$

Рассматривая выражения (10.1) и (10.2) совместно можем получить

$$q = \frac{d^2 M}{dx^2}. \quad (10.3)$$

Соотношения (10.1), (10.2) и (10.3) называют **дифференциальными зависимостями Д. И. Журавского при изгибе**.

Анализ приведенных выше дифференциальных зависимостей при изгибе позволяет установить некоторые особенности (правила) построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил:

а – на участках, где нет распределенной нагрузки q , эпюры Q ограничены прямыми, параллельными базе, а эпюры M – наклонными прямыми;

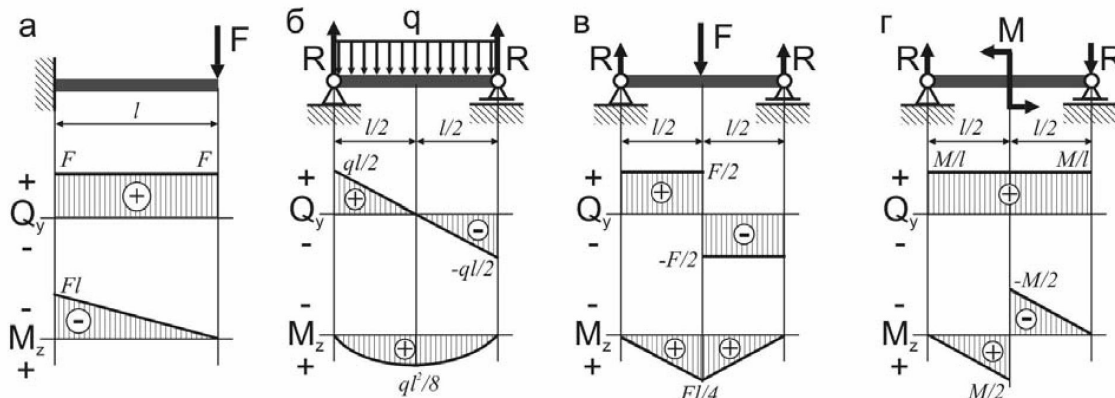
б – на участках, где к балке приложена распределенная нагрузка q , эпюры Q ограничены наклонными прямыми, а эпюры M – квадратичными параболами. При этом, если эпюру M строим «на растянутом волокне», то выпуклость па-

работы будет направлена по направлению действия q , а экстремум будет расположен в сечении, где эюра Q пересекает базовую линию;

в – в сечениях, где к балке прикладывается сосредоточенная сила на эюре Q будут скачки на величину и в направлении данной силы, а на эюре M – перегибы, острием направленные в направлении действия этой силы;

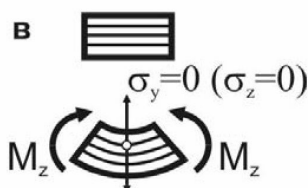
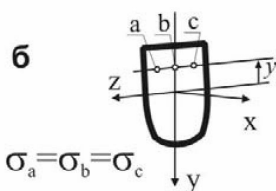
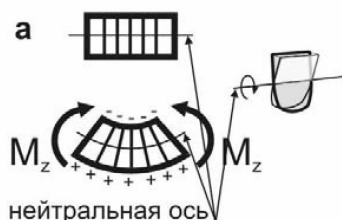
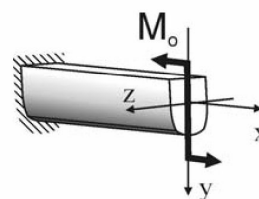
г – в сечениях, где к балке прикладывается сосредоточенный момент на эюре Q изменений не будет, а на эюре M – скачки на величину этого момента;

д – на участках, где $Q > 0$, момент M возрастает, а на участках, где $Q < 0$, момент M убывает (см. рисунки а–г).



10.4. Нормальные напряжения при чистом изгибе прямого бруса

Рассмотрим случай чистого плоского изгиба балки и выведем формулу для определения нормальных напряжений для данного случая. Отметим, что в теории упругости можно получить точную зависимость для нормальных напряжений при чистом изгибе, если же решать эту задачу методами сопротивления материалов необходимо ввести некоторые допущения.



Таких гипотез при изгибе три:

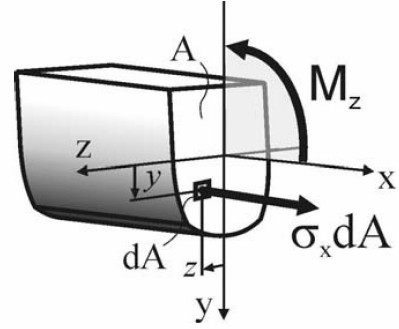
а – гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли) – сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации, а лишь поворачиваются относительно некоторой линии, которая называется нейтральной осью сечения балки. При этом волокна балки, лежащие с одной стороны от нейтральной оси будут растягиваться, а с другой – сжиматься; волокна, лежащие на нейтральной оси своей длины не изменяют;

б – гипотеза о постоянстве нормальных напряжений – напряжения, действующие на одинаковом расстоянии y от нейтральной оси, постоянны по ширине бруса;

в – гипотеза об отсутствии боковых давлений – соседние продольные волокна не давят друг на друга.

Статическая сторона задачи

Чтобы определить напряжения в поперечных сечениях балки, рассмотрим, прежде всего, статическую сторону задачи. Применяя метод мысленных сечений и составляя уравнения равновесия для отсеченной части балки, найдем внутренние усилия при изгибе. Как было показано ранее, единственным внутренним усилием, действующим в сечении бруса при чистом изгибе, является внутренний изгибающий момент, а значит здесь возникнут связанные с ним нормальные напряжения.



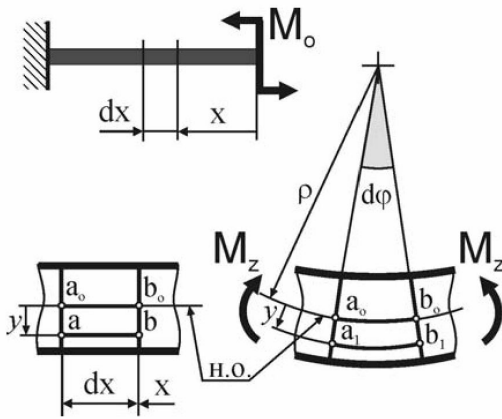
Связь между внутренними усилиями и нормальными напряжениями в сечении балки найдем из рассмотрения напряжений на элементарной площадке dA , выделенной в поперечном сечении A балки в точке с координатами y и z (ось y для удобства анализа направлена вниз):

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x \cdot dA = 0; \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA = 0; \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z = M_o \Rightarrow \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA = M_o. \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Как видим, задача является внутренне статически неопределимой, так как неизвестен характер распределения нормальных напряжений по сечению. Для решения задачи рассмотрим геометрическую картину деформаций.

Геометрическая сторона задачи

Рассмотрим деформацию элемента балки длиной dx , выделенного из изгибаемого стержня в произвольной точке с координатой x . Учитывая принятую ранее гипотезу плоских сечений, после изгиба сечения балки повернутся относительно нейтральной оси (н.о.) на угол $d\varphi$, при этом волокно ab , отстоящее от нейтральной оси на расстояние y , превратится в дугу окружности a_1b_1 , а его длина изменится на некоторую величину. Здесь напомним, что длина волокон, лежащих на нейтральной оси, не изменяется, а потому дуга a_0b_0 (радиус кривизны которой обозначим ρ) имеет ту же длину, что и отрезок a_0b_0 до деформации $a_0b_0 = dx$.



Найдем относительную линейную деформацию ϵ_x волокна ab изогнутой балки:

$$\epsilon_x = \frac{a_1b_1 - a_0b_0}{a_0b_0} = \frac{(\rho + y) \cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}. \quad (10.5)$$

Физическая сторона задачи

Учитывая, что, в соответствии с гипотезой об отсутствии боковых давлений, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, запишем закон Гука для изгиба в виде

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x. \quad (10.6)$$

Математическая сторона задачи

Из формулы (10.6) с учетом (10.5), получим закон распределения нормальных напряжений по сечению балки:

$$\sigma_x = E \cdot \frac{y}{\rho}. \quad (10.7)$$

Подставляя (10.7) в каждое из уравнений (10.4), имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} N = \int_A \sigma_x \cdot dA = 0 &\Rightarrow \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \cdot dA = 0 \Rightarrow S_z = 0, \\ M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA = 0 &\Rightarrow \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \cdot z \cdot dA = 0 \Rightarrow J_{yz} = 0, \\ M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA = M_0 &\Rightarrow \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y^2 \cdot dA = M_z \Rightarrow \frac{E}{\rho} \cdot J_z = M_z. \end{aligned}$$

Из анализа первого и второго полученных выражений следует, что оси y и z являются главными центральными осями сечения, а нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения.

Из последнего равенства получим формулу для определения **кривизны бруса** ($1/\rho$) при изгибе

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot J_z}, \quad (10.8)$$

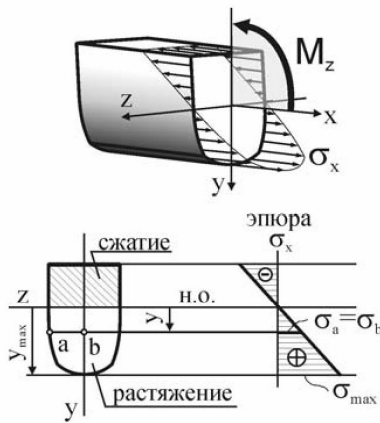
подставляя которую в выражение (10.7), получим формулу определения **нормальных напряжений при изгибе**:

$$\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{J_z}. \quad (10.9)$$

Из анализа полученного уравнения следует, что нормальные напряжения при изгибе равны нулю в точках, лежащих на нейтральной оси, и достигают экстремальных значений на поверхности балки, при $y = |y|_{\max}$.

Максимальные нормальные напряжения при изгибе найдем по формуле:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_z| \cdot |y|_{\max}}{J_z} = \frac{|M_z|}{W_z},$$



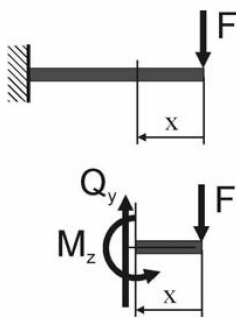
где W_z – осевой момент сопротивления

$$W_z = \frac{J_z}{|y|_{\max}}.$$

Таким образом, в случае изгиба **условие прочности по нормальным напряжениям** может быть записано в следующем виде (для материала балки, одинаково сопротивляющегося растяжению-сжатию):

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma].$$

10.5. Касательные напряжения при поперечном изгибе прямого бруса



При плоском поперечном изгибе, когда в сечениях балки действуют и изгибающий момент M и поперечная сила Q , возникают не только нормальные σ , но и касательные напряжения τ .

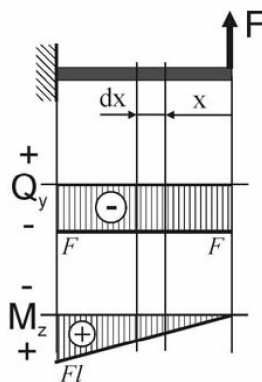
Нормальные напряжения при поперечном изгибе рассчитываются по тем же формулам, что и при чистом изгибе:

$$\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{J_z}; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}.$$

Далее получим зависимости для определения касательных напряжений τ в случае поперечного изгиба балки.

При выводе формулы примем некоторые гипотезы, которые сделают данную задачу статически определимой:

- 1) касательные напряжения, действующие на одинаковом расстоянии y от нейтральной оси, постоянны по ширине бруса;
- 2) касательные напряжения всюду параллельны силе Q .

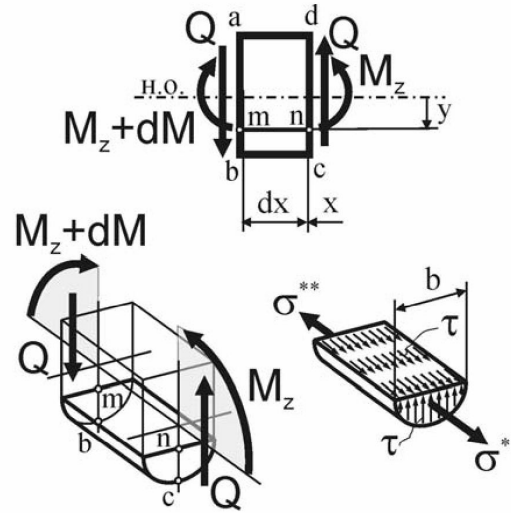


Рассмотрим консольную балку, находящуюся в условиях поперечного изгиба под действием силы F . Построим эпюры внутренних усилий Q_y и M_z .

На расстоянии x от свободного конца балки выделим элементарный участок балки $abcd$ длиной dx и шириной, равной ширине балки b . Покажем внутренние усилия, действующие по граням элемента: на грани cd возникает поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_z , а на грани ab – также поперечная сила Q_y и изгибающий момент $M_z + dM$ (так как Q_y остается постоянной по длине балки, а момент M_z изменяется, см. эпюру).

На расстоянии y от нейтральной оси отсечем часть элемента $abcd$, покажем напряжения, действующие по граням полученного элемента $mncn$, и рассмотрим его равновесие. На гранях, являющихся частью наружной поверхности балки, нет напряжений. На боковых гранях элемента от действия изгибающего момента M_z возникают нормальные напряжения σ^* и σ^{**} , причем

$$\sigma^* = \frac{M_z \cdot y}{J_z}; \quad \sigma^{**} = \frac{(M_z + dM) \cdot y}{J_z}.$$



Кроме того, на этих гранях от действия поперечной силы Q_y возникают касательные напряжения τ , такие же напряжения возникают по закону парности касательных напряжений и на верхней грани элемента.

Составим уравнение равновесия элемента $mncn$, проецируя равнодействующую рассмотренных напряжений на ось x :

$$\begin{aligned} \int_A \sigma^* \cdot dA - \int_A \sigma^{**} \cdot dA + \tau \cdot dx \cdot b &= 0, \\ \int_A \frac{M_z \cdot y}{J_z} \cdot dA - \int_A \frac{M_z \cdot y}{J_z} \cdot dA - \int_A \frac{dM \cdot y}{J_z} \cdot dA + \tau \cdot dx \cdot b &= 0, \\ \tau \cdot dx \cdot b - \frac{dM}{J_z} \cdot \int_A y \cdot dA &= 0. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла, представляет собой ни что иное, как статический момент боковой грани элемента $mncn$ относительно оси z , поэтому можем записать

$$\tau = \frac{dM \cdot S'_z}{dx \cdot b \cdot J_z}.$$

Учитывая, что, согласно дифференциальным зависимостям Журавского Д. И. при изгибе,

$$Q = \frac{dM}{dx},$$

выражение для **касательных напряжений при поперечном изгибе** τ можем переписать следующим образом (**формула Журавского**)

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S'_z}{b \cdot J_z}. \quad (10.10)$$

Проанализируем формулу Журавского (10.10). Здесь

$Q \equiv Q_y$ – поперечная сила в рассматриваемом сечении;

J_z – осевой момент инерции сечения относительно оси z ;

b – ширина сечения в том месте, где определяются касательные напряжения;

S'_z – статический момент относительно оси z части сечения, расположенной выше (или ниже) того волокна, где определяется касательное напряжение τ :

$$S'_z = \int_y^{y_{max}} y \cdot dA = y'_c \cdot A',$$

здесь y'_c и A' – координата центра тяжести и площадь рассматриваемой части сечения, соответственно.

10.6. Полная проверка прочности. Опасные сечения и опасные точки

Для проверки на прочность при изгибе по действующим на балку внешним нагрузкам строят эпюры изменения внутренних усилий (M_z , Q_y) по ее длине и определяют опасные сечения балки, для каждого из которых необходимо провести проверку прочности.

При полной проверке прочности таких сечений будет, как минимум, три (иногда они совпадают):

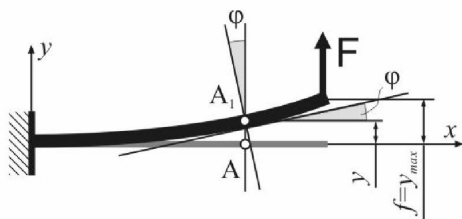
- 1) сечение, в котором изгибающий момент M_z достигает своего максимального по модулю значения, – именно по этому сечению подбирают сечение всей балки;
- 2) сечение, в котором поперечная сила Q_y достигает своего максимального по модулю значения;
- 3) сечение, в котором и изгибающий момент M_z и поперечная сила Q_y достигают по модулю достаточно больших величин.

В каждом из опасных сечений необходимо, построив эпюры нормальных и касательных напряжений, найти опасные точки сечения (проверка прочности проводится для каждой из них), которых также будет, как минимум, три:

- 1) точка, в которой нормальные напряжения σ_x достигают своего максимального значения, – то есть точка на наружной поверхности балки наиболее удаленная от нейтральной оси сечения;
- 2) точка, в которой касательные напряжения τ_{xy} достигают своего максимального значения, – точка, лежащая на нейтральной оси сечения;
- 3) точка, в которой и нормальные напряжения σ_x и касательные напряжения τ_{xy} достигают достаточно больших величин (эта проверка имеет смысл для сечений типа тавра или двутавра, где ширина резко изменяет свое значение).

11. ДЕФОРМАЦИЯ БАЛОК ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ**11.1. Основные понятия и определения**

Рассмотрим деформацию балки при плоском изгибе. Ось балки под действием нагрузки искривляется в плоскости действия сил (плоскость xOy), при этом поперечные сечения поворачиваются и смещаются на некоторую величину. Искривленная ось балки при изгибе называется **изогнутой осью** или **упругой линией**.



Деформацию балок при изгибе будем описывать двумя параметрами:

1) **прогиб** (y) – смещение центра тяжести сечения балки по направлению, перпендикулярному к ее оси.

Не путать прогиб y с координатой y точек сечения балки!

Наибольший прогиб балки называется **стрелой прогиба** ($f=y_{max}$);

2) **угол поворота сечения** (φ) – угол, на который сечение поворачивается относительно своего первоначального положения (или угол между касательной к упругой линии и первоначальной осью балки).

В общем случае величина прогиба балки в данной точке является функцией координаты x и может быть записана в виде следующего уравнения:

$$y = y(x).$$

Тогда угол между касательной к изогнутой оси балки и осью x будет определяться из следующего выражения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Ввиду малости углов и перемещений, можем считать, что

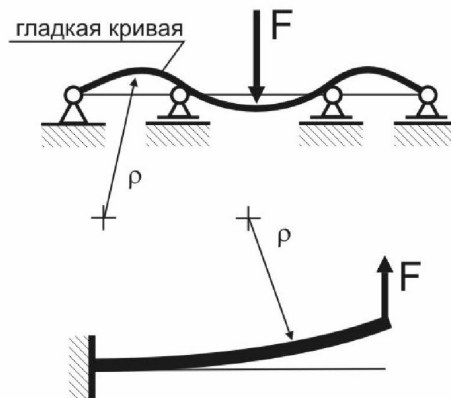
$$\varphi \approx \frac{dy}{dx}$$

угол поворота сечения есть первая производная от прогиба балки по абсциссе сечения.

11.2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Исходя из физической природы явления изгиба, можем утверждать, что изогнутая ось непрерывной балки должна быть непрерывной и гладкой (не

имеющей изломы) кривой. При этом деформация того или иного участка балки определяется искривлением его упругой линии, то есть кривизной оси балки.



Ранее (формула (10.8), лекция 10) нами была получена формула для определения кривизны бруса ($1/\rho$) при изгибе

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot J_z}.$$

С другой стороны, из курса высшей математики известно, что уравнение кривизны плоской кривой выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pm \frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Приравняв правые части данных выражений, получим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, которое называется точным уравнением изогнутой оси бруса

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_z}{E \cdot J_z}.$$

В координатной системе прогибов xOy , когда ось y направлена вверх, знак момента определяет знак второй производной от y по x .

Интегрирование данного уравнения, очевидно, представляет некоторые трудности. Поэтому его, как правило, записывают в упрощенной форме, пренебрегая величиной в скобках по сравнению с единицей.

Тогда **дифференциальное уравнение упругой линии балки** будем рассматривать в виде:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{E \cdot J_z}. \quad (11.1)$$

Решение дифференциального уравнения (11.1) найдем, интегрируя обе его части по переменной x :

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M_z(x)}{E \cdot J_z} \cdot dx + C_1, \quad (11.2)$$

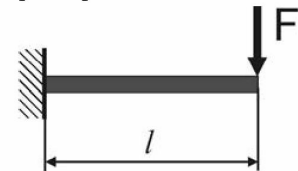
$$y = \iint \frac{M_z(x)}{E \cdot J_z} \cdot dx + C_1 \cdot x + D_1. \quad (11.3)$$

Постоянные интегрирования C_1, D_1 находят из граничных условий – условий закрепления балки, при этом для каждого участка балки будут определяться свои постоянные.

Рассмотрим процедуру решения данных уравнений на конкретном примере.

Дано:

Консольная балка длиной l , нагруженная поперечной силой F . Материал балки (E), форму и размеры ее сечения (J_z) также считаем известными.



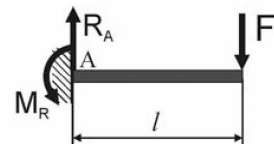
Определить закон изменения угла поворота $\varphi(x)$ и прогиба $y(x)$ балки по ее длине и их значения в характерных сечениях.

Решение

а) определим реакции в заделке

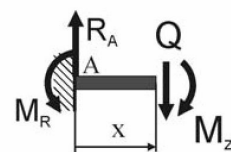
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = F,$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_R = -F \cdot l.$$



б) методом мысленных сечений определим внутренний изгибающий момент

$$M_z(x) = R_A \cdot x - M_R = F \cdot x - F \cdot l.$$



в) определим угол поворота сечений балки

$$\varphi(x) = \int \frac{M_z(x)}{E \cdot J_z} \cdot dx + C_1 = \int \frac{F \cdot x - F \cdot l}{E \cdot J_z} \cdot dx + C_1 \Rightarrow$$

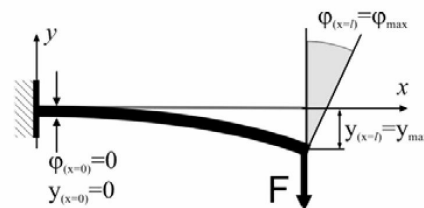
$$\varphi(x) = \frac{F \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot J_z} - \frac{F \cdot l \cdot x}{E \cdot J_z} + C_1.$$

Постоянную C_1 найдем из условий закрепления, а именно – в жесткой заделке угол поворота равен нулю, тогда

$$\varphi(x=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Найдем угол поворота свободного конца балки ($x=l$)

$$\varphi(x=l) = -\frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J_z}.$$



Знак «минус» показывает, что сечение повернулось по часовой стрелке.

г) определим прогибы балки

$$y(x) = \int \varphi \cdot dx + C_2 = \int \left(\frac{F \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot J_z} - \frac{F \cdot l \cdot x}{E \cdot J_z} \right) \cdot dx + D_1 \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{F \cdot x^3}{2 \cdot 3 \cdot E \cdot J_z} - \frac{F \cdot l \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot J_z} + D_1.$$

Постоянную D_1 найдем из условий закрепления, а именно – в жесткой заделке прогиб равен нулю, тогда

$$y(x=0) = 0 \Rightarrow D_1 = 0.$$

Найдем прогиб свободного конца балки ($x=l$)

$$y(x=l) = -\frac{1}{3} \frac{F \cdot l^3}{E \cdot J_z}.$$

Знак «минус» показывает, что сечение опустилось вниз.

11.3. Универсальное уравнение упругой линии. Метод начальных параметров

Использование изложенной техники определения перемещений для балок, имеющих несколько участков, оказывается достаточно трудоемким, так как для n участков число произвольных констант (C и D) возрастает до $2n$. Для уменьшения вычислительной работы в подобных случаях был разработан ряд методов, в том числе и метод начальных параметров, позволяющий при любом числе участков свести решение к отысканию всего двух констант – прогиба и угла поворота в начале координат.

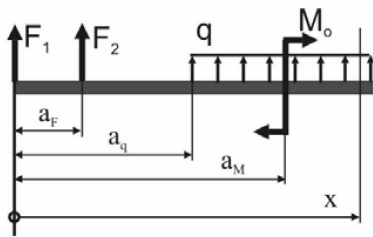
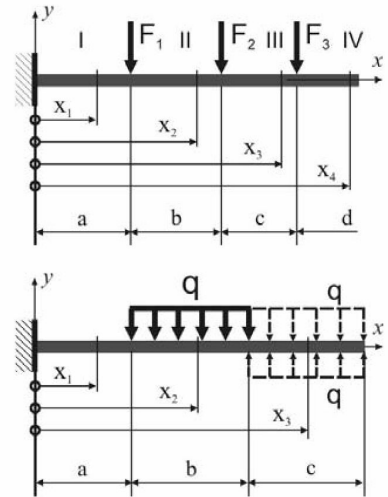
Для реализации метода начальных параметров необходимо при составлении уравнения моментов по участкам и интегрировании этого уравнения придерживаться следующих правил:

1) начало координат необходимо выбирать общим для всех участков в крайней левой (или правой) точке балки;

2) все составляющие уравнения моментов на предыдущем участке должны сохраняться неизменными в уравнении моментов последующих участков;

3) в случае обрыва распределенной нагрузки ее продлевают до конца балки, а для восстановления действительных условий нагружения вводят «компенсирующую» нагрузку обратного направления

4) интегрировать уравнения на всех участках следует, не раскрывая скобок.



Рассмотрим некоторый отрезок балки, нагруженной произвольной системой сил и моментов (реакции опор также представляем как внешние силы), и составим для нее уравнение моментов в произвольном сечении с соблюдением указанных правил:

$$M(x) = F_1 \cdot x + F_2 \cdot (x - a_{F_2}) + q \cdot \frac{(x - a_q)^2}{2} + M_0.$$

Группируя подобные слагаемые, запишем данное уравнение в самом общем виде:

$$M(x) = \sum M_i \cdot (x - a_{M_i})^0 + \sum F_i \cdot \frac{(x - a_{F_i})^1}{1} + \sum q_i \cdot \frac{(x - a_{q_i})^2}{2}. \quad (11.4)$$

В формуле (11.4): a_M , a_F , a_q – координаты точки приложения внешнего момента, силы или начало распределенной нагрузки. Следует помнить, что множитель $(x-a)$ должен быть всегда положительным, слагаемые с отрицательными значениями $(x-a)$ отбрасываются.

Здесь заметим, что множитель $(x-a_M)^0$ равен единице, но он необходим для сохранения подобия слагаемых при последующем интегрировании.

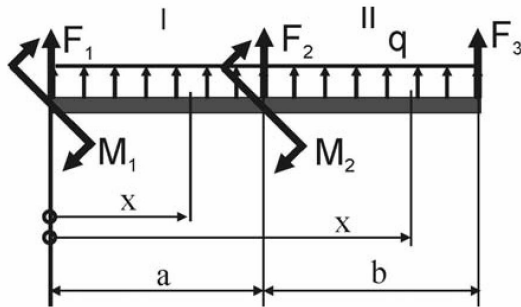
Подставляя формулу (11.4) в выражения (11.2), можно записать **универсальные уравнения** для определения углов и прогибов балки при изгибе:

$$\varphi(x) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \int M(x) \cdot dx + C_1 \Rightarrow$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[\sum M_i \cdot \frac{(x - a_{M_i})^1}{1} + \sum F_i \cdot \frac{(x - a_{F_i})^2}{1 \cdot 2} + \sum q_i \cdot \frac{(x - a_{q_i})^3}{2 \cdot 3} \right] + C_1;$$

$$y(x) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \int \varphi(x) \cdot dx + C_1 \cdot x + D_1 \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{E \cdot J_z} \left[\sum M_i \frac{(x - a_{M_i})^2}{2} + \sum F_i \frac{(x - a_{F_i})^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \sum q_i \frac{(x - a_{q_i})^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right] + C_1 x + D_1.$$



Покажем, что C_1 и D_1 являются единственными константами, причем

$$C_1 = \varphi(x=0) = \varphi_0, \quad D_1 = y(x=0) = y_0$$

где φ_0, y_0 – угол поворота и прогиб балки в начале координат.

Рассмотрим два участка балки, нагруженной произвольной нагрузкой. Составим для обоих участков универсальное

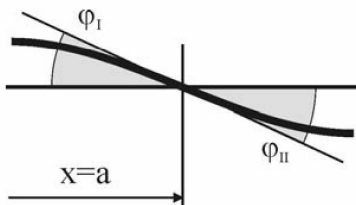
уравнение углов:

$$\varphi_I = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[M_1 \cdot x + F_1 \cdot \frac{x^2}{2} + q \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} \right] + C_I,$$

$$\varphi_{II} = \frac{1}{E \cdot J_z} \left[M_1 \cdot x + M_2 (x - a) + F_1 \frac{x^2}{2} + F_2 \frac{(x - a)^2}{2} + q \frac{x^3}{2 \cdot 3} - q' \frac{(x - a)^3}{2 \cdot 3} \right] + C_{II}.$$

Для определения постоянных интегрирования C_I и C_{II} воспользуемся граничными условиями. Тогда, при $x=0$ (из первого уравнения):

$$\varphi_I = \varphi_0 = C_I.$$



Очевидно, что на границе участков ($x=a$) угол поворота должен быть одинаков, то есть при $x=a$ должно быть $\varphi_I(x=a) = \varphi_{II}(x=a)$:

$$\varphi_I(x=a) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[M_1 \cdot a + F_1 \cdot \frac{a^2}{2} + q \cdot \frac{a^3}{2 \cdot 3} \right] + C_I,$$

$$\varphi_{II}(x=a) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[M_1 \cdot a + F_1 \cdot \frac{a^2}{2} + q \cdot \frac{a^3}{2 \cdot 3} \right] + C_{II},$$

тогда

$$C_I = C_{II} = \varphi_0.$$

Проводя аналогичные рассуждения для уравнений, описывающих прогиб балки на двух соседних участках и на их границе, найдем, что

$$D_I = D_{II} = y_0.$$

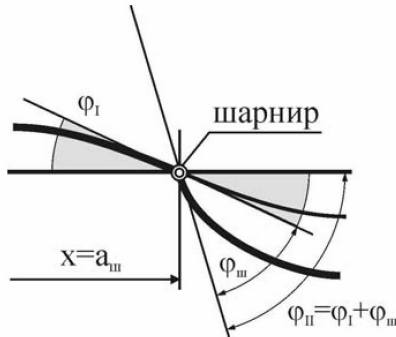
Запишем окончательно **универсальные уравнения метода начальных параметров**:

$$Q(x) = \sum F_i + \sum q_i \cdot (x - a_{q_i});$$

$$M(x) = \sum M_i + \sum F_i \cdot \frac{(x - a_{F_i})^1}{1!} + \sum q_i \cdot \frac{(x - a_{q_i})^2}{2!};$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi_{\text{ш}} + \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[\sum M_i \cdot \frac{(x - a_{M_i})^1}{1!} + \sum F_i \cdot \frac{(x - a_{F_i})^2}{2!} + \sum q_i \cdot \frac{(x - a_{q_i})^3}{3!} \right];$$

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 x + \varphi_{\text{ш}} (x - a_{\text{ш}}) + \frac{1}{E \cdot J_z} \left[\sum M_i \frac{(x - a_{M_i})^2}{2!} + \sum F_i \frac{(x - a_{F_i})^3}{3!} + \sum q_i \frac{(x - a_{q_i})^4}{4!} \right].$$



Величина $\varphi_{\text{ш}}$ – угол поворота в промежуточном (подвесном) шарнире, при этом $a_{\text{ш}}$ – координата шарнира.

Отметим, что при решении задач удобно записать универсальные уравнения сначала для наиболее удаленного от начала координат участка, тогда уравнения для предыдущих участков легко получить, вычеркивая из полученного уравнения члены, учитывающие нагрузку на последующих участках.

Специальные вопросы курса сопротивление материалов: оптимизация элементов конструкций; брус равного сопротивления; сопротивление деформированию при изгибе тонкостенных стержней; понятие о центре изгиба.

12. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ИЗГИБА

12.1. Оптимизация элементов конструкций. Общие понятия

Под **оптимальным проектированием** принято понимать такое назначение характеристик конструкции, несущей нагрузки, при котором она в определенном смысле будет наилучшей из всех конструкций рассматриваемого типа.

Признаки, используемые при оптимизации, называются **критериями оптимизации**. Критерий оптимизации – это величина, которая в ходе поиска оптимального решения должна принять либо минимум, либо максимум. После того как определена цель проектирования и выбраны критерии оптимизации, формируется **целевая функция** – функция, включающая в себя все критерии и их вклад (важность) в искомое решение, затем разрабатываются модель и метод оптимизации, с помощью которых ищется максимум или минимум целевой функции.

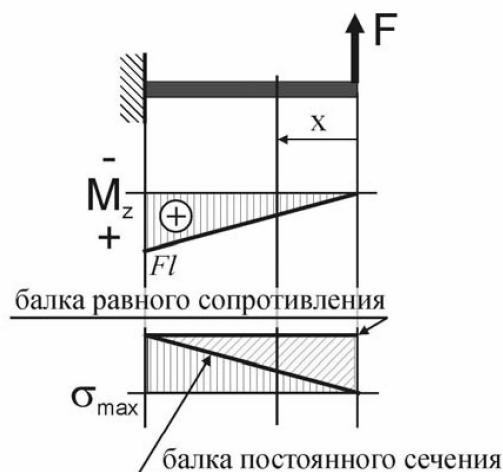
При решении оптимизационных задач приходится принимать во внимание очень многие факторы, учесть которые удастся только при помощи ЭВМ с использованием специальных методов.

Далее мы рассмотрим элементарные примеры оптимального проектирования конструкций при изгибе.

Как правило, в сопротивлении материалов за критерий оптимизации принимают или **минимальный вес** конструкции или **максимальную нагрузку**, которую может выдержать элемент. При этом очень часто критерий минимального веса заменяется критерием **равнопрочности** (то есть равенство напряжений во всех сечениях элемента конструкции).

12.2. Балки равного сопротивления при изгибе

До сих пор мы рассматривали расчет на изгиб стержней, сечение которых оставалось постоянным по длине. Такие стержни, особенно при значительной их длине, нельзя считать рациональными с точки зрения веса и расхода материала, так как размеры сечения подбираются по усилиям, действующим в опасном сечении, в остальных же сечениях получается весьма значительный избыток прочности. Для экономии материала, а также для увеличения в нужных случаях гибкости балок применяют **балки равного сопротивления**, у которых во всех сечениях наибольшее нормальное напряжение одинаково и не превышает допустимого значения.



Условие, определяющее форму такой балки, получим из условия прочности:

$$\sigma_{max} = const = \frac{M_z(x)}{W_z(x)} \leq [\sigma],$$

отсюда можем записать

$$W_z(x) = \frac{M_z(x)}{[\sigma]}. \quad (12.1)$$

То есть у балки равного сопротивления момент сопротивления данного сечения должен быть прямо пропорционален изгибающему моменту в этом сечении.

Рассмотрим некоторые примеры проектирования балок равного сопротивления.

Дано:

Рассмотрим консольную балку длиной l прямоугольного сечения постоянной высоты h_o и переменной ширины $b(x)$, нагруженную силой F .

Определить:

Найти закон изменения ширины сечения балки $b(x)$ из условия равнопрочности.

Решение

Определим закон изменения изгибающего момента и построим его эпюру по длине балки:

$$M_z(x) = F \cdot x.$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения в общем виде можем записать как

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

в нашем же случае

$$W_z(x) = \frac{b(x) \cdot h_o^2}{6}.$$

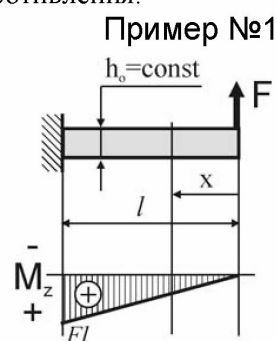
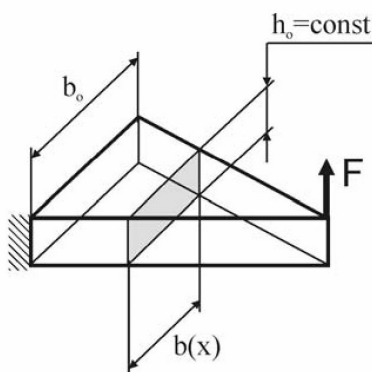
Величину $b(x)$ найдем из условия (12.1):

$$W_z(x) = \frac{b(x) \cdot h_o^2}{6} = \frac{M_z(x)}{[\sigma]} \Rightarrow b(x) = \frac{6}{h_o^2} \cdot \frac{F \cdot x}{[\sigma]},$$

при $x=0 \Rightarrow b(0)=0$,

при $x=l \Rightarrow b(l)=b_o$, где b_o – ширина сечения в опасной точке.

Как видим, ширина балки в данном случае должна изменяться по **линейному закону** по длине балки.



Дано:

Рассмотрим консольную балку длиной l прямоугольного сечения постоянной ширины b_o и переменной высоты $h(x)$, нагруженную силой F .

Определить:

Найти закон изменения высоты сечения балки $h(x)$ из условия равнопрочности.

Решение

Определим закон изменения изгибающего момента и построим его эпюру по длине балки:

$$M_z(x) = F \cdot x.$$

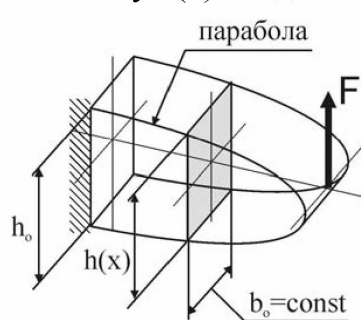
Момент сопротивления прямоугольного сечения в общем виде можем записать как

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

в нашем же случае

$$W_z(x) = \frac{b_o \cdot h(x)^2}{6}.$$

Величину $h(x)$ найдем из условия (12.1):



$$W_z(x) = \frac{b_o \cdot h(x)^2}{6} = \frac{M_z(x)}{[\sigma]} \Rightarrow h(x) = \sqrt{\frac{6}{b_o} \cdot \frac{F \cdot x}{[\sigma]}},$$

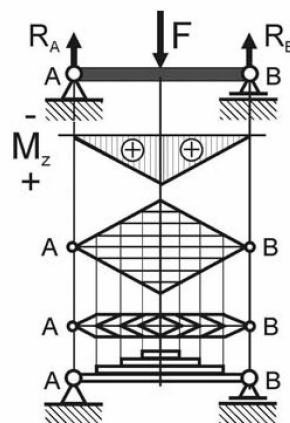
при $x=0 \Rightarrow h(0)=0$,

при $x=l \Rightarrow h(l)=h_o$, где h_o – высота сечения в опасной точке.

Как видим, высота балки в данном случае должна изменяться по **закону квадратичной параболы** по длине балки.

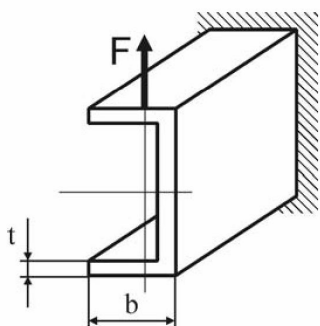
Рассмотренные примеры часто находят применение на практике, например, при проектировании рессор. Рассматривая рессору как балку на двух опорах, легко найти, что брус равного сопротивления будет иметь форму ромба. При этом, так как подобная конструкция крайне неудобна в эксплуатации, поступают следующим образом. Представим, что лист рессоры разделен на узкие полоски. Если расположить эти полоски не рядом друг с другом, а одна над другой, то работа такой балки не изменится, а ее конструкция станет более компактной.

Другим примером использования балок переменного сечения в машиностроительной практике являются конструкции ступенчатых валов. Здесь, для удобства изготовления и применения такого вала, размеры сечения стержня изменяются по длине вала не плавно, как в предыдущих примерах, а ступенчато. При этом размеры каждой из ступеней вала выбираются, с одной стороны, из конструктивных соображений, а с другой, так, чтобы напряжения в сечениях вала не превышали допускаемых (то есть – из условия прочности).



12.3. Касательные напряжения при изгибе балок тонкостенного профиля

При поперечном изгибе тонкостенного стержня в его сечениях преобладающими остаются нормальные напряжения, которые в основном и определяют прочность стержня. Однако здесь, в отличие от стержня сплошного сечения, существенное значение приобретают касательные напряжения и законы их распределения. Тонкостенные стержни замкнутого профиля сопротивляются нагрузкам примерно также, как и массивные. Иначе обстоит дело с тонкостенным открытым профилем (незамкнутое сечение).



Допущения, положенные в основу вывода формулы Журавского для касательных напряжений (формула (10.10), лекция 10), в достаточной степени соответствуют действительности для массивного сечения. Когда сечение представляет собой тонкостенный профиль, например, вроде швеллера, его ширина b значительна (по сравнению с толщиной t) и картина распределения касательных напряжений здесь существенно меняется: они не только переменны вдоль средней линии полки, но и направление их становится не параллельным к поперечной силе Q .

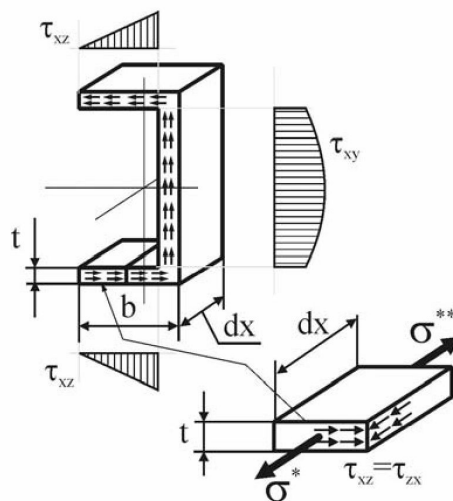
Заметим, что в полках будут действовать и касательные напряжения, параллельные Q . Однако эти напряжения настолько малы, что их можно не принимать во внимание.

Выведем формулу для вычисления касательных напряжений (обозначим их τ_{xz}) в полках тонкостенных профилей (на примере швеллера). Учитывая, что полка узкая (t мало по сравнению с b), примем следующие допущения: 1) касательные напряжения τ_{xz} постоянны по толщине полки и зависят только от расстояния z до вертикальной оси; 2) всюду в полке касательные напряжения τ_{xz} параллельны ее средней линии.

Рассматривая равновесие отсеченной части полки (шириной dx) подобно тому, как это делалось при выводе формулы Журавского (формула (10.10), лекция 10), заметим, что на передней и задней гранях элемента возникают нормальные напряжения σ^* и σ^{**}

$$\sigma^* = \frac{M_z \cdot y}{J_z}; \quad \sigma^{**} = \frac{(M_z + dM) \cdot y}{J_z},$$

а также касательные напряжения τ_{xz} . Точно такие же напряжения τ_{zx} будут возникать и на боковой грани элемента (по закону парности касательных напряжений). Остальные



поверхности элемента свободны от напряжений, так как являются наружными (незагруженными) поверхностями балки. Проецируя все силы, действующие на элемент, на ось x , получим:

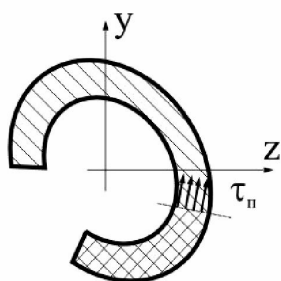
$$\int_A \sigma^* \cdot dA - \int_A \sigma^{**} \cdot dA + \tau_{zx} \cdot dx \cdot t = 0,$$

$$\int_A \frac{M_z \cdot y}{J_z} \cdot dA - \int_A \frac{M_z \cdot y}{J_z} \cdot dA - \int_A \frac{dM \cdot y}{J_z} \cdot dA + \tau_{zx} \cdot dx \cdot t = 0,$$

$$\tau_{zx} \cdot dx \cdot t - \frac{dM}{J_z} \cdot \int_A y \cdot dA = 0.$$

Как видим, вывод формулы для напряжений τ_{xz} совершенно аналогичен выводу формулы Журавского для касательных напряжений при поперечном изгибе (см. лекцию 10). Поэтому, не повторяя дальнейших рассуждений, окончательно можем записать

$$\tau_{xz} = \frac{Q_y \cdot S'_z}{t \cdot J_z}.$$



Обобщая изложенное на случай тонкостенного сечения с произвольным незамкнутым криволинейным профилем, можем констатировать, что при изгибе от поперечной силы Q в сечении возникают касательные напряжения τ_n , равномерно распределенные по толщине стенки t и ориентированные по касательной к очертанию контура сечения. Определяются эти напряжения по **формуле Д. И. Журавского для тонкостенного незамкнутого сечения**:

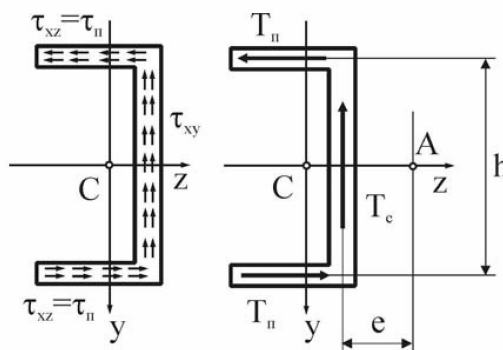
$$\tau_n = \frac{Q_y \cdot S'_z}{t \cdot J_z},$$

где S'_z – статический момент отсеченной части сечения (на рисунке заштрихована) относительно оси z .

12.4. Понятие о центре изгиба тонкостенных стержней

Как было отмечено выше, касательные напряжения в незамкнутых поперечных сечениях тонкостенных стержней образуют «поток», параллельный к контурным линиям каждого элемента сечения. В некоторых случаях этот поток может создавать момент относительно оси стержня, вызывающий его закручивание и искривление (депланацию) сечения.

Рассмотрим поперечный изгиб консольной балки швеллерного сечения в плоскости xOy . В стенке швеллера будут возникать касательные напряжения τ_{xy} , а в полках – касательные напряжения $\tau_{xz} = \tau_n$. Равнодействующей касательных напряжений в стенке (τ_{xy}) является сила T_c , которая практически равна внутренней поперечной силе Q_y ($T_c \approx Q_y$). Касательные



напряжения в полках ($\tau_{xz}=\tau_{\Pi}$) приводятся к равнодействующим силам T_{Π} . Нетрудно видеть, что силы T_c и T_{Π} создают момент относительно центра тяжести швеллера, вызывающий закручивание стержня (помимо его изгиба). Таким образом, если линия действия внешней силы F проходит через центр тяжести сечения швеллера, то балка будет испытывать изгиб с кручением. Как известно, открытые (незамкнутые) тонкостенные профили плохо работают на кручение. Кроме того, если балка заделана так, что депланация сечения в заделке становится невозможной, то будет иметь место так называемое стесненное кручение, при котором в сечении дополнительно возникают не только касательные, но и значительные нормальные напряжения. Поэтому желательно принимать меры, устраняющие кручение в балках прокатного профиля.

Установим положение такой точки, при прохождении через которую линии действия внешней силы поток касательных напряжений при изгибе не будет вызывать закручивания стержня. Очевидно, что такая точка A расположена на оси Oz вне контура сечения швеллера, поскольку при этом равнодействующие касательных напряжений T_c и T_{Π} будут давать моменты разных знаков относительно точки A . Составим уравнение равновесия сечения швеллера под действием сил T_c и T_{Π} :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow T_c \cdot e - 2 \cdot T_{\Pi} \cdot \frac{h}{2} = 0.$$

Отсюда находим положение точки A для швеллера:

$$e = \frac{T_{\Pi} \cdot h}{T_c}.$$

Итак, если линия действия силы F будет проходить через точку A , то стержень будет испытывать только изгиб. Поэтому точка A называется **центром изгиба**, а продольная ось, проходящая через эту точку, – **осью центров изгиба**.

Ось центров изгиба обладает тем свойством, что поперечная нагрузка, пересекающая эту ось, вызывает только изгиб стержня. В противном случае возникает дополнительная деформация кручения относительно этой оси.

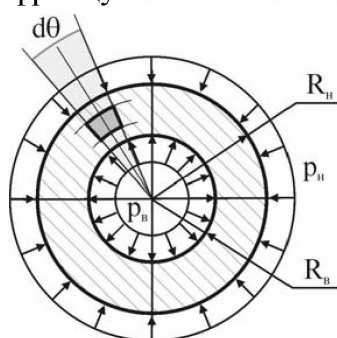
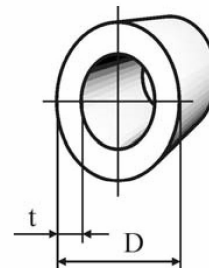
В общем случае центр изгиба не совпадает с центром тяжести сечения, и его положение подлежит определению. В некоторых случаях положение центра изгиба устанавливается без предварительных вычислений. Так, для сечений с двумя осями симметрии, например, для двутавра центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. Это имеет место также для так называемых кососимметричных сечений (например, для показанного на рисунке «зетового» сечения). Для сечений в виде тавра и уголка центр изгиба находится в точке пересечения средних линий элементов сечения (момент касательных напряжений относительно этой точки здесь равен нулю).

Таким образом, наряду с основной продольной осью x , проходящей через центр тяжести сечений, стержень обладает еще осью центров изгиба, к точкам которой должны приводиться поперечные нагрузки при разделении деформаций изгиба и кручения. Иногда эта ось называется осью жесткости, а сама точка A – центром жесткости (центром сдвига).

13. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

13.1. Расчет на прочность толстостенный цилиндров. Задача Ламе

Рассмотрим полый круглый цилиндр со стенкой постоянной толщины t подверженный действию внутреннего p_v и наружного давлений p_n . Вследствие симметрии цилиндра и нагрузок, возникающие деформации и напряжения будут также симметричны относительно оси. При этом толстостенным будем считать цилиндр, для которого $t \geq 0,1 \cdot D$ (где D – наружный диаметр). Решение таких задач было предложено французским механиком Ламе

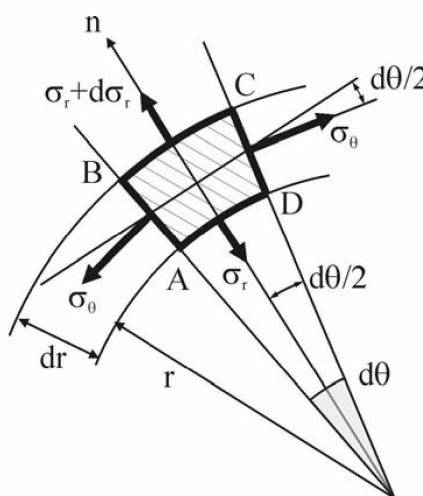
**Дано:** $p_n, p_v, R_n, R_v, E, \mu, G$ **Определить:**

Напряжения в стенках цилиндра

Решение

Статическая сторона задачи

Рассмотрим равновесие элементарной трапеции $ABCD$, выделенной в сечении цилиндра и соответствующей центральному углу $d\theta$. На боковых гранях трапеции (AB и CD) будут действовать окружные напряжения σ_θ , на внутренней поверхности элемента (AD) – радиальные напряжения σ_r , а на внешней (BC) – радиальные напряжения $\sigma_r + d\sigma_r$. По причине осевой симметрии цилиндра и нагрузок перекашиваться элемент не будет, а значит, на его гранях не будут возникать и касательные напряжения. Следовательно, напряжения σ_θ и σ_r – главные, причем в силу указанной осевой симметрии сечения и нагрузок величина окружных напряжений σ_θ не зависит от полярного угла θ .



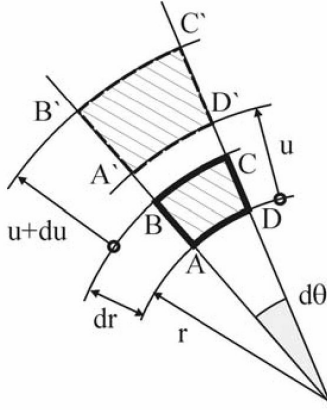
Запишем уравнения равновесия для элемента $ABCD$, спроецировав все силы на нормаль к цилиндрической поверхности:

$$\sum F_n = 0 \Rightarrow -\sigma_r \cdot r \cdot d\theta + (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (r + dr) \cdot d\theta - 2 \cdot \sigma_\theta \cdot dr \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0.$$

Учитывая, что $\sin(d\theta/2) \approx d\theta/2$, и пренебрегая бесконечно малыми величинами высоких порядков по сравнению с остальными, данное выражение можем переписать следующим образом:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (13.1)$$

Задача является один раз внутренне статически неопределимой.



Геометрическая сторона задачи

Рассмотрим деформации элемента $ABCD$. Деформация элемента симметрична относительно оси и поэтому вызовет лишь радиальное перемещение всех точек цилиндра. При этом точки A и D сместятся в радиальном направлении на величину u в положение A' и D' , а точки B и C – на величину $u+du$ в положение B' и C' .

Относительная радиальная деформация грани AB :

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{BB' - AA'}{AB} = \frac{(u+du) - u}{dr} \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \quad (13.2)$$

Относительная окружная деформация грани AD :

$$\varepsilon_\theta = \frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{(r+u) \cdot d\theta - r \cdot d\theta}{r \cdot d\theta} \Rightarrow \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (13.3)$$

Физическая сторона задачи

Запишем закон Гука для плоского напряженного состояния:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_r + \mu \cdot \varepsilon_\theta); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_\theta + \mu \cdot \varepsilon_r). \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

Математическая сторона задачи

Подставив выражения (13.2) и (13.3) в формулы (13.4), получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{du}{dr} + \mu \cdot \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{u}{r} + \mu \cdot \frac{du}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

После подстановки выражений (13.5) в уравнение равновесие (13.1) получим линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами относительно u :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0.$$

Общее решение этого уравнения выглядит следующим образом:

$$u = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r}. \quad (13.6)$$

Подставляя решение (13.6) в формулы (13.5), получим выражения для определения напряжений в точках на расстоянии r от оси цилиндра:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[C_1 \cdot (1+\mu) - C_2 \cdot \frac{1-\mu}{r^2} \right];$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[C_1 \cdot (1+\mu) + C_2 \cdot \frac{1-\mu}{r^2} \right].$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из граничных условий, а именно – на внешней поверхности цилиндра радиальные напряжения равны внешнему давлению, а на внутренней – внутреннему:

$$\begin{cases} r = R_H & \sigma_r = -p_H \Rightarrow \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[C_1 \cdot (1+\mu) - C_2 \cdot \frac{1-\mu}{R_H^2} \right] = -p_H; \\ r = R_B & \sigma_r = -p_B \Rightarrow \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[C_1 \cdot (1+\mu) - C_2 \cdot \frac{1-\mu}{R_B^2} \right] = -p_B. \end{cases}$$

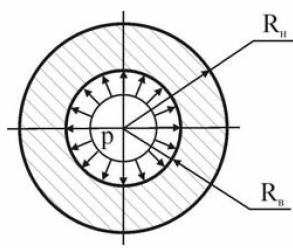
Решая полученные уравнения совместно, найдем, что

$$C_1 = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_B^2 \cdot p_B - R_H^2 \cdot p_H}{R_H^2 - R_B^2};$$

$$C_2 = \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{R_B^2 \cdot R_H^2 \cdot (p_B - p_H)}{R_H^2 - R_B^2}.$$

Окончательно выражения для σ_θ и σ_r запишем следующим образом:

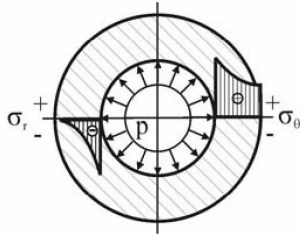
$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{R_B^2 \cdot p_B - R_H^2 \cdot p_H}{R_H^2 - R_B^2} - \frac{R_B^2 \cdot R_H^2 \cdot (p_B - p_H)}{R_H^2 - R_B^2} \cdot \frac{1}{r^2}; \\ \sigma_\theta = \frac{R_B^2 \cdot p_B - R_H^2 \cdot p_H}{R_H^2 - R_B^2} + \frac{R_B^2 \cdot R_H^2 \cdot (p_B - p_H)}{R_H^2 - R_B^2} \cdot \frac{1}{r^2}. \end{cases} \quad (13.7)$$



Расчет толстостенных цилиндров на прочность рассмотрим для частного случая, когда имеет место только внутреннее давление ($p_н=0$, $p_в=p$). Здесь выражения (13.7) приобретут следующий вид:

$$\sigma_r = \frac{R_в^2}{R_н^2 - R_в^2} \cdot \left[1 - \frac{R_н^2}{r^2} \right] \cdot p;$$

$$\sigma_\theta = \frac{R_в^2}{R_н^2 - R_в^2} \cdot \left[1 + \frac{R_н^2}{r^2} \right] \cdot p.$$



Отметим, что радиальные напряжения σ_r в этом случае всюду сжимающие, а окружные σ_θ – всюду растягивающие (то есть $\sigma_1=\sigma_\theta$, $\sigma_3=\sigma_r$) и достигают наибольших значений на внутренней поверхности цилиндра ($r=R_н$):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p; \\ \sigma_\theta &= \frac{1 + \frac{R_в^2}{R_н^2}}{1 - \frac{R_в^2}{R_н^2}} \cdot p. \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

Запишем условие прочности по III теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв. III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Учитывая (13.8), найдем, что

$$\sigma_{\text{экв. III}} = \frac{2}{1 - \frac{R_в^2}{R_н^2}} \cdot p \leq [\sigma].$$

Определим допускаемое внутреннее давление в цилиндре при безграничном увеличении толщины стенки, то есть при $R_н \rightarrow \infty$. В этом случае

$$\sigma_{\text{экв. III}} = 2 \cdot p \leq [\sigma] \Rightarrow$$

$$[p] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Как видим, начиная с определенного внутреннего давления $[p]$, увеличение толщины стенки цилиндра перестает быть эффективным способом увеличения прочности. Дальнейшее увеличение прочности возможно либо за счет использования более прочных материалов (увеличение $[\sigma]$), либо за счет ме-

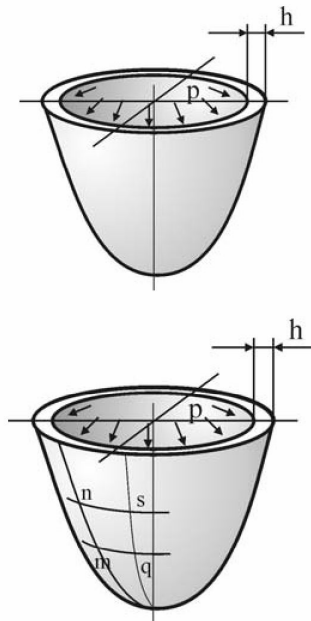
роприятий, направленных на создание внешнего давления на наружной поверхности цилиндра (см. формулу (13.7)).

Для этого можно, например, сделать цилиндр составным, при этом его внутренний слой необходимо запрессовать с натягом в наружный, за счет чего и создается внешнее давление на поверхности внутреннего слоя.

13.2. Расчет тонкостенных сосудов (оболочек). Уравнение Лапласа

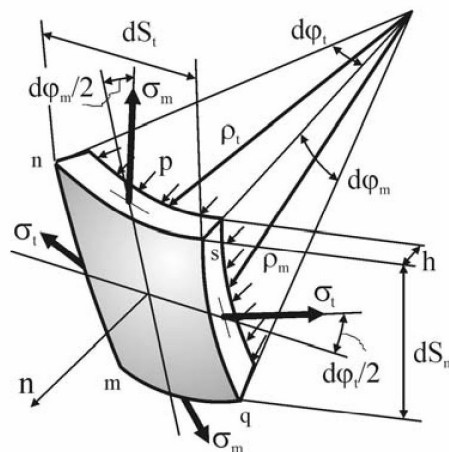
В различных областях техники широко применяются такие элементы конструкций, которые с точки зрения их расчета на прочность могут быть отнесены к тонким оболочкам (цистерны, резервуары, баллоны и т. д.).

При расчете тонкостенных оболочек для упрощения решения задачи принимают ряд гипотез. Наиболее просто данная задача решается в рамках безмоментной теории оболочек, согласно которой из шести внутренних усилий отлична от нуля лишь нормальная к сечению сила (мембранная сила), а все моменты и поперечные силы равны нулю.



Рассмотрим сосуд, имеющий форму тела вращения и подверженный внутреннему давлению p , симметрично распределенному относительно оси вращения.

Выделим элемент $mnsq$, вырезанный из стенки сосуда двумя меридиональными сечениями mn и sq и двумя сечениями mq и ns , нормальными к меридиану. Из-за симметрии по граням элемента $mnsq$ будут действовать только нормальные напряжения: σ_m – меридиональные, σ_t – окружные, равнодействующая которых и будет уравновешивать внутреннее давление в сосуде.



Запишем уравнение равновесия элемента $mnsq$, проецируя все силы на нормаль n к его поверхности:

$$\sum F_n = 0 \Rightarrow 2\sigma_m \cdot h \cdot ds_t \sin \frac{d\varphi_m}{2} + 2\sigma_t \cdot h \cdot ds_m \sin \frac{d\varphi_t}{2} - p \cdot ds_t ds_m = 0,$$

где h – толщина стенки; ds_t, ds_m – размеры элемента в окружном и меридиональном направлениях; $d\varphi_t, d\varphi_m$ – центральные углы в окружном и меридиональном направлениях, соответствующие граням элемента.

Учитывая, что ввиду малости углов

$$\sin(d\varphi/2) \approx d\varphi/2,$$

а также, что

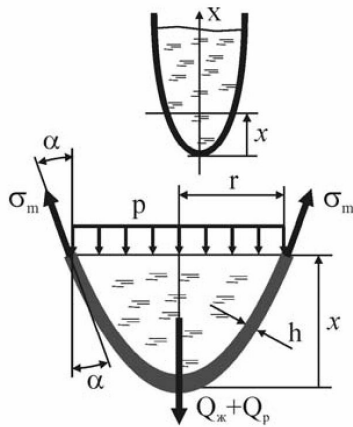
$$d\varphi_t = ds_t / \rho_t, \quad d\varphi_m = ds_m / \rho_m,$$

перепишем уравнение равновесия следующим образом:

$$\sigma_m \cdot h \cdot ds_t \cdot \frac{ds_m}{\rho_m} + 2 \cdot \sigma_t \cdot h \cdot ds_m \cdot \frac{ds_t}{\rho_t} - p \cdot ds_t \cdot ds_m = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h}.$$

Это основное уравнение, связывающее напряжения для тонкостенных сосудов вращения, впервые дано Лапласом (уравнение Лапласа).



Второе уравнение получим, рассмотрев равновесие нижней части резервуара с сечением радиуса r , ортогональным к оси вращения сосуда. В этом случае давление жидкости в отрезанной части сосуда p , ее собственный вес $Q_{ж}$ и вес самого отсеченного резервуара Q_p будут уравниваться меридиональными напряжениями на грани отсеченной части:

$$\sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot \cos \alpha - p \cdot \pi \cdot r^2 - Q_{ж} - Q_p = 0 \Rightarrow$$

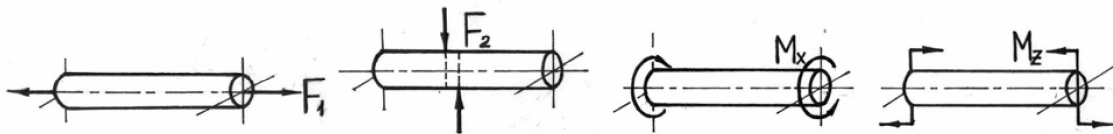
$$\sigma_m = \frac{p \cdot r}{2 \cdot h \cdot \cos \alpha} + \frac{Q_{ж} + Q_p}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot \cos \alpha}.$$

Данное выражение часто именуется уравнением равновесия зоны или просто уравнением зоны.

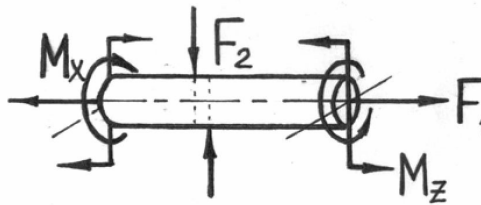
Зная уравнение меридиональной кривой можно найти $\alpha, r, Q_{ж}$ и Q_p , а стало быть и σ_m .

14. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ. КОСОЙ ИЗГИБ

Рассмотренные нами до сих пор случаи нагружения элементов конструкций (растяжение-сжатие, сдвиг, кручение, плоский изгиб) относят сопротивление стержня к одному (простому) виду деформации. Сложным соответствует два и более простых видов.

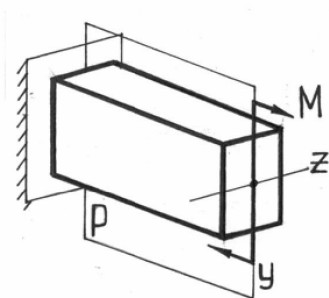


Сложное сопротивление – вид нагружения, представляющий собой комбинацию (сочетание) нескольких простых типов сопротивления.



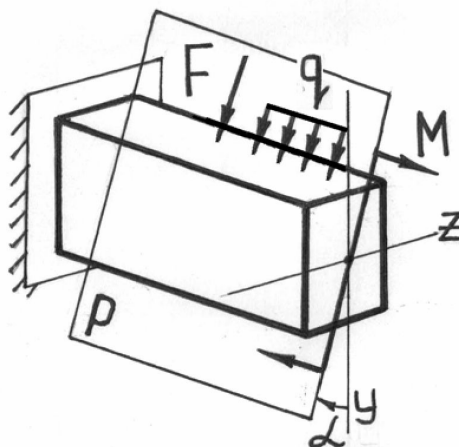
В случае сложного сопротивления в поперечных сечениях элемента возникает два и более внутренних усилия. При этом расчет элементов при сложном сопротивлении ведется в рамках принципа независимости действия сил. То есть, каждый из простых видов сопротивления, входящих в состав сложного, рассматривается независимо от остальных, а затем находится суперпозиция (сумма) полученных решений (для внутренних усилий, напряжений, деформаций и т. д.). Принцип суперпозиции применим только для линейно-упругих систем.

14.1. Общие понятия о косом изгибе



Прежде чем перейти к рассмотрению некоторых характерных для инженерной практики случаев сложного сопротивления и, в частности, косоуго изгиба, вспомним, что до этого мы анализировали частный случай изгиба, который называли плоским, – когда плоскость действия сил совпадала с одной из главных плоскостей инерции балки. Однако существуют и более общие случаи изгиба, когда силы действуют в плоскости, не совпадающей с плоскостью инерции (косой изгиб), или, вообще, силы не лежат в одной плоскости (сложный или неплоский изгиб).

Косой изгиб – изгиб, при котором плоскость P действия изгибающих моментов и поперечных сил не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции бруса.

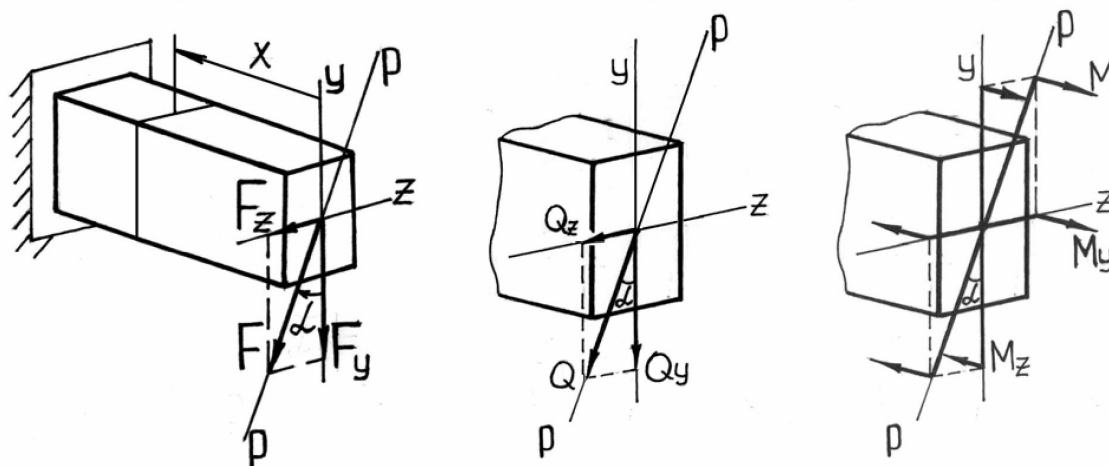


14.2. Определение внутренних усилий при косом изгибе

При косом изгибе в поперечных сечениях бруса действуют следующие внутренние усилия: M_z, M_y – изгибающие моменты и Q_y, Q_z – поперечные (перерезывающие) силы. Это легко показать, используя метод мысленных сечений и определяя внутренние усилия при косом изгибе консольной балки под действием сосредоточенной силы F на свободном конце (см. рисунок):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N = 0; & \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x = 0; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow Q_y = F \cdot \cos \alpha; & \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y = F \cdot \sin \alpha \cdot x; \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow Q_z = F \cdot \sin \alpha; & \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z = F \cdot \cos \alpha \cdot x. \end{aligned}$$

Аналогичные усилия возникают и в более общем случае сложного (неплоского) изгиба.



Правило знаков для внутренних усилий: изгибающие моменты – положительны, если вызывают растяжение в положительном квадранте координатной системы zOy ; поперечные силы – положительны, если под их действием отсеченный элемент поворачивается по часовой стрелке.

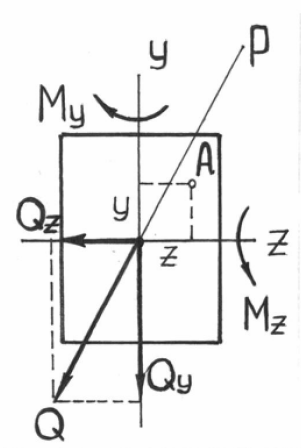
Таким образом, косой изгиб может быть представлен как совместное действие двух плоских изгибов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях инерции.

Для определения полного изгибающего момента M и полной поперечной силы Q при косом изгибе достаточно определить внутренние усилия для каждого из плоских изгибов в отдельности (то есть Q_y, M_z и Q_z, M_y), а затем найти их векторную сумму:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}, \quad Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}.$$

14.3. Определение напряжений при косом изгибе

Используя принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции) найдем напряжения при косом изгибе. Рассмотрим точку A с координатами (y, z) в сечении изгибаемой балки и определим в ней напряжения от каждого из внутренних усилий, возникающих при косом изгибе:



нормальные напряжения от изгибающего момента M_z

$$\sigma' = \frac{M_z \cdot y}{J_z};$$

нормальные напряжения от изгибающего момента M_y

$$\sigma'' = \frac{M_y \cdot z}{J_y};$$

касательные напряжения от поперечной силы Q_y

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S'_z}{b \cdot J_z};$$

касательные напряжения от поперечной силы Q_z

$$\tau_z = \frac{Q_z \cdot S'_y}{h \cdot J_y}.$$

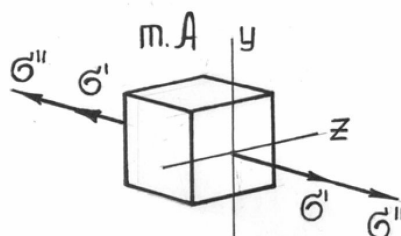
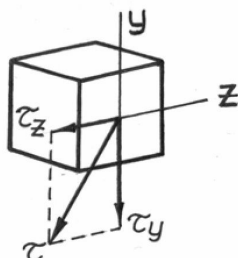
Полные напряжения τ и σ при косом изгибе найдем путем геометрического суммирования составляющих:

а) касательные

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2};$$

б) нормальные

$$\sigma = \sigma' + \sigma''.$$



Последнюю формулу удобно представить в виде

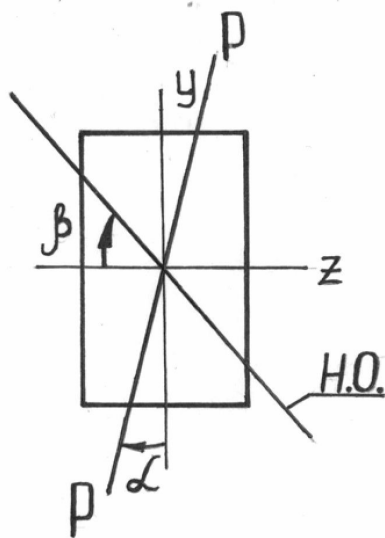
$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y}, \text{ или } \sigma = M \cdot \left(\frac{y \cdot \cos \alpha}{J_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha}{J_y} \right), \quad (14.1)$$

где α – угол наклона силовой плоскости P при к о с о м изгибе (а при с л о ж н о м изгибе α – угол наклона плоскости действия полного изгибающего момента M в данном сечении).

14.4. Определение положения нейтральной оси и максимальных нормальных напряжений при косом изгибе. Условие прочности

Нейтральная ось – линия, во всех точках которой нормальные напряжения равны нулю. При этом в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси нормальные напряжения принимают свои экстремальные значения – минимум и максимум.

Заметим, что при плоском изгибе нейтральная ось совпадала с одной из главных осей сечения (Oy или Oz), при косом же изгибе это не так. Выведем формулу для определения положения нейтральной оси при косом изгибе.



Так как $\sigma=0$, то можем записать $y \cdot \cos \alpha / J_z + z \cdot \sin \alpha / J_y = 0$. Отсюда найдем уравнение нейтральной оси:

$$y = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot z.$$

Более удобно записать это уравнение через угол β наклона нейтральной линии к оси Oz :

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Знак «минус» в этой формуле показывает, что углы α и β откладываются от разноименных осей, но в одном направлении.

Как видим, в случае, когда $J_z \neq J_y$, углы α и β не равны друг другу, а, значит, и плоскость кривизны (плоскость максимальных прогибов) бруса не будет совпадать с плоскостью действия сил. Поэтому такой изгиб и назван «косым».

Определим максимальные нормальные напряжения при косом изгибе и запишем условие прочности.

Как известно, нормальные напряжения достигают своих экстремальных значений σ_{extr} в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (координаты таких точек обозначим $y_{уд.}$ и $z_{уд.}$). Стало быть, можем записать:

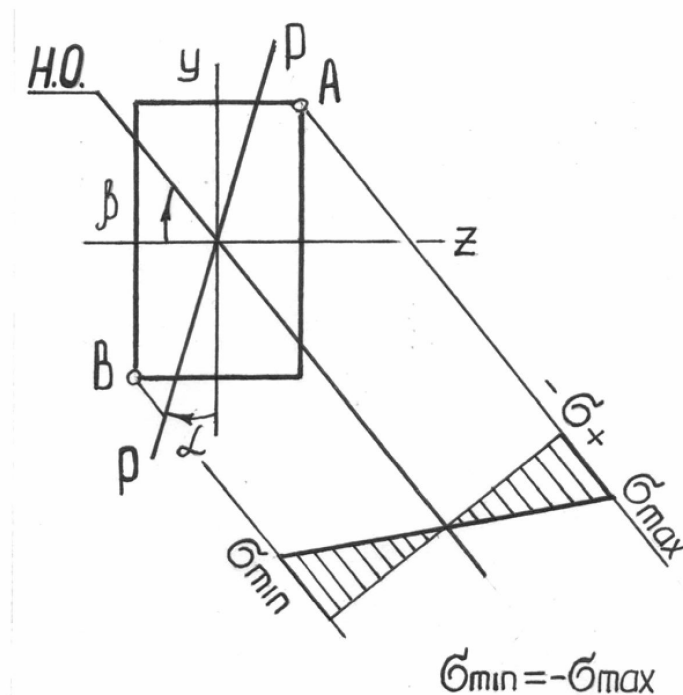
$$\sigma_{extr} = \frac{M_z \cdot y_{уд.}}{J_z} + \frac{M_y \cdot z_{уд.}}{J_y}, \quad \text{или} \quad \sigma_{extr} = M \cdot \left(\frac{y_{уд.} \cdot \cos \alpha}{J_z} + \frac{z_{уд.} \cdot \sin \alpha}{J_y} \right).$$

Для прямоугольного сечения – это точки A и B . При $M > 0$ $\sigma_{extr, A} = \sigma_{max}$, $\sigma_{extr, B} = \sigma_{min}$ (см. рисунок).

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению (сжатию), максимальные напряжения определяются так:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y}, \quad \text{или} \quad |\sigma|_{max} = \frac{|M|}{W_z} \cdot \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \cdot \sin \alpha \right), \quad (14.2)$$

где $W_z = J_z / |y|_{max}$ и $W_y = J_y / |z|_{max}$ – моменты сопротивления сечения относительно осей z и y .



В случае косоуго изгиба, как правило, проверка прочности осуществляется лишь по нормальным напряжениям (действие касательных невелико). Поэтому условие прочности запишем в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z} \cdot \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \cdot \sin \alpha \right) \leq [\sigma]. \quad (14.3)$$

При косом изгибе (впрочем, как и при остальных видах нагружения) имеем три задачи расчета на прочность: 1) проверка прочности [проверить неравенство (14.3) – «выдержит - не выдержит»]; 2) подбор сечения [определить W_z (размеры сечения), при заданном отношении W_z/W_y]; 3) проверка по несущей способности (определить M).

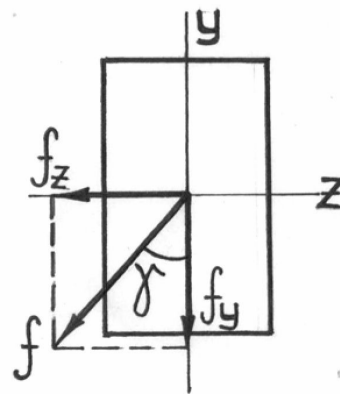
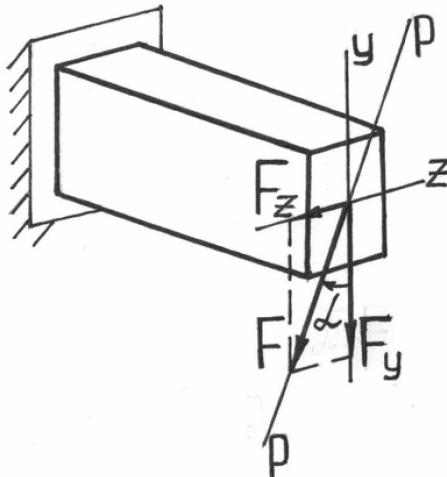
14.5. Деформации при косом изгибе

Рассматривая косой изгиб как совокупность двух плоских, полную деформацию балки можем найти, геометрически суммируя деформации балки от плоских изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}.$$

Проанализируем косой изгиб консольной балки прямоугольного сечения. Разложим силу F , изгибающую балку, на две составляющие $F_y = F \cdot \cos \alpha$ и $F_z = F \cdot \sin \alpha$ и найдем деформации от каждой из них:

$$f_y = -\frac{F_y \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z}; \quad f_z = -\frac{F_z \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_y}.$$



Суммарная деформация

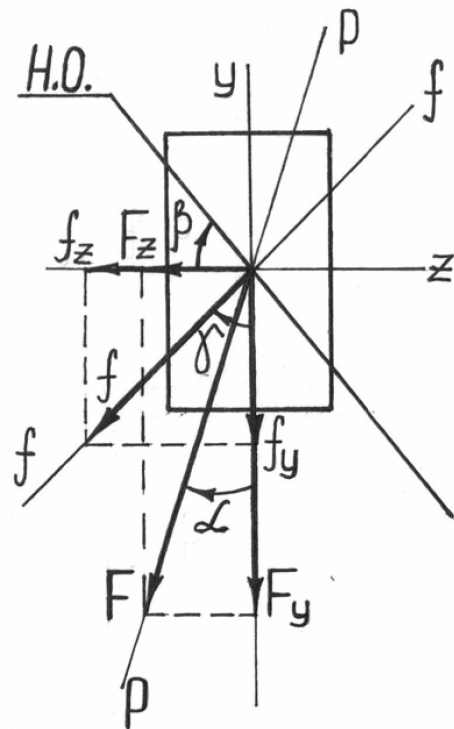
$$f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{J_z^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2}}.$$

Определим положение плоскости, в которой происходит изгиб балки, для чего найдем величину угла γ между этой плоскостью и осью Oy :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_z}{f_y} = \frac{F_z}{F_y} \cdot \frac{J_z}{J_y} = \frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Как видим, плоскость прогибов не совпадает с силовой плоскостью ($\alpha \neq \gamma$ – «косой» изгиб!) и перпендикулярна нейтральной оси ($\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} \beta$).



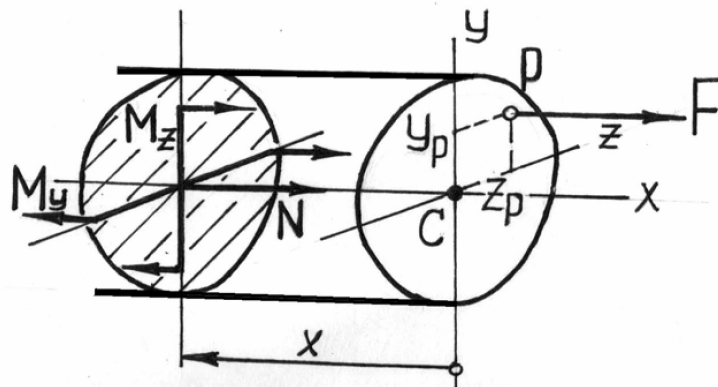
Сложное сопротивление. Внецентренное растяжение-сжатие. Определение внутренних усилий, напряжений при внецентренном растяжении. Определение положения нейтральной оси при внецентренном растяжении. Ядро сечения.

15. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

15.1. Общие понятия и определения

Внецентренное растяжение (сжатие) – нагружение, при котором брус растягивается силами, параллельными его оси и не проходящими через центр тяжести сечения бруса.

Точку P приложения силы при внецентренном растяжении (сжатии) будем называть *полюсом* силы. При этом расстояние от полюса P до продольной оси стержня (Ox) именуется *эксцентриситетом*.



15.2. Определение внутренних усилий и напряжений при внецентренном растяжении (сжатии)

Рассмотрим стержень, который растягивается силой F , приложенной не в центре тяжести сечения стержня, а в некоторой точке P с координатами y_p и z_p . Для определения внутренних усилий воспользуемся методом мысленных сечений:

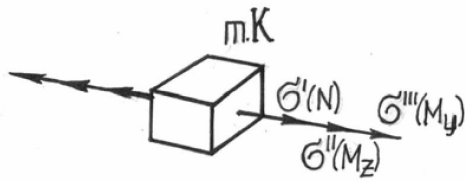
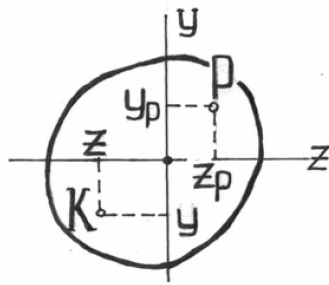
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N = F;$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_y = F \cdot z_p;$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_z = F \cdot y_p.$$

Как видим, из шести внутренних усилий в сечении стержня при внецентренном растяжении действует три – осевое усилие и два изгибающих момента. Таким образом, внецентренное растяжение может рассматриваться как сочетание простого растяжения и двух чистых изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях (а потому и относится к сложному сопротивлению).

Для определения нормальных напряжений при внецентренном растяжении (в произвольной точке $K(y, z)$ сечения) найдем напряжения для каждого из простых видов сопротивления, входящих в состав сложного, а затем воспользуемся принципом суперпозиции и суммируем их:



а) нормальные напряжения при простом (центрально) растяжении

$$\sigma' = \frac{N}{A} = \frac{F}{A};$$

б) нормальные напряжения при изгибе

$$\sigma'' = \frac{M_z \cdot y}{J_z} = \frac{F \cdot y_p \cdot y}{J_z};$$

$$\sigma''' = \frac{M_y \cdot z}{J_y} = \frac{F \cdot z_p \cdot z}{J_y}.$$

Просуммировав, напряжения при внецентренном растяжении (сжатии) найдем следующим образом:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_p \cdot y}{J_z} + \frac{F \cdot z_p \cdot z}{J_y} \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{A \cdot y_p \cdot y}{J_z} + \frac{A \cdot z_p \cdot z}{J_y} \right).$$

Учитывая, что радиус инерции сечения $i = \sqrt{J/A}$, окончательно запишем

$$\sigma = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} \right). \quad (15.1)$$

При использовании формулы (15.1) необходимо соблюдать традиционное правило знаков: растягивающая сила F берется со знаком «плюс», сжимающая – «минус», координаты точек $P(y_p, z_p)$ и $K(y, z)$ также подставляются со своими знаками «плюс» или «минус».

15.3. Определение положения нейтральной оси и величины максимальных напряжений при внецентренном растяжении (сжатии)

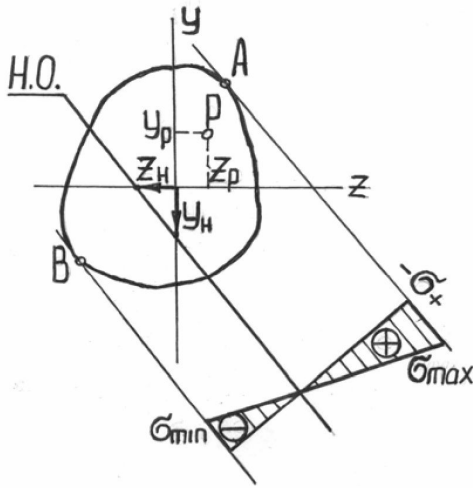
Так как по определению нейтральная ось есть линия, на которой нормальные напряжения равны нулю ($\sigma=0$), то ее уравнение можно получить следующим образом:

$$\sigma = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} = -1 \Rightarrow$$

$$\frac{y}{\left(-\frac{i_z^2}{y_p}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{i_y^2}{z_p}\right)} = 1 \Rightarrow \frac{y}{y_n} + \frac{z}{z_n} = 1. \quad (15.2)$$

Полученное выражение (15.2) представляет собой уравнение нейтральной оси – уравнение прямой в отрезках y_n и z_n , где

$$y_n = -\frac{i_z^2}{y_p}, \quad z_n = -\frac{i_y^2}{z_p}. \quad (15.3)$$



Анализ полученных соотношений дает возможность заключить следующее: 1) положение нейтральной оси не зависит от величины силы F ; 2) нейтральная ось лежит по другую сторону от полюса (относительно центра тяжести); 3) при перемещении полюса вдоль прямой нейтральной ось поворачивается относительно некоторой фиксированной точки (это легко доказать, если в уравнении (15.2) «зафиксировать» координаты y, z для рассматриваемой точки ($y, z = const$), тогда переменные координаты полюса y_p и z_p должны подчиняться все тому же уравнению прямой).

Экстремальные нормальные напряжения будут возникать в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси

$$\sigma_{extr} = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y_{уд.}}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z_{уд.}}{i_y^2} \right). \quad (15.4)$$

При этом нейтральная ось может делить сечение на две части – сжатую и растянутую, тогда величину максимальных сжимающих или растягивающих напряжений найдем по формуле (15.4), учитывая правила знаков.

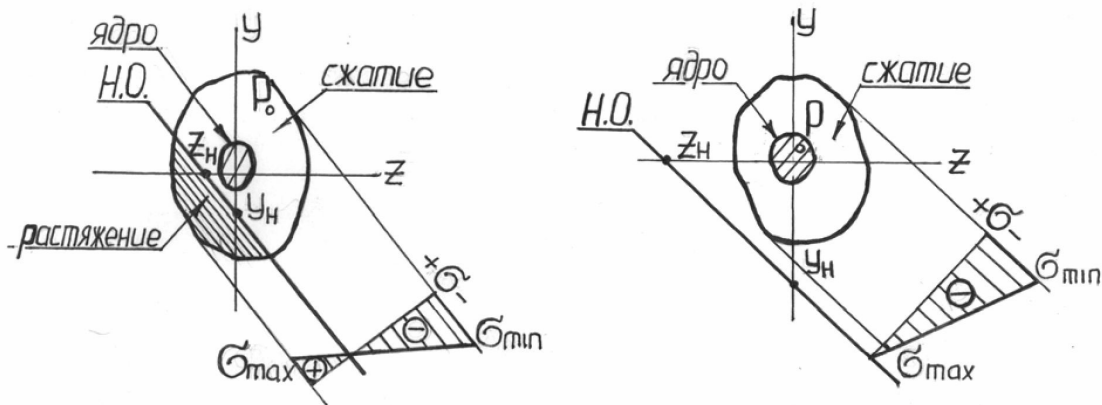
Так как в точках сечения возникает линейное напряженное состояние (действуют только нормальные напряжения), то условие прочности запишется в самом простом виде:

$$|\sigma|_{max} = \left| \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y_{max}}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z_{max}}{i_y^2} \right) \right| \leq [\sigma].$$

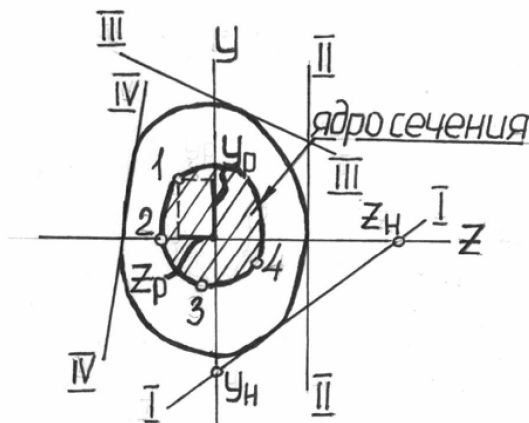
При внецентренном растяжении (сжатии) также имеем три задачи расчета на прочность (см. «Косой изгиб»).

15.4. Ядро сечения

Из соотношений, полученных для определения положения нейтральной оси, следует, что нейтральная ось в зависимости от координат полюса может пересекать рассматриваемое сечение или лежать вне его (например, если сила приложена в центр тяжести – имеем простое растяжение, а нейтральная ось удаляется в бесконечность). Представляет интерес найти такие положения полюса, когда нейтральная ось будет лишь касаться сечения, не пересекая его. В этом случае в сечении будут возникать напряжения одного знака, что особенно важно, если нагруженный материал плохо сопротивляется, например, растягивающим напряжениям (бетон, камень, чугун) и желательно чтобы вся конструкция работала лишь на сжатие.



Ядро сечения – область вокруг центра тяжести сечения, при приложении силы внутрь которой, в сечении возникают напряжения одного знака.



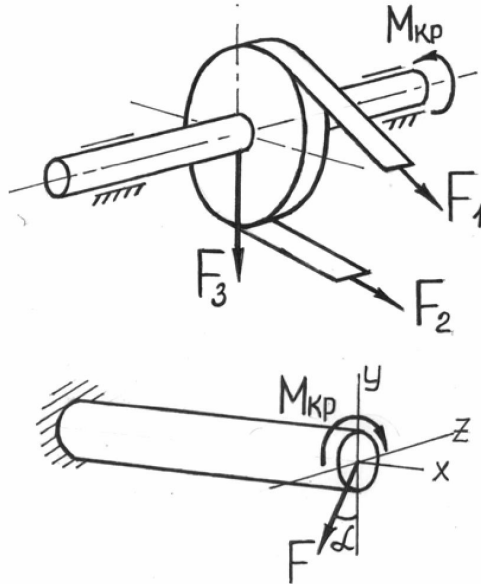
Чтобы построить очертания (контур) ядра сечения, необходимо: 1) задать несколько положений нейтральной оси так, чтобы она лишь касалась контура сечения, но не пересекала его ни в одной точке; 2) определить для каждого из этих положений координаты y_H и z_H точек пересечения нейтральной линии с осями Oy и Oz ; 3) вычислить для каждого положения нейтральной оси координаты точки приложения силы (y_p и z_p) по формулам [которые получим из (15.3)]

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_H}, \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_H}.$$

Совместное действие кручения и изгиба. Определение внутренних усилий и напряжений при кручении с изгибом. Главные напряжения, напряженное состояние и расчет на прочность при кручении с изгибом.

16. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ. КРУЧЕНИЕ С ИЗГИБОМ

16.1. Общие понятия и определения



Ранее нами был рассмотрен расчет на прочность валов при чистом кручении. Однако круглые валы редко работают на чистое кручение. Как правило, при работе вал изгибается собственным весом, весом шкивов, давлением на зубья шестерен, натяжением ремней и т. д. В таком случае вал будет находиться в условиях сложного сопротивления и испытывать совместное действие кручения и изгиба.

Кручение с изгибом – частный случай сложного сопротивления, который может рассматриваться как сочетание чистого кручения и поперечного изгиба.

16.2. Определение внутренних усилий и напряжений при кручении с изгибом

Для определения внутренних усилий воспользуемся методом мысленных сечений:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N = 0; \quad \sum F_y \neq 0 \Rightarrow Q_y \neq 0; \quad \sum F_z \neq 0 \Rightarrow Q_z \neq 0; \\ \sum M_x \neq 0 &\Rightarrow M_x \neq 0; \quad \sum M_y \neq 0 \Rightarrow Q_y \neq 0; \quad \sum M_z \neq 0 \Rightarrow M_z \neq 0. \end{aligned}$$

Обычно две составляющие поперечной силы (Q_y, Q_z) и изгибающего момента (M_y, M_z) приводят к их полным результирующим

$$Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}; \quad M_{\text{и}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \quad (16.1)$$

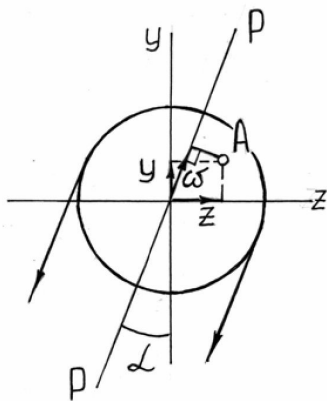
Заметим, что часто поперечной силой пренебрегают (для достаточно длинных валов) и рассматривают кручение с изгибом как совместное действие крутящего ($M_x, M_{\text{кр}}, T$) и изгибающего ($M_{\text{и}}$) моментов.

Опасное сечение вала будем искать, как и прежде, по эпюрам внутренних усилий. При построении эпюр внутренних усилий при кручении с изгибом необходимо иметь ввиду следующие правила:

- 1) эпюры крутящего момента M_x , а также эпюры составляющих поперечной силы Q_y, Q_z и изгибающего момента M_y, M_z строятся по той же процедуре, что и ранее;
- 2) результирующая поперечная сила Q может не лежать в плоскости действия результирующего изгибающего момента $M_{\text{и}}$, а потому между ними уже не будет соблюдаться зависимость Журавского ($dM/dx=Q$), а, следовательно, и правила проверки эпюр, введенные для плоского изгиба;

3) согласно (16.1), эпюра полного изгибающего момента будет прямой только на тех участках, где M_y и M_z ограничены прямыми с общей нулевой точкой, на участках, где такая общая точка отсутствует эпюра M_n будет описываться вогнутой кривой и строится по точкам (связано с тем, что вектор M_n в разных сечениях имеет различное направление).

Опасное сечение при кручении с изгибом устанавливается из совместного анализа эпюр крутящего M_x и полного изгибающего M_n моментов. Опасным будет считаться то сечение, где оба момента достигают своей максимальной величины. Если моменты достигают максимума в разных сечениях, необходимо проверить все сечения, в которых эти внутренние усилия достаточно велики.



Для определения максимальных напряжений используем принцип независимости действия сил и найдем напряжения отдельно от кручения и отдельно от изгиба:

а) напряжения при кручении

$$\tau = \frac{M_x \cdot \rho}{J_\rho}, \quad \tau_{max} = \frac{M_x}{W_\rho};$$

б) напряжения при изгибе

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y}, \text{ или } \sigma = \frac{M_n}{J_{oc}} \cdot (y \cdot \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha),$$

где J_{oc} – осевой момент инерции для круглого сечения ($J_{oc}=J_z=J_y$). Вводя обозначение $w = y \cdot \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha$, можем записать

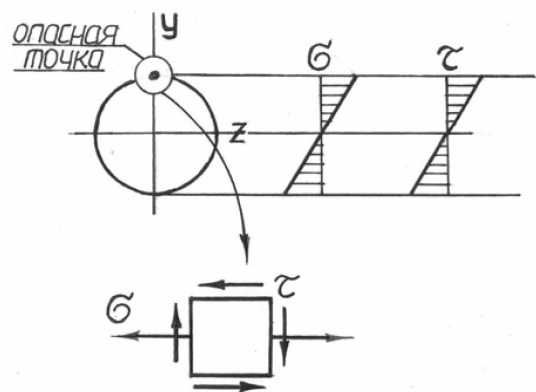
$$\sigma = \frac{M_n \cdot w}{J_{oc}},$$

при этом

$$\sigma_{max} = \frac{M_n}{W_{oc}},$$

W_{oc} – осевой момент сопротивления для круглого сечения ($W_{oc}=J_{oc}/\rho_{max}$, $\rho_{max}=d/2$).

Опасными точками в сечении будут являться точки наиболее удаленные от нейтральной оси (для круглого сечения – линии, перпендикулярной плоскости действия результирующего изгибающего момента). При этом в точках сечения будет возникать плоское напряженное состояние, а потому расчет на прочность необходимо проводить с привлечением известных теорий прочности.



16.3. Определение главных напряжений и расчет на прочность при кручении с изгибом

Подставив величины максимальных нормальных и касательных напряжений в формулу для главных напряжений ($\sigma_2=0$), получим:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2},$$
$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}.$$

Расчет брусков при изгибе с кручением проводится с применением теорий прочности. При этом расчет элементов из пластичных материалов выполняется на основе III или IV теорий прочности, а из хрупких – по теории Мора. Проанализируем расчет на прочность по III теории прочности

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Подставляя в эту формулу выражения для главных напряжений, получим:

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma].$$

Запишем условие прочности через крутящий и изгибающий моменты, учитывая, что для круглого сечения $W_p = 2 \cdot W_{\text{ос}}$:

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{ос}}}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_x}{2 \cdot W_{\text{ос}}}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_x^2}}{W_{\text{ос}}} \leq [\sigma].$$

Выражение под корнем называют приведенным (эквивалентным) моментом по третьей теории:

$$M_{\text{экв III}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Окончательно условие прочности запишем в виде

$$\sigma_{\text{экв III}} = \frac{M_{\text{экв III}}}{W_{\text{ос}}} \leq [\sigma].$$

Проанализируем расчет на прочность по IV теории прочности

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma].$$

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{ос}}}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{M_x}{2 \cdot W_{\text{ос}}}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75 \cdot M_x^2}}{W_{\text{ос}}} \leq [\sigma].$$

Приведенный (эквивалентный) момент по четвертой теории:

$$M_{\text{экв IV}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75 \cdot M_x^2}.$$

Окончательно условие прочности запишем в виде

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \frac{M_{\text{экв IV}}}{W_{\text{ос}}} \leq [\sigma].$$

17. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ

Одной из важнейших задач сопротивления материалов является задача определения деформаций конструкции под действием произвольной системы сил. Такая задача возникает при оценке жесткости и устойчивости элементов конструкции, при расчете деталей на динамические нагрузки, при раскрытии статической неопределимости системы.

До сих пор нами изучались некоторые частные случаи определения деформаций, пригодные при решении простейших задач. Далее рассмотрим общий метод определения деформаций любых упругих конструкций, в основе которого лежит основной принцип механики – закон сохранения энергии.

17.1. Потенциальная энергия деформации в общем случае нагружения

Сформулируем, прежде всего, закон сохранения энергии применительно к упругим системам при статическом нагружении.

Потенциальная энергия внешних сил U_P , действующих на тело, находящееся в равновесии, полностью переходит в потенциальную энергию деформации U этого тела:

$$U = U_P.$$

Так как мерой энергии, превратившейся в другой вид, является работа, произведенная силами, действующими на конструкцию, то предыдущую запись можем выразить несколько иначе.

Потенциальная энергия деформации U численно равна работе внешних сил A_P , проделанной ими при этой деформации:

$$U = A_P.$$

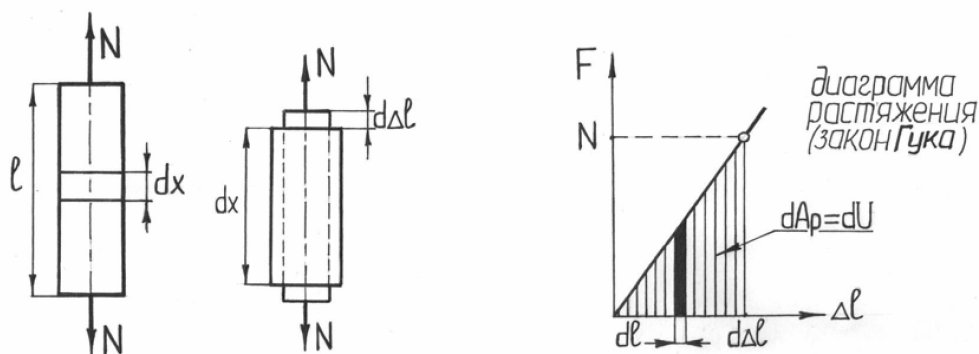
Далее рассмотрим возможности использования этого закона для определения деформаций системы, но сначала вспомним, как определяется потенциальная энергия деформации при простых видах сопротивления, и выведем общую формулу для расчета энергии деформации.

а) потенциальная энергия деформации при растяжении (сжатии)

Рассмотрим элемент стержня длиной dx , который под действием осевого усилия N получил удлинение $d\Delta l$.

Потенциальная энергия деформации элемента dx равна (см. рисунок)

$$dU = \frac{N \cdot d\Delta l}{2}.$$



Удлинение $d\Delta l$ найдем при помощи закона Гука

$$d\Delta l = \frac{N \cdot dx}{E \cdot A}.$$

Подставим выражение закона Гука в формулу для потенциальной энергии

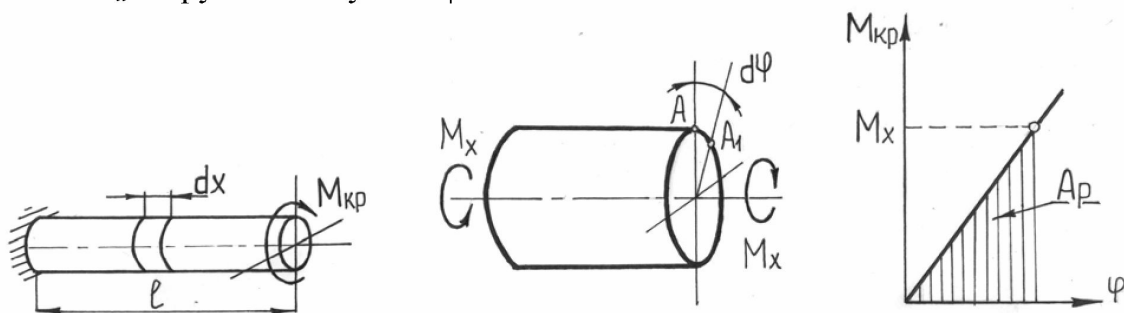
$$dU = \frac{N^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot A}.$$

Чтобы найти энергию деформации всего стержня, необходимо проинтегрировать последнее равенство по длине l стержня

$$U = \int_l \frac{N^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot A}.$$

б) потенциальная энергия деформации при кручении

Рассмотрим элемент вала длиной dx , который под действием крутящего момента M_x закрутился на угол $d\varphi$.



Потенциальная энергия деформации в этом случае

$$dU = \frac{M_x \cdot d\varphi}{2}.$$

Угол $d\varphi$ найдем при помощи закона Гука

$$d\varphi = \frac{M_x \cdot dx}{G \cdot J_p}.$$

Подставим закон Гука в формулу для потенциальной энергии

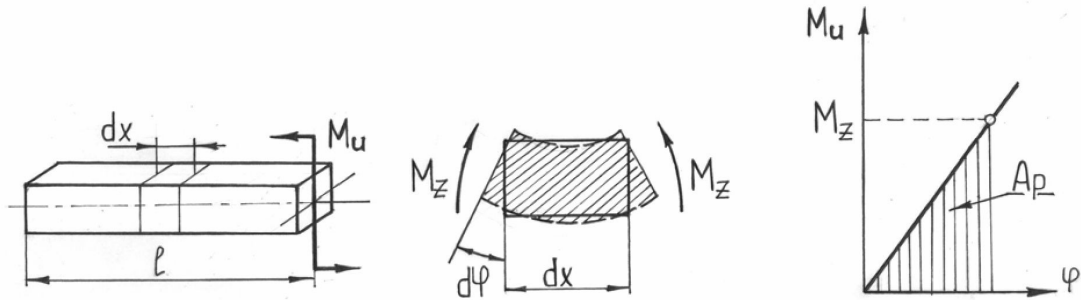
$$dU = \frac{M_x^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot J_p}.$$

Чтобы найти потенциальную энергию деформации всего вала необходимо проинтегрировать последнее равенство по его длине l

$$U = \int_l \frac{M_x^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot J_p}.$$

в) потенциальная энергия деформации при чистом изгибе

Рассмотрим элемент балки длиной dx , сечения которого под действием изгибающего момента $M_{\text{из}}$ повернулись на угол $d\varphi$.



Потенциальная энергия деформации в этом случае

$$dU = \frac{M_z \cdot d\varphi}{2}.$$

Угол $d\varphi$ найдем при помощи закона Гука при изгибе

$$d\varphi = \frac{M_z \cdot dx}{E \cdot J_z}.$$

Подставим закон Гука в формулу для потенциальной энергии

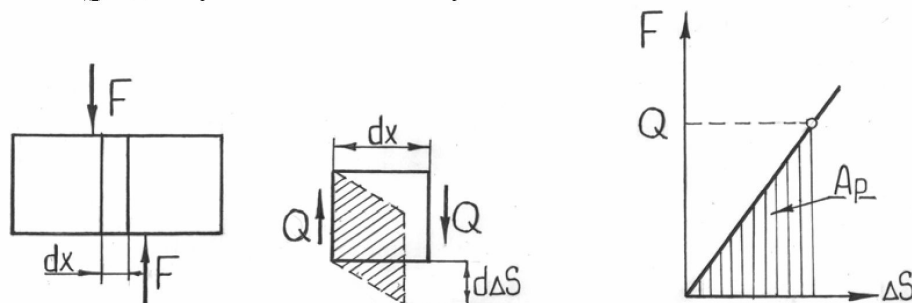
$$dU = \frac{M_z^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_z}.$$

Чтобы найти потенциальную энергию деформации всей балки необходимо проинтегрировать последнее равенство по ее длине l

$$U = \int_l \frac{M_z^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_z}.$$

г) потенциальная энергия деформации при чистом сдвиге

Рассмотрим элемент балки длиной dx , сечения которого под действием поперечной силы Q сдвинулись на величину $d\Delta S$.



Потенциальная энергия деформации в этом случае

$$dU = \frac{Q \cdot d\Delta S}{2}.$$

Абсолютный сдвиг $d\Delta S$ найдем при помощи закона Гука

$$d\Delta S = \frac{Q \cdot dx}{G \cdot A}.$$

Подставим закон Гука в формулу для потенциальной энергии

$$dU = k \cdot \frac{Q^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A},$$

где k – коэффициент, зависящий от формы сечения.

Потенциальная энергия деформации всей балки

$$U = k \cdot \int_l \frac{Q^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A}.$$

Потенциальную энергию деформации в самом общем случае нагружения найдем, используя принцип суперпозиции и учитывая, что для стержня с несколькими участками полученные интегралы необходимо просуммировать по всем участкам:

$$U = \sum_n \int_l \frac{N^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot A} + \sum_n k_y \cdot \int_l \frac{Q_y^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A} + \sum_n k_z \cdot \int_l \frac{Q_z^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A} + \\ + \sum_n \int_l \frac{M_x^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot J_p} + \sum_n \int_l \frac{M_y^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_y} + \sum_n \int_l \frac{M_z^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_z}$$

17.2. Обобщенные силы и обобщенные перемещения

Из анализа выражений, полученных в предыдущем параграфе, можем сделать следующее заключение.

Потенциальная энергия деформации (или, с другой стороны, работа силы) численно равна половине произведения величины силового фактора на значение перемещения, соответствующего этой силе:

$$U (= A) = \frac{F \cdot \Delta}{2}. \quad (17.1)$$

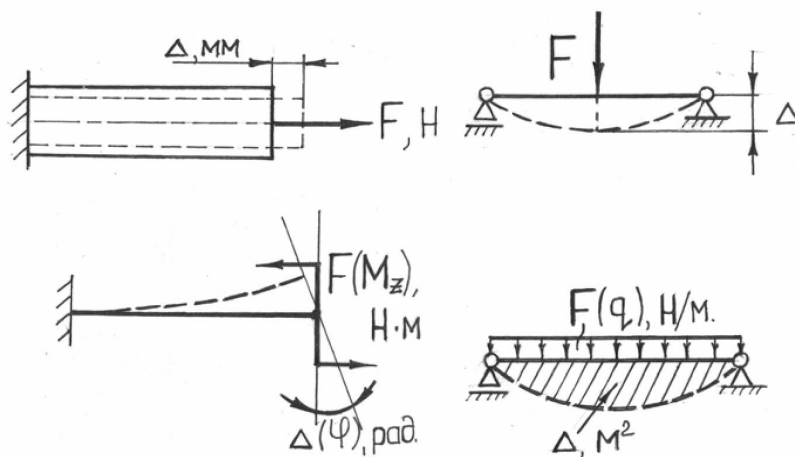
Таким образом, появляется возможность решать задачу в общем виде, не конкретизируя ни силовые факторы, ни перемещения. При этом вводят понятия обобщенной силы (F) и обобщенного перемещения (Δ).

Обобщенная сила – это сила или группа сил, которую удобно выделить при подсчете потенциальной энергии деформации.

Обобщенной силой может быть сосредоточенная сила, момент, распределенная нагрузка или их сочетание.

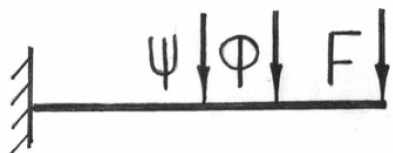
Обобщенное перемещение – это тот вид перемещения (линейное, угловое, объемное и т. д.), на котором рассматриваемая обобщенная сила производит работу.

Заметим, что выбирать обобщенное перемещение необходимо таким образом, чтобы произведение обобщенного перемещения на обобщенную силу представляло собой работу (размерность работы – Н·м). Таким образом, для сосредоточенной силы, принятой за обобщенную, обобщенным перемещением будет являться линейное перемещение точки приложения силы. Если в качестве обобщенной силы выбран момент, то обобщенным перемещением будет являться угол поворота сечения в точке приложения момента.



Далее рассмотрим возможности применения изложенного материала к определению перемещений в упругих системах.

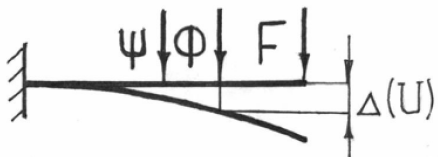
17.3. Теорема Кастильяно



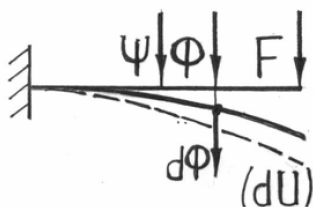
Рассмотрим упругую конструкцию (для простоты – консольную балку), нагруженную произвольной системой сил F , Φ , Ψ и т. д. При этом все силовые факторы будем считать независимыми переменными, то есть при изменении одного из них другие не изменяются.

Далее для вывода теоремы рассмотрим два возможных случая последовательного приложения указанных сил.

1-й случай



Все рассматриваемые силы F , Φ , Ψ приложим к балке одновременно. Очевидно, что балка под действием приложенной системы сил изогнется, при этом внешние силы совершат некоторую работу, которой (по закону сохранения энергии) будет соответствовать потенциальная энергия деформации системы $U(F, \Phi, \Psi)$.



Теперь дадим одной из переменных (например, Φ) бесконечно малое приращение $d\Phi$. В этом случае потенциальная энергия деформации также должна измениться на какую-то бесконечно малую величину dU .

Так как потенциальная энергия есть сложная функция нескольких независимых переменных, то это бесконечно малое приращение dU можно найти как

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \Phi} \cdot d\Phi.$$

Таким образом, суммарная потенциальная в этом случае энергия

$$U^* = U + \frac{\partial U}{\partial \Phi} \cdot d\Phi.$$

Рассмотрим теперь нагружение той же балки теми же силами, но приложенными в другой последовательности.

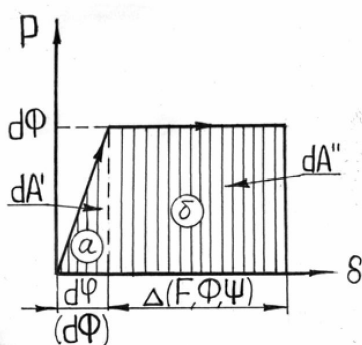
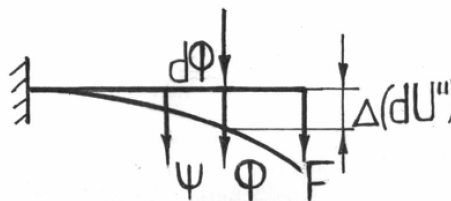
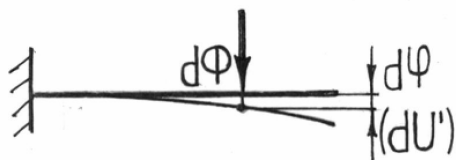
2-й случай

Приложим к балке сначала только бесконечно малую силу $d\Phi$. Под действием этой силы система деформируется и получит какое-то перемещение $d\phi$, при этом сила $d\Phi$ совершит на этом перемещении работу [см. (17.1)]

$$dA' = \frac{1}{2} \cdot d\Phi \cdot d\phi.$$

Потенциальная энергия деформации системы в этом случае

$$dU' = \frac{1}{2} \cdot d\Phi \cdot d\phi.$$



Теперь загрузим балку основной системой сил F , Φ , Ψ . Потенциальная энергия деформации балки под действием этой системы по-прежнему будет равна U (см. 1-й случай). При этом балка получит некоторое перемещение Δ . Здесь необходимо учесть, что в этот момент сила $d\Phi$ совершит дополнительную работу dA'' на перемещении Δ (участок **б** на рисунке). Так как Δ не зависит от $d\Phi$, то работу dA'' силы в этом случае будем вычислять не по выражению (17.1), а следующим образом:

$$dA'' = d\Phi \cdot \Delta.$$

Таким образом, полную энергию деформации системы в этом случае можно вычислить так:

$$U'' = \frac{1}{2} \cdot d\Phi \cdot d\varphi + U + d\Phi \cdot \Delta.$$

Очевидно, что энергия системы не должна зависеть от порядка приложения сил, а значит $U' = U''$. Тогда имеем право записать

$$U + \frac{\partial U}{\partial \Phi} \cdot d\Phi = \frac{1}{2} \cdot d\Phi \cdot d\varphi + U + d\Phi \cdot \Delta.$$

Исключая из этой формулы подобные слагаемые и пренебрегая бесконечно малыми высокими порядков, окончательно запишем

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial \Phi}.$$

Данное соотношение есть ничто иное, как математическая запись теоремы Кастильяно, которая гласит следующее: частная производная от потенциальной энергии по обобщенной силе есть обобщенное перемещение, соответствующее этой силе.

Рассмотрим пример использования теоремы Кастильяно для определения деформаций упругой системы. Итак, для определения перемещения нам необходимо взять производную от потенциальной энергии деформации по обобщенной силе:

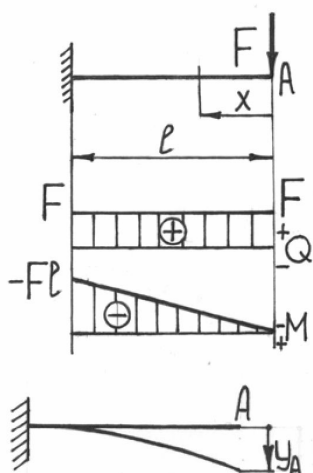
$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial \Phi}.$$

При этом сама потенциальная энергия будет определяться из выражения:

$$U = \sum_n \int_l \frac{N^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot A} + \sum_n \int_l \frac{M_x^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot J_p} + \sum_n \int_l \frac{M_{\text{и}}^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_{\text{ос}}} + \sum_n k \cdot \int_l \frac{Q^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A}.$$

Таким образом, окончательно можем записать

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\sum_n \int_l \frac{N^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot A} + \sum_n \int_l \frac{M_x^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot J_p} + \sum_n \int_l \frac{M_{\text{и}}^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_{\text{ос}}} + \sum_n k \cdot \int_l \frac{Q^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A} \right). \quad (17.2)$$



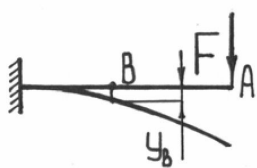
Пусть необходимо найти прогиб консольной балки под действием силы F . В этом случае в поперечных сечениях балки из шести внутренних усилий будут действовать только два – изгибающий момент $M_{\text{и}} = -F \cdot x$ и поперечная сила $Q = F$. Отметим, что при определении деформаций при изгибе действием поперечной силы, как правило, пренебрегают. Тогда, формулу (17.2) можем преобразовать так

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \Phi} \int_0^l \frac{M_{\text{и}}^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_z} = \frac{\partial}{\partial F} \int_0^l \frac{F^2 \cdot x^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_z} = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{F^2}{2 \cdot E \cdot J_z} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^l \right) \Rightarrow$$

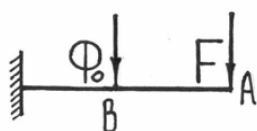
$$\Delta = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{F^2 \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J_z} \right) = \frac{2 \cdot F \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J_z} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z} \Rightarrow y_A = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z}.$$

Здесь знак «плюс» показывает, что направление перемещения совпадает с направлением действия силы.

17.4. Метод нулевой фиктивной силы



Недостатком метода Кастильяно является возможность определения перемещения только в тех точках, где приложена сила и только в направлении этой силы. Если в предыдущей задаче необходимо определить перемещение точки B , то напрямую использовать теорему Кастильяно нельзя – в точке B не действует никакая сила. Тогда поступим следующим образом.



Приложим в той точке, где нужно определить перемещение, обобщенную фиктивную силу Φ_0 (фиктивную, – так как ее на самом деле нет, а мы ее приложим). Вычислим потенциальную энергию деформации системы с учетом этой силы, а затем, в соответствии с (17.2), возьмем производную от энергии по этой фиктивной силе и получим формулу для определения перемещения. Для восстановления действительных условий нагружения достаточно в полученной формуле приравнять фиктивную силу нулю:

$$\Delta = \left(\frac{\partial U}{\partial \Phi_0} \right) \Big|_{\Phi_0=0}.$$

Таким образом, окончательно формула для определения перемещений упругой системы по методу нулевой силы выглядит следующим образом:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \Phi_0} \left(\sum_n \int_l \frac{N^2 dx}{2EA} + \sum_n \int_l \frac{M_x^2 dx}{2GJ_p} + \sum_n \int_l \frac{M_n^2 dx}{2EJ_{oc}} + \sum_n k \int_l \frac{Q^2 dx}{2GA} \right) \Big|_{\Phi_0=0}. \quad (17.3)$$

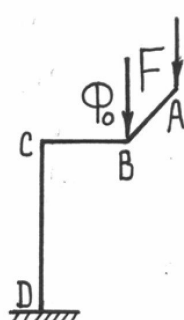
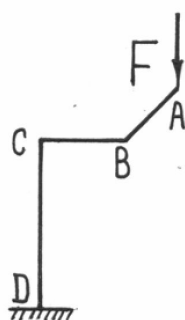
17.5. Метод Максвелла-Мора

Расчет по формуле (17.3) оказывается более удобным, если провести операцию дифференцирования непосредственно под знаком интеграла:

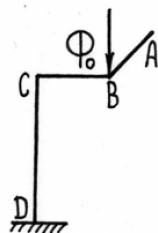
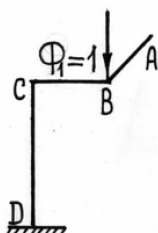
$$\Delta = \left(\sum_n \int_l \frac{\frac{\partial(N^2)}{\partial \Phi_0} \cdot dx}{2 \cdot E \cdot A} + \sum_n \int_l \frac{\frac{\partial(M_x^2)}{\partial \Phi_0} \cdot dx}{2 \cdot G \cdot J_p} + \sum_n \int_l \frac{\frac{\partial(M_n^2)}{\partial \Phi_0} \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_{oc}} + \sum_n k \cdot \int_l \frac{\frac{\partial(Q^2)}{\partial \Phi_0} \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A} \right) \Big|_{\Phi_0=0}.$$

Вспоминая правила дифференцирования сложной функции, эту формулу можем переписать так

$$\Delta = \left(\sum_n \int_l \frac{N}{E \cdot A} \frac{\partial N}{\partial \Phi_0} dx + \sum_n \int_l \frac{M_x}{G \cdot J_p} \frac{\partial M_x}{\partial \Phi_0} dx + \sum_n \int_l \frac{M_n}{E \cdot J_{oc}} \frac{\partial M_n}{\partial \Phi_0} dx + \sum_n k \int_l \frac{Q}{G \cdot A} \frac{\partial Q}{\partial \Phi_0} dx \right) \Big|_{\Phi_0=0}. \quad (17.4)$$



Рассмотрим некоторую конструкцию, нагруженную силой F в точке A . Пусть необходимо найти вертикальное перемещение Δ в точке B . Чтобы воспользоваться формулой (17.4), приложим в точку B фиктивную силу Φ_0 и исследуем полученную систему. Для того чтобы найти частные производные и упростить выражение (17.4), проведем следующие рассуждения, при этом будем пользоваться принципом независимости действия сил.



1) Допустим, что в точке, где нам необходимо найти перемещение Δ , приложена фиктивная сила $\Phi_1=1$. Внутренние усилия, которые возникнут в балке от этой силы, обозначим

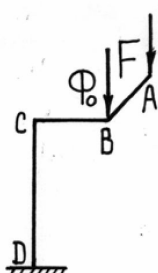
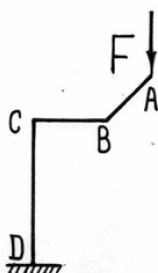
$$N_1, M_{x1}, M_{и1}, Q_1.$$

2) Очевидно, что если вместо силы $\Phi_1=1$ в ту же точку приложить какую-то другую силу Φ_0 , то внутренние усилия от силы Φ_0 можно найти как

$$N_1 \cdot \Phi_0, M_{x1} \cdot \Phi_0, M_{и1} \cdot \Phi_0, Q_1 \cdot \Phi_0. \quad (17.5)$$

3) Внутренние усилия от внешних нагрузок (без учета фиктивной силы Φ_0) обозначим следующим образом

$$N_p, M_{xp}, M_{ип}, Q_p. \quad (17.6)$$



Окончательно внутренние усилия в сечениях системы с учетом всех сил (внешних и фиктивной), приложенных к ней, определим, просуммировав усилия (17.5) и (17.6):

$$N = N_p + N_1 \cdot \Phi_0;$$

$$M_x = M_{xp} + M_{x1} \cdot \Phi_0;$$

$$M_{и} = M_{ип} + M_{и1} \cdot \Phi_0;$$

$$Q = Q_p + Q_1 \cdot \Phi_0.$$

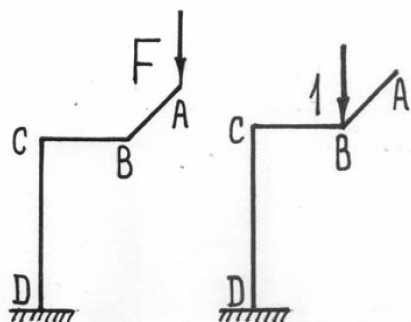
Теперь, для того чтобы воспользоваться формулой (17.4), необходимо взять частные производные от внутренних усилий, а затем приравнять фиктивную силу нулю ($\Phi_0=0$). Получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \Phi_0} &= N_1, & N_{(\Phi_0=0)} &= N_p; \\ \frac{\partial M_x}{\partial \Phi_0} &= M_{x1}, & M_{x(\Phi_0=0)} &= M_{xp}; \\ \frac{\partial M_{и}}{\partial \Phi_0} &= M_{и1}, & M_{и(\Phi_0=0)} &= M_{ип}; \\ \frac{\partial Q}{\partial \Phi_0} &= Q_1, & Q_{(\Phi_0=0)} &= Q_p. \end{aligned} \right\} \quad (17.7)$$

Подставляя зависимости (17.7) в формулу (17.4), окончательно получим выражение для расчета перемещений упругой системы по методу Максвелла-Мора в виде:

$$\Delta = \sum_n \int_l \frac{N_P N_1}{E \cdot A} dx + \sum_n \int_l \frac{M_{xP} M_{x1}}{G \cdot J_p} dx + \sum_n \int_l \frac{M_{yP} M_{y1}}{E \cdot J_{oc}} dx + \sum_n k \int_l \frac{Q_P Q_1}{G \cdot A} dx. \quad (17.8)$$

Таким образом, для того чтобы определить перемещения методом Максвелла-Мора, необходимо:



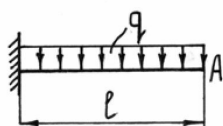
1) рассмотреть **«грузовую» систему**, нагруженную только внешними силами (без учета фиктивных сил), и записать для этой системы выражения для внутренних усилий по участкам;

2) рассмотреть **«единичную» систему**, нагруженную только одной силой – единичной силой $\Phi_1=1$, приложенной в том направлении и в той точке, где требуется найти перемещение, и записать для этой системы выражения для внутренних усилий по участкам;

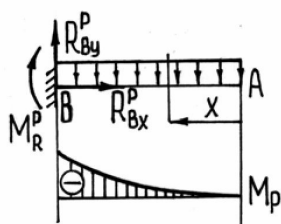
3) подставить найденные внутренние усилия в интеграл Максвелла-Мора (17.8) и найти перемещение.

Отметим, что для многих стержневых систем действием осевого усилия N и поперечных сил Q можно пренебречь. Тогда выражение (17.8) приводится к виду интеграла Мора, в котором учитываются только изгибающие и крутящие моменты, действующие на систему:

$$\Delta = \sum_n \int_l \frac{M_{xP} \cdot M_{x1}}{G \cdot J_p} \cdot dx + \sum_n \int_l \frac{M_{yP} \cdot M_{y1}}{E \cdot J_{oc}} \cdot dx.$$



Рассмотрим пример определения перемещений методом Максвелла-Мора. Пусть необходимо определить угловое перемещение ϕ_A свободного конца консольной балки длиной l , нагруженной распределенной силой q .

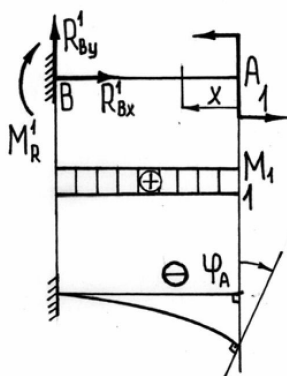


Для определения перемещения необходимо рассмотреть две системы: 1) грузовую – нагруженную только внешними силами (нагрузка q и реакции от нее); 2) единичную – нагруженную единичной обобщенной силой, приложенной в точке и в направлении искомого перемещения (здесь также необходимо учитывать и реакции от этой силы). Так как нам необходимо найти угловое перемещение, то в качестве обобщенной единичной силы принимаем момент.

Применяя метод мысленных сечений, определим внутренние усилия, возникающие в сечениях каждой из систем:

а) грузовая система

$$M_{zP} = -\frac{q \cdot x^2}{2};$$



б) единичная система

$$M_{z_1} = 1.$$

Подставим эти усилия в интеграл Максвелла-Мора и возьмем его

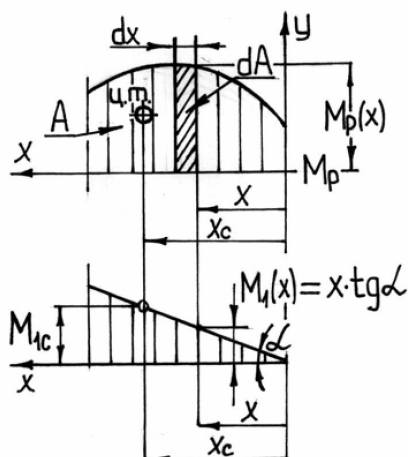
$$\varphi_A = \int_0^l \left(-\frac{q \cdot x^2 \cdot 1}{2 \cdot E \cdot J_z} \right) dx \Rightarrow \varphi_A = -\frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J_z}.$$

Здесь знак «минус» показывает, что найденное перемещение φ_A и единичный момент направлены в разные стороны.

17.6. Способ Верещагина

При исследовании изгиба стержневых систем оказывается удобным для определения перемещений использовать графо-аналитический метод, предложенный А. Н. Верещагиным (1924).

Так как при определении линейных или угловых перемещений единичная нагрузка будет представлять собой либо силу, либо момент, то эпюра внутреннего изгибающего момента для единичной системы всегда будет ограничена прямыми линиями. В этом случае интеграл Мора можно вычислить следующим образом.



Пусть «грузовая» эпюра M_p имеет криволинейное очертание, а «единичная» эпюра M_1 представляет собой наклонную прямую (с углом наклона α). На «грузовой» эпюре M_p на расстоянии x от начала координат выделим элемент шириной dx . Площадь этого элемента, очевидно, равна $dA = M_p \cdot dx$. «Единичный» момент M_1 , соответствующий координате x , можно найти через тангенс угла α :

$$M_1 = x \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Запишем теперь интеграл Мора и подставим в него найденные соотношения:

$$\int M_p \cdot M_1 \cdot dx = \int dA \cdot x \cdot \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \int x \cdot dA. \quad (17.9)$$

Выражение под знаком последнего интеграла есть ничто иное, как статический момент «грузовой» эпюры относительно оси Oy

$$S_y = \int x \cdot dA.$$

С другой стороны, статический момент можно найти как произведение площади на координату центра тяжести «грузовой» эпюры

$$S_y = x_c \cdot A.$$

В этом случае интеграл (17.9) можно переписать так:

$$\int M_p \cdot M_1 \cdot dx = A \cdot x_c \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

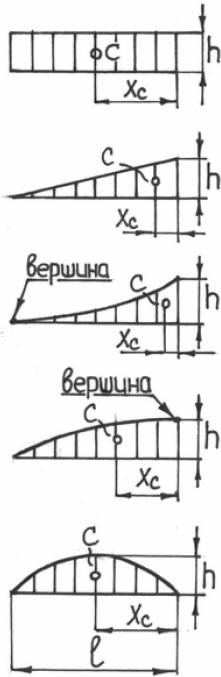
Произведение $x_c \cdot \operatorname{tg} \alpha$ представляет собой величину единичного момента в точке с координатой x_c :

$$M_{1c} = x_c \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, выражение для определения перемещения балки при изгибе по методу Верещагина запишем в следующем виде:

$$\Delta = \sum_n \frac{A \cdot M_{1c}}{E \cdot J_{oc}}, \quad (17.10)$$

где A – площадь «грузовой» эпюры M_P на данном участке; M_{1c} – величина «единичного» момента под центром тяжести «грузовой» эпюры на данном участке.



Площадь «грузовой» эпюры найдем как

$$A = F \cdot l/2.$$

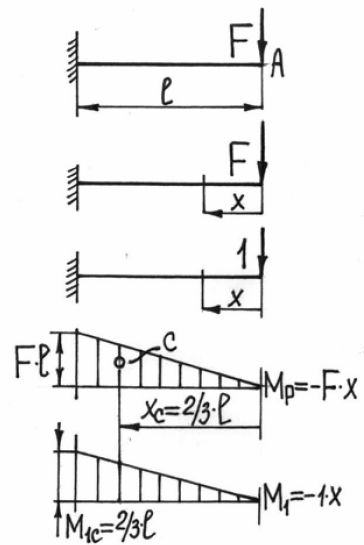
Значение «единичного» момента под центром тяжести «грузовой» эпюры определим из пропорции

$$M_{1c} = 2 \cdot l/3.$$

Тогда искомое перемещение

$$\Delta = \frac{A \cdot M_{1c}}{E \cdot J_z} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z} \Rightarrow y_A = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z}.$$

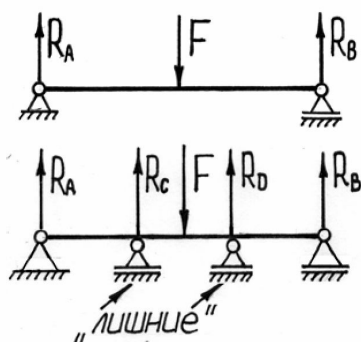
Знак «плюс» показывает, что направление перемещения совпадает с направлением единичной силы.



18. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

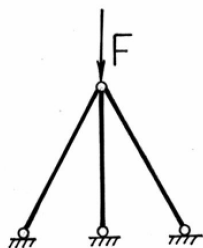
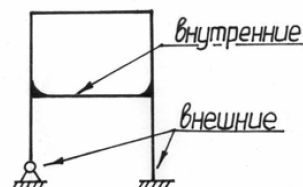
18.1. Общие понятия и определения

Статически неопределимая система – это конструкция, силовые факторы в элементах которой невозможно определить только из уравнений равновесия (уравнений статики).



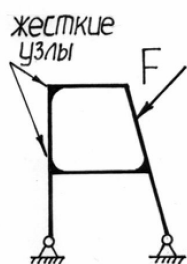
Статическая неопределимость возникает в том случае, когда число наложенных на систему связей оказывается больше, чем это необходимо для обеспечения ее равновесия. При этом некоторые из этих связей становятся как бы «лишними», а усилия в них – лишними неизвестными. По числу лишних неизвестных устанавливают степень статической неопределимости системы. Отметим, что термин «лишние» связи является условным, так как эти связи необходимы для обеспечения прочности и жесткости системы, хотя и «избыточны» с точки зрения ее равновесия.

Связь – условие закрепления или соединения элементов конструкции, не допускающее изменения их взаимного положения (внутренние связи) и положения в пространстве (внешние связи).



До сих пор мы рассматривали простейшие статически неопределимые системы, элементы которых работали только на растяжение (сжатие). Такие конструкции обычно называют **фермами**.

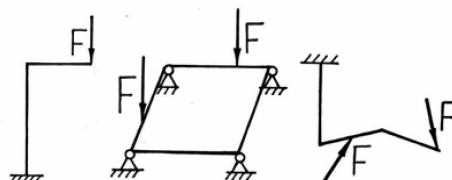
Ферма – конструкция, состоящая из прямых стержней, соединенных между собой шарнирами, и нагруженная силами, приложенными в узлах (в шарнирах).



Далее рассмотрим более общие случаи статически неопределимых систем, элементы которых могут находиться в условиях сложного сопротивления, испытывать изгиб, кручение и т. д. Наиболее распространенным примером таких конструкций являются **рамы**.

Рама – конструкция, состоящая из стержней произвольной конфигурации и имеющая один или несколько жестких (не шарнирных) узлов.

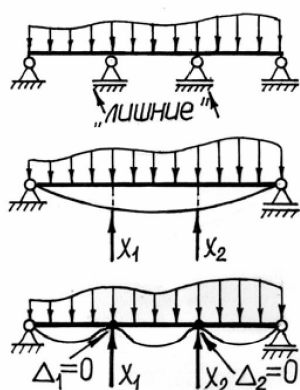
Как рамы, так и фермы могут быть а) плоскими – все элементы конструкции и силы лежат в одной плоскости; б) плоскопространственными – все элементы конструкции лежат в одной плоскости, а силы перпендикулярны к этой плоскости; в) пространственными – элементы конструкции и силы располагаются произвольно друг относительно друга.



Для раскрытия статической неопределимости необходимо, помимо статической стороны задачи, проанализировать деформации системы и в дополнение к уравнениям равновесия составить уравнения совместности деформаций, из решения которых и находятся «лишние» неизвестные. При этом число таких уравнений должно равняться степени статической неопределимости системы.

В общем случае нагружения статически неопределимой системы наиболее эффективными способами определения деформаций ее элементов являются энергетические методы, возможности применения которых рассмотрим в следующем параграфе.

18.2. Метод сил. Основная идея метода



Для того чтобы обратить заданную статически неопределимую систему в статически определимую, в методе сил используется следующий прием. Все «лишние» связи, наложенные на конструкцию, отбрасываются, а их действие заменяется соответствующими реакциями – силами или моментами. При этом, для сохранения заданных условий закрепления и нагружения, реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения в направлении этих реакций равнялись бы нулю (или заданным величинам).

Таким образом, при раскрытии статической неопределимости этим методом искомыми оказываются не деформации, а соответствующие им силы – реакции связей (отсюда и название «метод сил»).

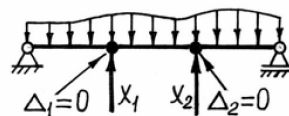
Запишем основные этапы раскрытия статической неопределимости по методу сил:



- 1) определяем степень статической неопределимости системы, то есть число лишних неизвестных;
- 2) удаляем лишние связи и заменяем таким образом исходную статически неопределимую систему статически определимой. Эта новая система, освобожденная от лишних связей, называется **основной**.

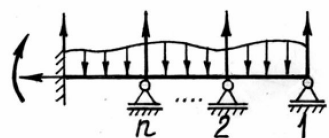
Заметим, что выбор лишних связей может быть достаточно произвольным и зависит лишь от желания расчетчика, так что для одной и той же исходной статически неопределимой системы возможны различные варианты основных систем. Однако нужно следить за тем, чтобы основная система оставалась геометрически неизменяемой – то есть ее элементы после удаления лишних связей не должны иметь возможности свободно перемещаться в пространстве.

- 3) составляем уравнения для деформаций в точках приложения лишних неизвестных. Так как в исходной системе эти деформации равны нулю, то и указанные уравнения необходимо также приравнять к нулю. Затем из полученных уравнений находим величину лишних неизвестных.



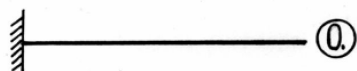
18.3. Канонические уравнения метода сил

Определять перемещения соответствующих точек основной системы можно любым способом, однако лучше всего общими методами – методом Максвелла-Мора или способом Верещагина. При этом дополнительные уравнения перемещений удобно составлять в так называемой канонической форме, то есть по определенной закономерности.

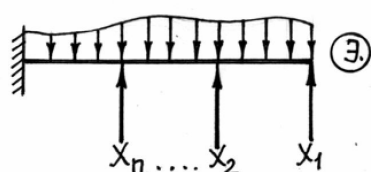


Рассмотрим балку, нагруженную произвольной системой сил, на которую наложено n «лишних» связей – система n раз статически неопределима.

Для раскрытия статической неопределимости используем метод сил.

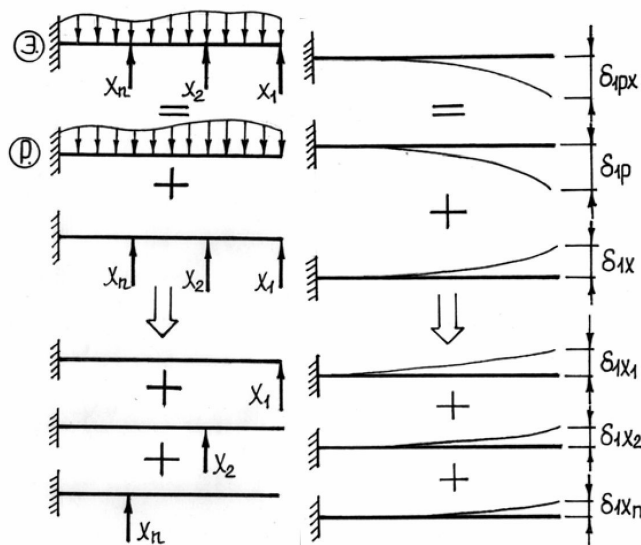


1) Освободим балку от лишних связей и получим вид основной системы. Далее все рассуждения будем проводить применительно к основной системе.



2) Загрузим основную систему всеми внешними силами, а также лишними неизвестными в местах расположения и в направлении отброшенных связей ($X_1, X_2, \dots, X_n$). Полученную систему будем называть эквивалентной.

Эквивалентная система – система, полученная из основной, после ее загрузки внешними силами и лишними неизвестными.



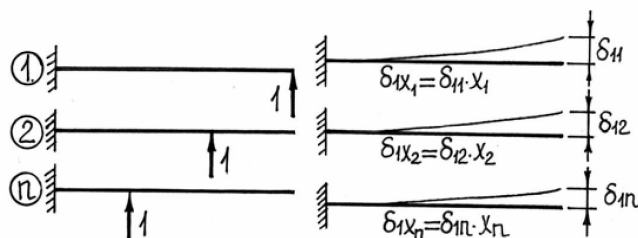
3) Рассмотрим деформации эквивалентной системы (например, в точке 1). Под действием внешних нагрузок (P) и лишних неизвестных (X) точка 1 сместится на некоторую величину δ_{1PX} . Согласно принципу независимости действия сил, эта деформация может быть найдена как сумма двух деформаций – деформации балки только под действием внешних сил δ_{1P} и деформации балки под действием лишних неизвестных δ_{1X}

$$\delta_{1PX} = \delta_{1P} + \delta_{1X}. \quad (18.1)$$

Проанализируем перемещение δ_{1X} точки 1 под действием лишних неизвестных ($X_1, X_2, \dots, X_n$). Каждая из лишних неизвестных ($X_1, X_2, \dots, X_n$) сама по себе вызовет некоторую деформацию балки ($\delta_{1X_1}, \delta_{1X_2}, \dots, \delta_{1X_n}$), при этом сумма таких деформаций и составит в итоге полную деформацию балки от лишних неизвестных

$$\delta_{1X} = \delta_{1X_1} + \delta_{1X_2} + \dots + \delta_{1X_n}. \quad (18.2)$$

Для определения деформаций $\delta_{1X_1}, \delta_{1X_2}, \dots, \delta_{1X_n}$ используем следующий искусственный прием. Приложим к основной системе вместо лишних неизвестных ($X_1, X_2, \dots, X_n$) известные единичные силы (силы, величина которых равна единице), обозначим их 1, 2, 3, ..., n. Каждая единичная сила в отдельности сдеформирует балку на некоторую величину ($\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{1n}$). Так как неизвестная X_1 отличается от единичной силы 1 в X_1 раз, то и деформации, вызванные этими силами, будут отличаться в X_1 раз в силу линейной связи (закон Гука!) между деформациями и усилиями, то есть



ка!) между деформациями и усилиями, то есть

$$\delta_{1X_1} = \delta_{11} \cdot X_1.$$

Аналогично можем показать, что

$$\delta_{1X_2} = \delta_{12} \cdot X_2; \quad \delta_{1X_3} = \delta_{13} \cdot X_3; \quad \dots; \quad \delta_{1X_n} = \delta_{1n} \cdot X_n.$$

Таким образом, перепишем выражение (18.2) в следующем виде

$$\delta_{1X} = \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n,$$

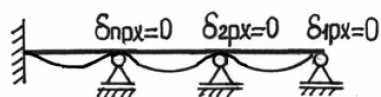
при этом формула (18.1) примет вид

$$\delta_{1PX} = \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \delta_{1P}. \quad (18.3)$$



4) Так как в точке 1 исходной системы была установлена опора (лишняя связь), то для сохранения эквивалентности исходной и рассматриваемой систем необходимо потребовать, чтобы перемещение в этой точке равнялось нулю, то есть $\delta_{1PX}=0$, или, с учетом (18.3)

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \delta_{1P} = 0.$$



Подобные рассуждения можем провести для каждой точки исходной системы, где установлена опора (лишняя связь). В итоге получим следующую систему уравнений:

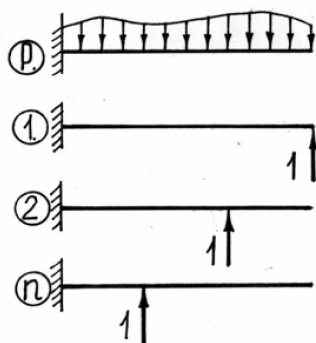
$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + \delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \dots + \delta_{3n} \cdot X_n + \delta_{3P} &= 0; \\ \vdots & \\ \delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \delta_{n3} \cdot X_3 + \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

Это и есть система канонических уравнений метода сил. Она содержит n уравнений с n неизвестными «лишними» силами ($X_1, X_2, \dots, X_n$), которые и найдем, решая систему (18.4).

5) Определим коэффициенты δ , входящие в уравнения (4).

Коэффициент δ_{iP} есть перемещение i -ой точки основной системы под действием внешних сил (P). Для его определения можно воспользоваться методом Максвелла-Мора, учитывая все участки конструкции

$$\delta_{iP} = \sum \int \frac{M_P \cdot M_i}{E \cdot J_{oc}} \cdot dx,$$



где M_P – внутренний изгибающий «грузовой» момент (определяется по «грузовой» системе, то есть системе, нагруженной только внешними силами); M_i – внутренний изгибающий «единичный» момент (определяется по «единичной» системе, то есть системе, нагруженной только единичной силой, приложенной в i -ой точке).

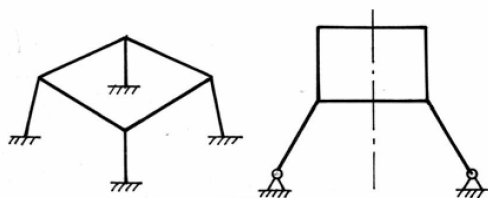
Коэффициент δ_{ij} есть перемещение i -ой точки основной системы под действием j -ой единичной силы. Для его определения можно также воспользоваться методом Максвелла-Мора с учетом всех участков системы

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{M_i \cdot M_j}{E \cdot J_{oc}} \cdot dx,$$

где M_i – внутренний изгибающий «единичный» момент (определяется по i -ой «единичной» системе, то есть системе, нагруженной только единичной силой, приложенной в i -ой точке); M_j – внутренний изгибающий «единичный» момент (определяется по j -ой «единичной» системе, то есть системе, нагруженной только единичной силой, приложенной в j -ой точке).

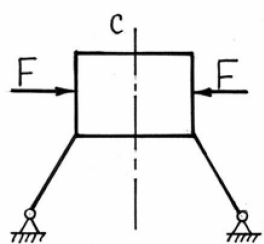
Таким образом, для определения коэффициентов δ необходимо определить внутренние изгибающие моменты для нескольких систем: одной «грузовой», нагруженной только внешними силами, и несколькими «единичными», каждая из которых загружается всего лишь одной силой – единичной силой, приложенной по направлению и в той точке, где ищется лишняя неизвестная (X). Затем эти внутренние усилия необходимо подставить в интеграл Максвелла-Мора и найти δ .

18.4. Учет симметрии при расчете статически неопределимых систем

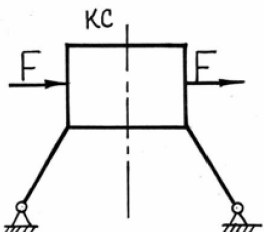


Можно значительно упростить систему канонических уравнений метода сил, если есть возможность учесть симметрию конструкции и приложенных к ней нагрузок, поскольку при этом некоторые побочные коэффициенты канонических уравнений оказываются равными нулю.

Симметричной будем называть конструкцию, если одна из ее частей является зеркальным отражением второй части относительно плоскости (оси) симметрии.



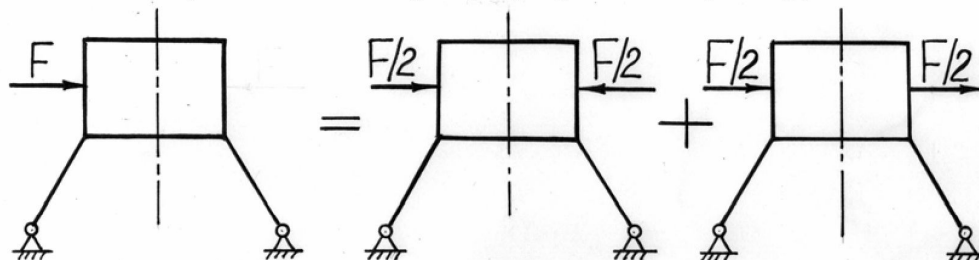
Усилия (и внешние, и внутренние), действующие на симметричную конструкцию, можно разделить на *симметричные* и *кососимметричные*.



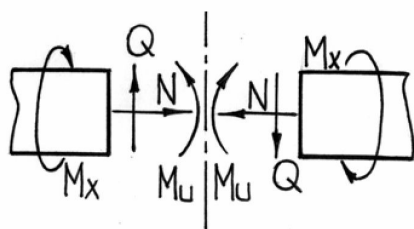
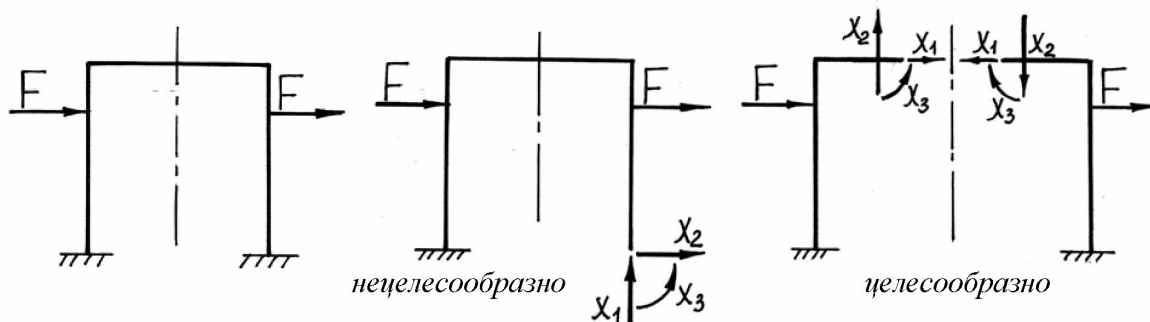
Симметричной будем считать нагрузку, если усилия, приложенные к одной части конструкции, являются зеркальным отображением усилий, приложенных к другой ее части.

Кососимметричной будем считать нагрузку, если усилия, приложенные к одной части конструкции, являются зеркальным отображением усилий, приложенных к другой ее части, но взятых с противоположным знаком.

Заметим, что любую несимметричную нагрузку, приложенную к симметричной конструкции, можно разложить на две составляющие, одна из которых будет симметричной, а другая – кососимметричной. Полученные две задачи решаются затем с учетом симметрии, а результаты суммируются.



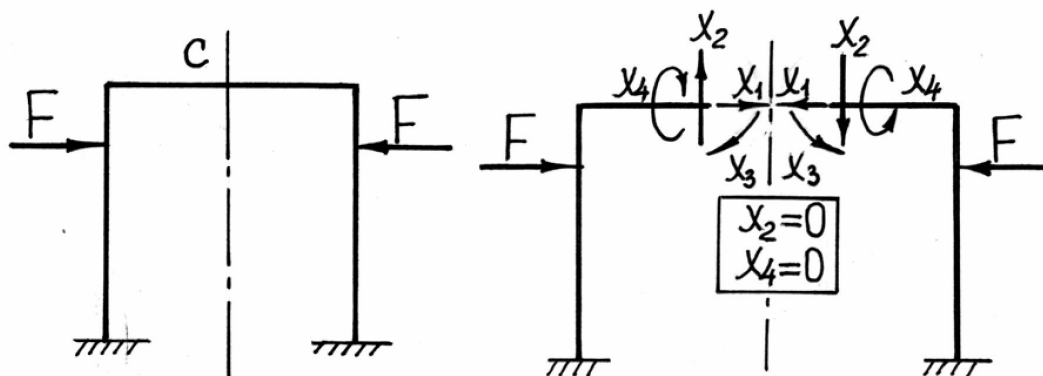
Особенностью, упрощающей решение статически неопределимых задач с учетом симметрии, является тот факт, что в качестве лишних неизвестных здесь целесообразно выбирать не реакции опор, а внутренние усилия, расположенные в плоскости симметрии конструкции.



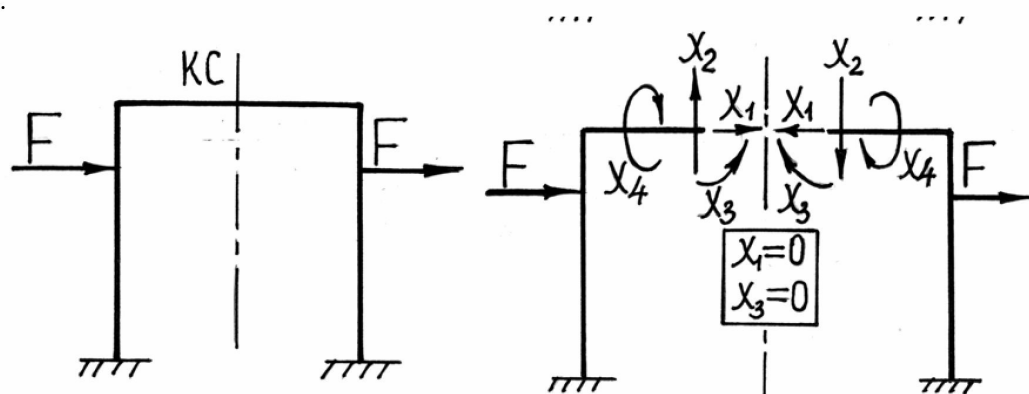
При этом искомые внутренние усилия можно будет также подразделить на симметричные и кососимметричные: осевое усилие N и изгибающие моменты M_y, M_z – симметричные силовые факторы, а поперечные силы Q_y, Q_z и крутящий момент M_x – кососимметричные.

При анализе симметричных конструкций удобно использовать следующие правила:

1) в симметричной конструкции при *симметричной* внешней нагрузке в плоскости симметрии равны нулю *кососимметричные* внутренние усилия (Q , M_x);



2) в симметричной конструкции при *кососимметричной* внешней нагрузке в плоскости симметрии равны нулю *симметричные* внутренние усилия (N , M_y , M_z).



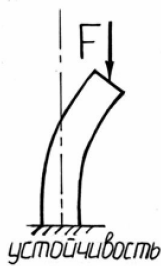
После того как путем решения системы канонических уравнений найдены неизвестные «лишние» усилия $X_1, X_2, \dots, X_n$, эти усилия и заданную нагрузку можно приложить к основной системе (получим эквивалентную статически определимую систему). Затем от их совместного действия обычным способом можно определить внутренние усилия по участкам системы, построить их эпюры и провести расчет на прочность.

Понятие об устойчивости систем. Формы и методы определения устойчивости. Задача Эйлера. Условия закрепления концов стержня. Критические напряжения. Расчет на устойчивость. Расчет на устойчивость стержня при упруго-пластических деформациях. Расчет составной колонны. Продольно-поперечный изгиб.

19. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

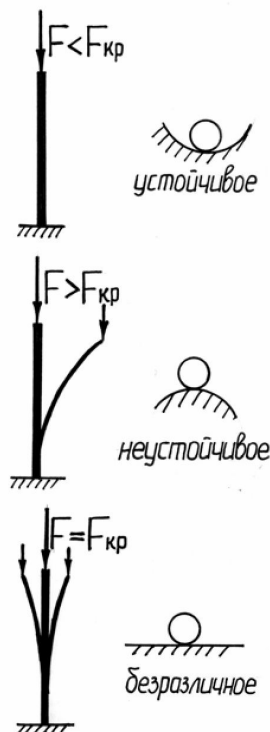
19.1. Основные понятия. Устойчивое и неустойчивое равновесие

В конструкциях и сооружениях большое применение находят детали, являющиеся относительно длинными и тонкими стержнями, у которых один или два размера поперечного сечения малы по сравнению с длиной стержня. Поведение таких стержней под действием осевой сжимающей нагрузки оказывается принципиально иным, чем при сжатии коротких стержней. Опыт показывает, что при достижении сжимающей силой F некоторой критической величины, равной $F_{кр}$, прямолинейная форма равновесия длинного стержня оказывается неустойчивой, и при превышении $F_{кр}$ стержень начинает интенсивно искривляться (выпучиваться). При этом новым (моментным) равновесным состоянием упругого длинного стержня (при $F > F_{кр}$) становится некоторая новая уже криволинейная форма. Это явление носит название потери устойчивости.



Устойчивость – способность тела сохранять положение или форму равновесия при внешних воздействиях.

Обычно потеря устойчивости системы сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических деформаций или разрушением. Возможны также случаи, когда система, потеряв устойчивость, переходит в режим незатухающих колебаний. Особая опасность потери устойчивости заключается в том, что она происходит внезапно и при низких значениях напряжений, когда прочность материала еще далеко не исчерпана.



При анализе устойчивости конструкций следует различать устойчивое и неустойчивое равновесие системы.

При *устойчивом равновесии* тело, выведенное какой-либо силой из своего первоначального положения, возвращается в это положение после прекращения действия силы.

При *неустойчивом равновесии* тело, выведенное какой-либо силой из своего первоначального положения, продолжает деформироваться в направлении данного ему отклонения, и, после удаления внешнего воздействия, в исходное состояние не возвращается. В этом случае говорят, что произошла потеря устойчивости.

Между этими двумя состояниями существует переходное состояние, называемое *критическим*, при котором деформированное тело находится в *безразличном равновесии*: оно может сохранить первоначальную форму, но может и потерять ее от самого незначительного возмущения.

Критическая сила ($F_{кр}$) – нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы (положения) тела.

С момента наступления критического состояния до момента разрушения деформации системы нарастают крайне быстро, и практически нет времени принять меры по предотвращению грозящей катастрофы. Таким образом, при расчете на устойчивость критическая нагрузка подобна разрушающей при расчете на прочность.

При этом условие устойчивости можно записать в следующем виде:

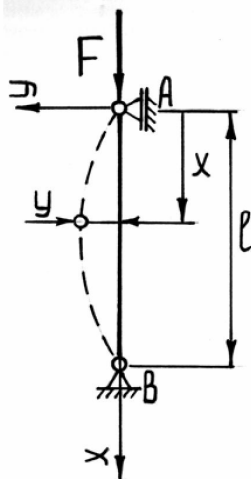
$$F_{max} \leq F_{кр},$$

или в напряжениях

$$\sigma_{max} \leq [\sigma_y] = F_{кр} / A.$$

19.2. Устойчивость сжатого стержня. Задача Эйлера

При определении критической силы, вызывающей потерю устойчивости сжатого стержня, предполагается, что стержень идеально прямой и сила F приложена строго центрально. Рассматриваемый метод решения основан на том, что при достижении силой F критического состояния ($F=F_{кр}$) стержень находится в безразличном состоянии и ему присущи две формы равновесия: прямолинейная и криволинейная (в таких случаях говорят, что происходит ветвление, или бифуркация, равновесных состояний). Для выявления криволинейной формы равновесия достаточно приложить к стержню малую поперечную возмущающую нагрузку Q , которая вызовет малый прогиб. Если $F < F_{кр}$, то при удалении Q стержень



будет сохранять прямолинейную форму равновесия. Если $F > F_{кр}$, то равновесие стержня становится неустойчивым и сколь угодно малое возмущение достаточно для того, чтобы возникли большие прогибы. Задачу о критической нагрузке сжатого стержня с учетом возможности существования двух форм равновесия при одном и том же значении силы решил академик Петербургской Академии наук Л. Эйлер в 1744 году.

Рассмотрим шарнирно опертый по концам стержень, сжатый продольной силой F . Положим, что по какой-то причине стержень получил малое искривление оси, вследствие чего в нем появился изгибающий момент M :

$$M = -F \cdot y,$$

где y – прогиб стержня в произвольном сечении с координатой x .

Для определения критической силы можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением упругой линии:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot J}, \quad (19.2)$$

где E – модуль Юнга; J – осевой момент инерции сечения стержня относительно оси z в данном случае; $E \cdot J$ – жесткость стержня при изгибе. Знаки левой и правой части (19.2) согласованны в данной системе координат.

Подставив в это уравнение выражение для изгибающего момента (19.1), получим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F \cdot y}{E \cdot J}. \quad (19.3)$$

Введя обозначение

$$\frac{F}{E \cdot J} = k^2, \quad (19.4)$$

перепишем формулу (19.3) так:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \cdot y = 0.$$

Общий интеграл полученного однородного дифференциального уравнения представляется функцией

$$y = C_1 \cdot \sin kx + C_2 \cdot \cos kx. \quad (19.5)$$

Это решение содержит три неизвестные: постоянные интегрирования C_1 и C_2 и параметр k . Найдем эти величины из граничных условий – условий закрепления стержня по концам:

а) при $x=0$ прогиб в опоре (точка A) должен быть равен нулю $y=0$, тогда из уравнения (19.5) получим, что $C_2=0$, при этом формула приобретает вид

$$y = C_1 \cdot \sin kx. \quad (19.6)$$

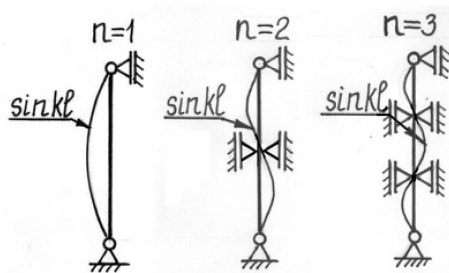
Уравнение (19.6) указывает на то, что при продольном изгибе изогнутая ось стержня может быть представлена как некоторое число волн синусоиды с амплитудой C_1 .

б) при $x=l$ прогиб в другой опоре (точка B) должен быть также равен нулю $y=0$, тогда из уравнения (19.6) получим, что $C_1 \cdot \sin kl = 0$. Согласно постановке задачи, коэффициент C_1 заведомо не равен нулю (иначе равен нулю прогиб балки во всех точках, что противоречит постановке задачи). В этом случае получаем

$$\sin kl = 0.$$

Из свойств синусоиды следует, что

$$k = \frac{\pi \cdot n}{l}, \quad (19.7)$$



где n – произвольное целое число ($n \neq 0$), которое представляет собой число полуwave синусоиды, укладываемых на длине изогнутой оси стержня.

Решая совместно уравнения (19.4) и (19.7), получим выражение для некоторых фиксированных значений сжимающей силы, при которых возможна криволинейная форма равновесия оси стержня

$$F = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}.$$

Как видим, минимальное значение критической силы примет при $n=1$ (на длине стержня укладывается одна полуволна синусоиды) и $J=J_{min}$ (стержень искривляется относительно оси с наименьшим моментом инерции)

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{l^2}. \quad (19.8)$$

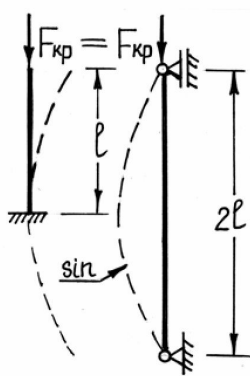
Это выражение обычно называют формулой Эйлера, а определяемую с ее помощью критическую силу – эйлеровой силой.

19.3. Зависимость критической силы от условий закрепления стержня



Формула Эйлера была получена нами для, так называемого, основного случая – в предположении шарнирного опирания стержня по концам. На практике встречаются и другие случаи закрепления стержня. При этом можно получить формулу для определения критической силы для каждого из этих случаев, решая, как в предыдущем параграфе, дифференциальное уравнение изогнутой оси балки с соответствующими граничными условиями. Но можно использовать и более простой прием, если вспомнить, что, согласно (19.8), при потере устойчивости на длине стержня должна укладываться одна полуволна синусоиды.

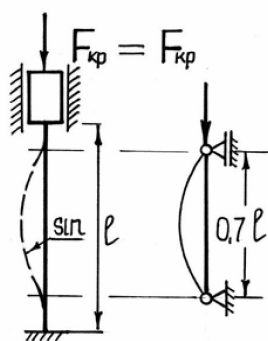
Рассмотрим некоторые характерные случаи закрепления стержня по концам и получим общую формулу для различных видов закрепления.



1-й случай

Стержень длиной l заделан одним концом и сжат продольной силой. Из сравнения вида изогнутой оси балки для рассматриваемого и основного случаев можем сделать вывод, что ось стержня, заделанного одним концом, находится в тех же условиях, как и верхняя половина шарнирно опертого стержня длиной $2 \cdot l$. Таким образом, критическая сила для стержня длиной l с одним защемленным концом может быть найдена так же как и для шарнирно опертой балки длиной $2 \cdot l$, то есть

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(2 \cdot l)^2}.$$



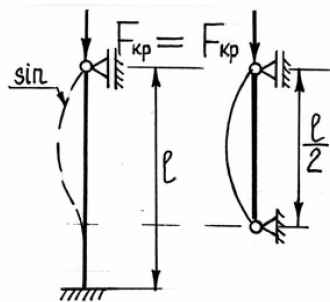
2-й случай

Стержень длиной l , у которого оба конца жестко заделаны. Из сравнения вида изогнутой оси балки для рассматриваемого и основного случаев, а также из соображений симметрии, можем сделать вывод, что средняя часть стержня с заделанными концами, находится в тех же условиях, как и шарнирно опертая балка длиной $l/2$. Таким образом, критическая сила для стержня длиной l с двумя защемленными концами может быть найдена

так же как и для шарнирно опертой балки длиной $l/2$, то есть

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(0,5 \cdot l)^2}.$$

3-й случай



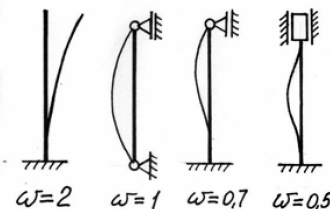
Стержень длиной l , у которого один конец жестко заделан, а другой шарнирно оперт. Из сравнения вида изогнутой оси балки для рассматриваемого и основного случаев, можем сделать вывод, что часть стержня находится в тех же условиях, как и шарнирно опертая балка длиной $0,7 \cdot l$. Таким образом, критическая сила для стержня длиной l с зашечленным и шарнирно опертым концами может быть найдена так же как и для шарнирно опертой балки длиной $0,7 \cdot l$, то есть

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(0,7 \cdot l)^2}.$$

Все полученные выражения можно объединить в одну общую формулу

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\omega \cdot l)^2}, \quad (19.9)$$

где $\omega \cdot l = l_{пр}$ – приведенная длина стержня; l – фактическая длина стержня; ω – коэффициент приведенной длины, показывающий во сколько раз необходимо изменить длину стержня, чтобы критическая сила для этого стержня стала



равна критической силе для шарнирно опертой балки. (Другая интерпретация коэффициента приведенной длины: ω показывает, на какой части длины стержня для данного вида закрепления укладывается одна полуволна синусоиды при потере устойчивости.)

19.4. Критические напряжения. Расчет на устойчивость стержня при упруго-пластических деформациях

Введем понятие критического напряжения, то есть напряжения, соответствующего критической силе при потере устойчивости сжатого стержня

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\omega \cdot l)^2 \cdot A}. \quad (19.10)$$

Вспомним, что $J_{min}/A = i_{min}^2$ – квадрат минимального радиуса инерции. Тогда формулу (19.10) можно записать так:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{\omega \cdot l}{i_{min}}\right)^2}.$$

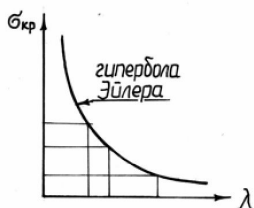
Величина

$$\lambda = \frac{\omega \cdot l}{i_{min}} \quad (19.11)$$

называется г и б к о с т ь ю стержня.

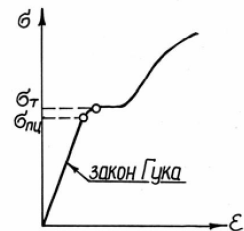
Окончательно получим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}. \quad (19.12)$$



Как видим, критическое напряжение зависит только от упругих свойств материала (модуля Юнга E) и гибкости стержня λ . При этом зависимость между $\sigma_{кр}$ и λ может быть представлена гиперболической кривой, называемой гиперболой Эйлера.

Вывод формулы Эйлера основан на применении дифференциального уравнения упругой линии балки. Поэтому использовать эту формулу можно лишь в том случае, когда деформирование материала протекает в соответствии с законом Гука, то есть пока критическое напряжение не превысит предела пропорциональности $\sigma_{пц}$ (по диаграмме сжатия материала):



$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}.$$

Используя это соотношение, можно найти условие для определения предельной гибкости стержня $\lambda_{пр}$, когда еще возможно применение формулы Эйлера:

$$\lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}}. \quad (19.13)$$

Например, для малоуглеродистых сталей ($E=2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{пц} \approx 200$ МПа) предельная гибкость

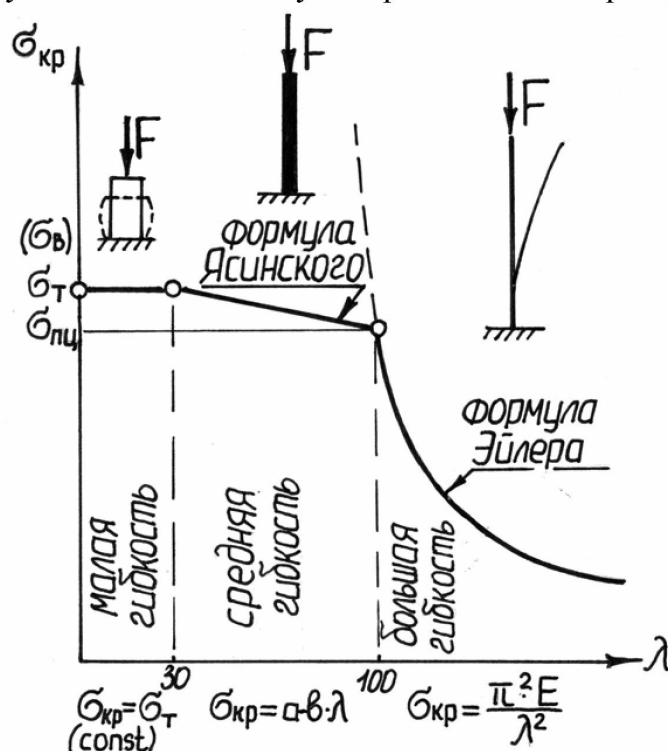
$$\lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Итак, при $\lambda > \lambda_{пр}$ для определения критической силы будем пользоваться формулой Эйлера, если же $\lambda < \lambda_{пр}$, то формула Эйлера становится неприемлемой, так как дает завышенные значения критической силы, то есть всегда переоценивает действительную устойчивость стержней.

Поэтому использование формулы Эйлера для стержней, теряющих устойчивость за пределом пропорциональности не только неправильно, но и опасно.

Теоретическое решение задачи об устойчивости за пределом пропорциональности сложно, поэтому для расчетов на устойчивость в этой области обычно пользуются эмпирическими формулами, полученными в результате обработки большого числа экспериментальных данных.

Прежде всего, выделим стержни с малой гибкостью, у которых $0 < \lambda < \lambda_1 \approx (0,3 \dots 0,4) \cdot \lambda_{пр}$ (для стали). Эти короткие стержни будут выходить из строя главным образом за счет потери прочности, потеря устойчивости в таких случаях, как правило, не наблюдается. Таким образом, для стержней малой гибкости при сжатии проводят обычный расчет на прочность, принимая в качестве предельного напряжения предел текучести σ_T (для пластичных материалов) или предел прочности σ_B (для хрупких материалов). Этому условию соответствует горизонтальная прямая на рисунке.



Для практических (инженерных) расчетов стержней средней гибкости $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_{пр}$ чаще всего используется эмпирическая зависимость, предложенная Ф. С. Ясинским на основе изучения опытных данных (формула Ясинского):

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda,$$

где a и b – эмпирические коэффициенты, зависящие от материала (например, для стали 40: $a=321$ МПа, $b=1,16$ МПа).

Формуле Ясинского на диаграмме критических напряжений соответствует наклонная прямая.

19.5. Определение допускаемых напряжений на устойчивость. Коэффициент понижения напряжений

Как видим, для продольно сжатых стержней необходимо проводить две проверки:

а) проверка на прочность

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \leq [\sigma_-],$$

где $[\sigma_-] = \sigma_o / n_{пр}$ – допускаемое напряжение на сжатие; σ_o – опасное напряжение (предел текучести для пластичных материалов или предел прочности для хрупких); $n_{пр}$ – коэффициент запаса прочности.

б) проверка на устойчивость

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \leq [\sigma_y],$$

где $[\sigma_y] = \sigma_{кр} / n_y$ – допускаемое напряжение на устойчивость; $\sigma_{кр}$ – критическое напряжение на устойчивость; n_y – коэффициент запаса устойчивости.

Отметим, что коэффициент запаса устойчивости (для сталей $n_y = 1,8 \dots 3$) всегда выше коэффициента запаса на прочность ($n_{пр} = 1,4 \dots 1,6$). Это объясняется тем, что коэффициент запаса устойчивости, кроме всего прочего, зависит от таких факторов, как начальная кривизна стержня, эксцентриситет приложения нагрузки, неоднородность материала, которые незначительно влияют на прочность, однако могут вызвать преждевременную потерю устойчивости.

Сравнивая выражения для допускаемых напряжений на устойчивость и прочность, установим связь между этими напряжениями

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{n_y} \cdot \frac{n_{пр}}{\sigma_o} \cdot [\sigma_-].$$

Введем следующее обозначение

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{n_y} \cdot \frac{n_{пр}}{\sigma_o}, \quad (19.14)$$

где φ – коэффициент понижения основного допускаемого напряжения при расчете на устойчивость.

Тогда

$$[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma_-]. \quad (19.15)$$

Коэффициент φ зависит от марки материала и гибкости λ стержня и приводится в справочных таблицах.

Таким образом, окончательно условие устойчивости примет вид

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma_-]. \quad (19.16)$$

Рассмотрим два вида расчета на устойчивость сжатых стержней – проверочный и проектировочный.

Проверочный расчет

Порядок проверочного расчета на устойчивость выглядит так:

- 1) исходя из известных размеров и формы поперечного сечения и условий закрепления стержня, вычисляем гибкость λ ;
- 2) по справочной таблице по известному λ находим коэффициент понижения допускаемого напряжения φ , затем определяем допускаемое напряжение на устойчивость $[\sigma_y]$ (19.15);
- 3) сравниваем максимальное напряжение с допускаемым напряжением на устойчивость по условию (19.16).

Проектировочный расчет

При проектировочном расчете (подобрать сечение под заданную нагрузку) в расчетной формуле (19.16) имеются две неизвестные величины – искомая площадь поперечного сечения A и неизвестный коэффициент φ (так как φ зависит от гибкости стержня, а значит и от неизвестной площади A). Поэтому при подборе сечения обычно приходится пользоваться методом последовательных приближений.

- 1) Обычно в первой попытке принимают $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,6$ и определяют площадь сечения в первом приближении

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma_-]}.$$

- 2) По найденной площади A_1 подбирают сечение и вычисляют гибкость стержня в первом приближении λ_1 . Зная λ , находят новое значение φ_1' .
- 3) Далее, используя найденный φ_1' , проверяют условие устойчивости (19.16), и если σ_{max} и $[\sigma_y]$ (19.15) значительно отличаются друг от друга (более чем на 5 %), следует повторить расчет, приняв во второй попытке

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}.$$

19.6. Замечания о выборе материала и рациональной формы сечения при продольном изгибе

Выбор материала

Так как в формулу Эйлера из всех механических характеристик входит лишь модуль Юнга

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2},$$

то для повышения устойчивости стержней б о л ь ш о й гибкости нецелесообразно применять высокопрочные материалы, так как модуль Юнга для всех марок сталей примерно одинаков.

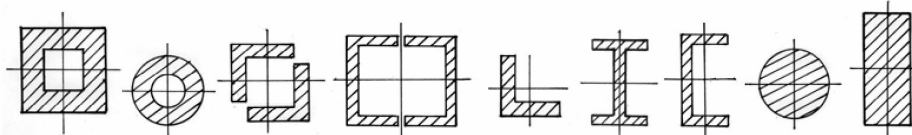
Для стержней м а л о й гибкости применение высокосортных сталей оправдано, так как с повышением предела текучести у таких сталей повышаются и критические напряжения, а значит и запас устойчивости.

Форма сечения

При проектировании стержней, работающих на устойчивость, следует выбрать такую форму сечения, чтобы гибкость стержня была одинаковой относительно обеих главных осей его сечения (условие равноустойчивости), а значит, согласно (19.10), (19.11), максимальный и минимальный моменты инерции такого сечения должны быть одинаковы

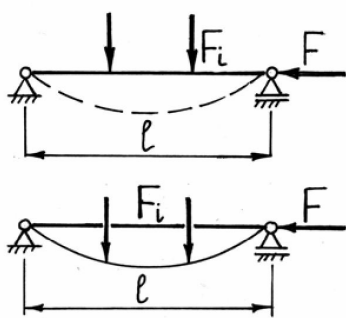
$$J_{\max} = J_{\min}.$$

Кроме того, необходимо стремиться к получению при данной площади наибольших радиусов инерции. Для этого необходимо разместить материал сечения по возможности дальше от центра тяжести (трубчатые, коробчатые сечения).



По степени рациональности известные сечения можно распределить следующим образом: трубчатое сечение, уголок, двутавр, швеллер, квадрат, круг, прямоугольник.

19.7. Продольно-поперечный изгиб



Продольно-поперечный изгиб – это частный случай сложного сопротивления, при котором плоский поперечный изгиб балки сочетается с продольным изгибом от сжимающей нагрузки.

Отметим, что для гибких сжато-изогнутых стержней неприемлем принцип независимости действия сил, поскольку в этом случае сжимающая сила за счет значительных прогибов вызывает в стержне не только равномерное сжатие, но и дополнительный (к поперечному) изгиб. То есть, расчет гибких стержней должен вестись по деформированной схеме.

Получение точного решения рассматриваемой задачи часто вызывает серьезные затруднения, в связи с чем остановимся на приближенных методах решения.

Изгибающий момент в поперечном сечении стержня при продольно-поперечном изгибе можно представить в виде

$$M = M_{\pi} - F \cdot y, \quad (19.17)$$

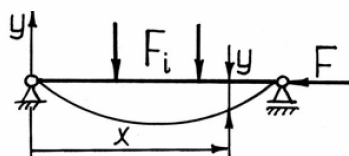
где M_{π} – изгибающий момент, вызванный только поперечной нагрузкой F_i ; F – продольная сжимающая сила.

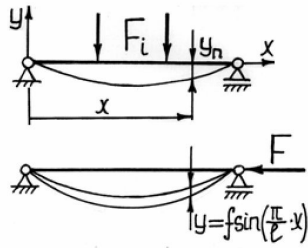
Отсюда видно, что полный момент может быть найден только после того, как найден прогиб стержня, но, с другой стороны, прогиб нельзя найти, не зная момента.

Запишем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot J} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot (M_{\pi} - F \cdot y). \quad (19.18)$$

Представим полный прогиб в виде следующей суммы





$$y = y_{II} + \Delta y, \quad (19.19)$$

здесь y_{II} – прогиб, вызванный только поперечной нагрузкой (без учета продольной силы F); Δy – дополнительный прогиб, появившийся в результате действия сжимающей силы F .

С учетом (19.19), уравнение (19.18) распадается на два уравнения вида:

$$\frac{d^2 y_{II}}{dx^2} = \frac{M_{II}}{E \cdot J}, \quad \frac{d^2(\Delta y)}{dx^2} = -\frac{F \cdot y}{E \cdot J}. \quad (19.20)$$

Предположим, что прогиб Δy , как и в случае (19.6), описывается синусоидой (в этом как раз и заключается приближенность решения)

$$\Delta y = f \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right),$$

тогда

$$\frac{d^2(\Delta y)}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} \cdot f \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \Rightarrow \frac{d^2(\Delta y)}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} \cdot \Delta y.$$

С учетом второго из уравнений (19.20) имеем

$$\frac{\pi^2}{l^2} \cdot \Delta y = \frac{F \cdot y}{E \cdot J}. \quad (19.21)$$

Исходя из (19.19), можем показать, что $\Delta y = y - y_{II}$. В этом случае преобразуем (19.21) к следующему виду

$$y = \frac{y_{II}}{1 - F/F_9}, \quad (19.22)$$

где F_9 – эйлерова сила, которая, согласно (19.8), имеет вид:

$$F_9 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}.$$

Используя совместно (19.22) и (19.17), запишем формулу для определения полного момента при продольно-поперечном изгибе

$$M = M_{II} - \frac{F \cdot y_{II}}{1 - F/F_9}.$$

В этом случае выражение для определения максимального нормального напряжения при продольно-поперечном изгибе можно записать так:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{II}}{W} - \frac{F \cdot y_{II}}{(1 - F/F_9) \cdot W},$$

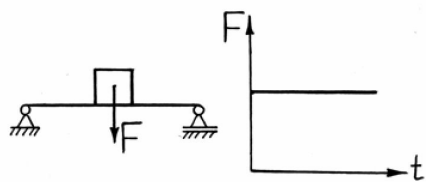
где W – осевой момент сопротивления относительно оси поворота сечений балки при изгибе от поперечной нагрузки в плоскости xOy .

Как видим, нормальные напряжения нелинейно зависят от сжимающей силы и требуют для своего определения знания прогиба балки от поперечных нагрузок y_{II} .

20. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ СИЛ

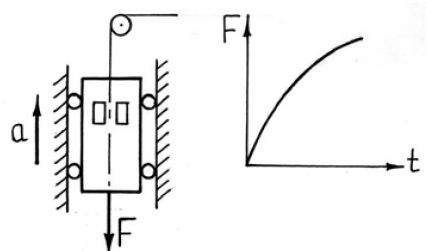
20.1. Основные понятия о динамическом нагружении

Динамические явления играют важнейшую роль в современной технике. Большинство деталей машин сами находятся в движении или подвержены воздействию движущихся элементов конструкции (механизма). При этом, если такое движение равномерное (ускорение равно нулю), расчет на прочность будет *статическим*, при ускоренном движении необходимо провести *динамический* расчет.



Статическая нагрузка – нагрузка, которая весьма медленно возрастает от нуля до своего конечного значения, после чего остается неизменной в течение длительного промежутка времени.

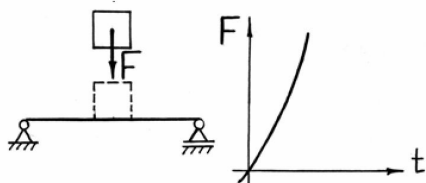
Скорость нарастания деформаций от статической нагрузки невелика, а потому можно пренебречь возникающими при этом силами инерции.



Динамическая нагрузка – нагрузка, которая сопровождается ускорением частиц рассматриваемого тела или соприкасающихся с ним деталей.

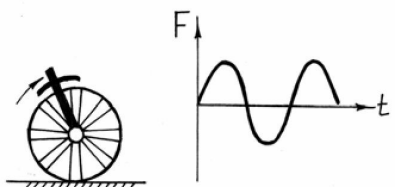
Динамическое нагружение возникает при приложении быстро возрастающих усилий или в случае ускоренного движения исследуемого тела. Во всех этих случаях необходимо учитывать силы инерции и возникающее движение масс системы.

Кроме того, динамические нагрузки можно подразделить на ударные и повторно-переменные.



Ударная нагрузка (удар) – нагружение, при котором ускорения частиц тела резко изменяют свою величину за очень малый промежуток времени (внезапное приложение нагрузки).

Заметим, что, хотя удар и относится к динамическим видам нагружения, в ряде случаев при расчете на удар силами инерции пренебрегают.



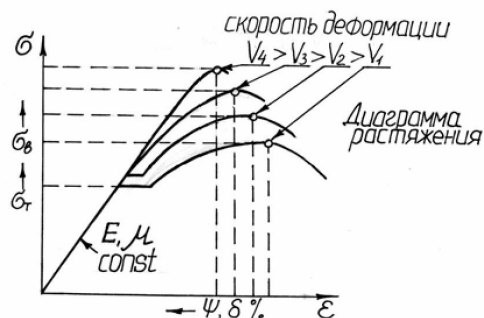
Повторно-переменное (циклическое) нагружение – нагрузки, меняющиеся во времени по величине (а возможно и по знаку).

Таким образом, задачи на динамическое нагружение будем классифицировать следующим образом:

1) задачи с учетом сил инерции (силы инерции не зависят от свойств и деформаций системы);

- 2) расчеты на ударную нагрузку;
- 3) задачи на циклическое нагружение и колебания.

Здесь необходимо отметить, что скорость деформирования заметно влияет на механические свойства материалов. У всех материалов с увеличением скорости деформации повышаются характеристики прочности (предел текучести и предел прочности) и снижаются



характеристики пластичности (относительное удлинение и относительное сужение) – материал становится прочнее и хрупче, упругие характеристики (модуль Юнга и коэффициент Пуассона) практически не изменяются. Такое охрупчивание материала крайне нежелательно и опасно, поэтому при расчетах на прочность при динамическом действии сил допускаемые напряжения принимаются меньше, чем в статических условиях нагружения, – тем самым, повышая коэффициент запаса прочности конструкции.

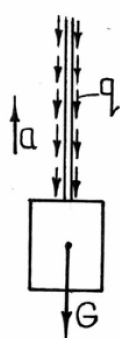
20.2. Вычисление напряжений при равноускоренном движении тела.

Динамический коэффициент

При расчете конструкций на действие динамических нагрузок при ускоренном движении используется известный из курса теоретической механики принцип Даламбера, согласно которому движущуюся с ускорением систему в каждый момент времени можно рассматривать как находящуюся в покое, если к внешним силам, действующим на систему, добавить силы инерции. Далее расчет следует вести так, будто на конструкцию действует статическая нагрузка.

Необходимо при этом учитывать, что силы инерции относятся к объемным силам, так как они непрерывно распределены по всему объему тела.

Пример 1.



В качестве характерного примера рассмотрим задачу о подъеме груза G с постоянным ускорением a , в которой требуется определить напряжения в тросе с учетом его собственного веса q (вес единицы длины троса).

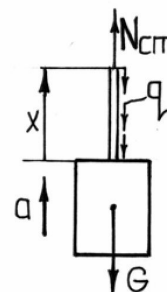
Решение

Решим эту задачу вначале так, как если бы груз находился в покое. Воспользуемся методом мысленных сечений и определим статическое нормальное усилие в тросе:

$$N_{ст} = G + q \cdot x.$$

В этом случае напряжения найдем так:

$$\sigma_{ст} = \frac{N_{ст}}{A} = \frac{G + q \cdot x}{A}.$$



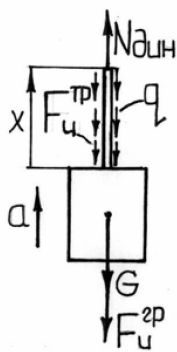
Найдем силы инерции, которые возникнут в системе при ее равноускоренном движении:

а) силы инерции, действующие на груз,

$$F_{и}^{гр} = m_{гр} \cdot a = \frac{G}{g} \cdot a;$$

б) силы инерции, действующие на трос,

$$F_{и}^{тр} = m_{тр} \cdot a = \frac{q \cdot x}{g} \cdot a.$$



Добавим силы инерции к статическим силам, действующим на трос. В этом случае осевое усилие изменится следующим образом:

$$\begin{aligned} N_{дин} &= N_{ст} + F_{и}^{гр} + F_{и}^{тр} = \\ &= G + q \cdot x + \frac{G}{g} \cdot a + \frac{q \cdot x}{g} \cdot a = (G + q \cdot x) \cdot \left(1 + \frac{a}{g}\right). \end{aligned}$$

Динамические напряжения в тросе:

$$\sigma_{дин} = \frac{N_{дин}}{A} = \frac{(G + q \cdot x)}{A} \cdot \left(1 + \frac{a}{g}\right).$$

Введем понятие динамического коэффициента.

Динамический коэффициент – отношение динамического значения некоторого фактора (внутреннего усилия, напряжения, деформации) к соответствующему статическому значению этого фактора

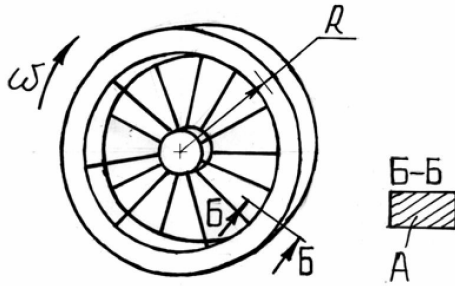
$$k_d = \frac{N_{дин}}{N_{ст}} = \frac{\sigma_{дин}}{\sigma_{ст}}.$$

В рассматриваемой задаче динамический коэффициент найдем в следующем виде:

$$k_d = \frac{\sigma_{дин}}{\sigma_{ст}} = 1 + \frac{a}{g}.$$

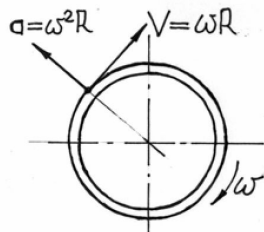
В инженерной практике очень часто прибегают к использованию динамического коэффициента (например, в теории технического удара). В этом случае при определении динамических напряжений достаточно решить соответствующую статическую задачу, а затем полученное решение увеличить на динамический коэффициент. При этом величина коэффициента может быть найдена либо теоретически (как в нашем примере), либо экспериментально, когда расчетное исследование провести затруднительно. Отметим, что найденный нами динамический коэффициент применим для решения целого класса динамических задач, где тело движется в вертикальном направлении с ускорением a .

Пример 2. Расчет вращающегося кольца (обод маховика)



Рассмотрим задачу об определении напряжений в быстро вращающемся кольце (в таких условиях находится обод маховика, колеса и т. д.). Примем следующие обозначения исходных данных: A – площадь поперечного сечения кольца, γ – объемный вес материала кольца, R – средний радиус кольца (толщиной кольца пренебрегаем), ω – угловая скорость вращения (V – окружная скорость точек осевой линии).

Решение

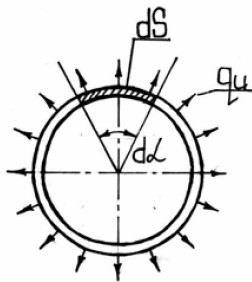


В кольце, вращающемся с постоянной угловой скоростью ω , будет возникать радиальное (центростремительное) ускорение a_R :

$$a_R = \omega^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}.$$

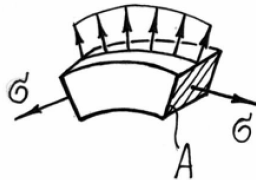
В таком случае обод кольца будет равномерно загружен радиальной инерционной нагрузкой:

$$q_{\text{и}} = m \cdot a_R = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot a_R = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{V^2}{R}.$$



Выделим элемент кольца шириной ds , соответствующий центральному углу $d\alpha$. Составим уравнение равновесия для выделенного элемента, – спроецируем все силы на радиальную ось:

$$\sum F_R = 0 \Rightarrow q_{\text{и}} \cdot ds - 2 \cdot \sigma \cdot A \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} = 0.$$



Подставим в формулу соответствующие величины: $ds = R \cdot d\alpha$, $\sin(d\alpha/2) \approx d\alpha/2$, получим выражение для напряжений

$$\frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot R \cdot d\alpha - 2 \cdot \sigma \cdot A \cdot \frac{d\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{\gamma \cdot V^2}{g}.$$

Условие прочности для материала вращающегося кольца в этом случае запишется так:

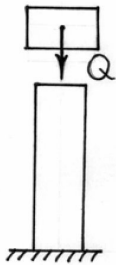
$$\sigma_{\text{max}} = \frac{\gamma \cdot V_{\text{max}}^2}{g} \leq [\sigma].$$

Отсюда можем найти выражение, ограничивающее предельную скорость вращения маховика,

$$V_{\text{max}} \leq \sqrt{\frac{g \cdot [\sigma]}{\gamma}}.$$

21. УДАРНОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ

21.1. Техническая теория удара

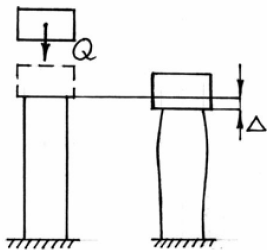


Удар – взаимодействие тел, при котором за очень малый промежуток времени скачкообразно изменяются скорости этих тел и силы взаимодействия между ними.

Удар в реальных конструкциях возникает при соприкосновении деталей, движущихся с разной скоростью.

Отметим, что точная теория удара связана с изучением местных деформаций в окрестности контакта (контактная задача), а также явления волнового распространения деформаций в упругом теле и оказывается сложной задачей.

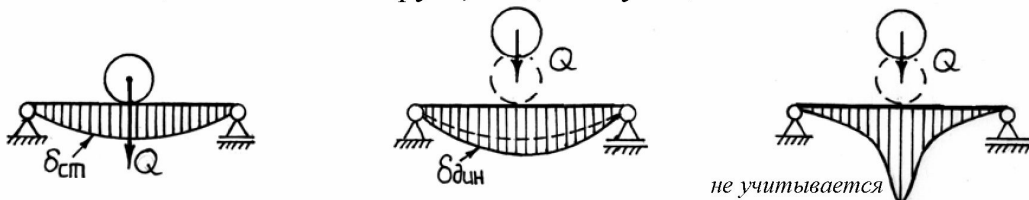
Будем рассматривать приближенную (техническую) теорию удара, основанную на следующих допущениях:



1) удар является неупругим, то есть ударяющее тело не отскакивает от конструкции, а перемещается вместе с ней;

2) предполагается, что напряжения, возникающие в системе от удара, не превышают предела пропорциональности $\sigma_{\text{пл}}$, а потому можно пользоваться законом Гука;

3) предполагается, что эпюра динамических перемещений $\delta_{\text{дин}}$ системы от груза Q при ударе в любой момент времени подобна эпюре перемещений $\delta_{\text{ст}}$, возникающих от этого же груза, но действующего статически.



Таким образом, предполагается, что $\delta_{\text{дин}} = k_{\text{д}} \cdot \delta_{\text{ст}}$, а местные эффекты (см. рисунок) не учитываются.

Рассмотрим систему (двухопорную балку), на которую падает груз весом Q . При этом в результате удара конструкция получит некоторую «динамическую» деформацию $\delta_{\text{дин}}$.

Если тот же груз Q действует на систему статически (груз лежит на балке), то ее деформация будет равна $\delta_{\text{ст}}$.

Динамический коэффициент в этом случае найдем так:

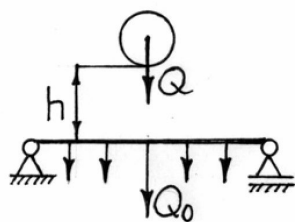
$$k_{\text{д}} = \frac{\delta_{\text{дин}}}{\delta_{\text{ст}}}.$$

Так как в соответствии с законом Гука напряжения прямо пропорциональны деформациям, то можем записать также

$$\sigma_{\text{дин}} = k_{\text{д}} \cdot \sigma_{\text{ст}}.$$

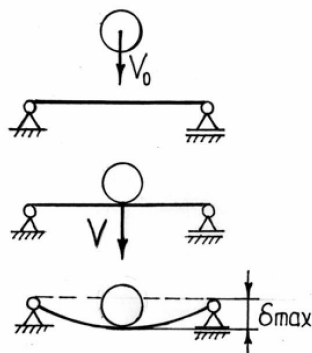
Таким образом, для того чтобы найти напряжения в системе при ударе, необходимо рассмотреть ту же конструкцию, нагруженную теми же силами статически, найти напряжения в элементах конструкции в этом случае, а затем увеличить найденные напряжения на динамический коэффициент.

21.2. Динамический коэффициент при ударе



Определим динамический коэффициент при вертикальном ударе с учетом массы системы. Для этого рассмотрим общий случай удара с учетом массы ударяющего тела ($m=Q/g$, Q – вес ударяющего груза) и распределенной массы конструкции, испытывающей удар ($m_0=Q_0/g$, Q_0 – вес системы).

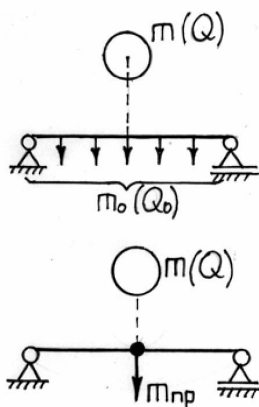
При рассмотрении удара будем различать следующие три момента времени:



- 1) момент непосредственно перед соприкосновением ударяющего груза Q с упругой системой Q_0 , при этом скорость груза равна V_0 , а скорость системы равна нулю;
- 2) момент соприкосновения груза с системой, при этом скорость груза изменяется и равна скорости V движения системы в точке удара;
- 3) момент, когда упругая система получает наибольшее перемещение, а скорости груза и системы становятся равными нулю.

Определение динамического коэффициента будем вести в несколько этапов.

Понятие о приведенной массе ударяемой системы



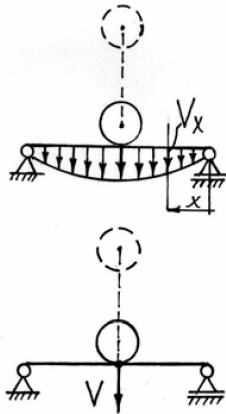
Упругую систему с распределенной массой ($m_0=Q_0/g$, Q_0 – вес системы) удобно мысленно заменить системой, обладающей теми же упругими свойствами, но с приведенной массой $m_{\text{пр}}$, сосредоточенной в точке соударения

$$m_{\text{пр}} = \beta \cdot m_0 = \beta \cdot \frac{Q_0}{g},$$

где β – коэффициент приведения, который зависит от закона изменения скоростей точек системы по ее объему (всегда $\beta < 1$).

Величина коэффициента β определяется по признаку равенства кинетической энергии системы с исходной распределенной массой m_0 и приведенной массой $m_{\text{пр}}$, то есть приведенная масса $m_{\text{пр}}$ при скорости V должна иметь ту же

кинетическую энергию, что и система массой m_0 с учетом неравномерного распределения скоростей ее точек по объему:



$$\frac{m_{np} \cdot V^2}{2} = \int_{m_0} \frac{dm_0 \cdot V_x^2}{2} \Rightarrow \beta \cdot \frac{Q_0}{g} \cdot \frac{V^2}{2} = \int_{Q_0} \frac{dQ_0 \cdot V_x^2}{2 \cdot g}$$

где dQ_0 (dm_0) – вес (масса) произвольной элементарной частицы системы, движущейся в первый момент после удара со скоростью V_x ; V – скорость точки соударения тел.

Таким образом, найдем

$$\beta = \frac{\int V_x^2 \cdot dQ_0}{V^2 \cdot Q_0}.$$

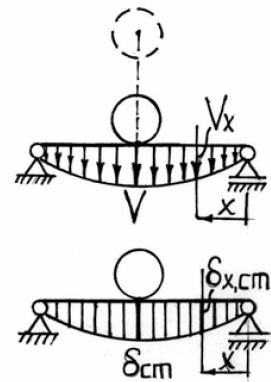
В соответствии с принятыми нами гипотезами, можем записать, что скорости различных точек системы соотносятся так же, как соотносятся перемещения этих точек под действием статически приложенных нагрузок:

$$\frac{V_x}{V} = \frac{\delta_{x,ст}}{\delta_{ст}},$$

где $\delta_{x,ст}$ – статическая деформация произвольной точки системы (движущейся при ударе со скоростью V_x); $\delta_{ст}$ – статическая деформация точки приложения нагрузки (движущейся при ударе со скоростью V).

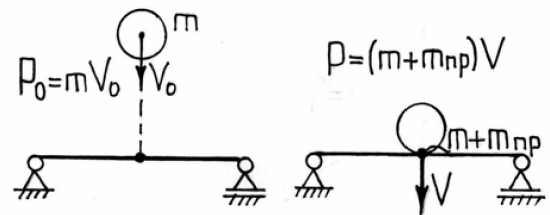
Тогда коэффициент β можно найти так:

$$\beta = \frac{\int \delta_{x,ст}^2 \cdot dQ_0}{\delta_{ст}^2 \cdot Q_0}. \quad (21.1)$$



Скорость движения точки соударения в момент удара

Скорость V точки соударения тел определяется по теореме об изменении количества движения, согласно которой при неупругом ударе количество движения до удара равно количеству движения после удара (см. курс теоретической механики), то есть



$$m \cdot V_0 = (m + m_{np}) \cdot V \Rightarrow$$

$$\frac{Q}{g} \cdot V_0 = \frac{Q + \beta \cdot Q_0}{g} \cdot V \Rightarrow$$

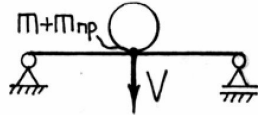
$$V = V_0 \cdot \frac{Q}{Q + \beta \cdot Q_0} = V_0 \cdot \frac{1}{1 + \beta \cdot \frac{Q_0}{Q}}. \quad (21.2)$$

Формула для динамического коэффициента

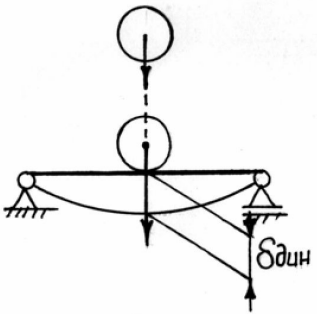
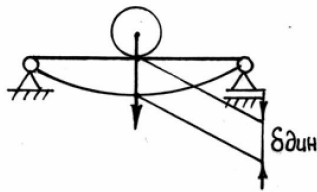
Запишем закон сохранения энергии для системы, испытывающей удар, согласно которому сумма кинетической энергии T системы в момент удара и работы A по перемещению груза Q на величину динамического перемещения $\delta_{\text{дин}}$ должна равняться потенциальной энергии динамической деформации системы

$$T + A = U_{\text{дин}}. \quad (21.3)$$

Найдем кинетическую энергию системы в момент удара:



+



$$T = \frac{(m + m_{\text{пр}}) \cdot V^2}{2} = \frac{Q + \beta \cdot Q}{g} \cdot \frac{V^2}{2}.$$

Подставляя в эту формулу выражение для скорости V из формулы (21.2), получим

$$T = \frac{Q + \beta \cdot Q}{g} \cdot \frac{V_0^2}{2 \cdot \left(1 + \beta \cdot \frac{Q_0}{Q}\right)^2} = \frac{Q}{g} \cdot \frac{V_0^2}{2 \cdot \left(1 + \beta \cdot \frac{Q_0}{Q}\right)}.$$

Работа груза Q на перемещении $\delta_{\text{дин}}$:

$$A = Q \cdot \delta_{\text{дин}}.$$

Найдем потенциальную энергию деформации системы

$$U_{\text{дин}} = \frac{Q_{\text{дин}} \cdot \delta_{\text{дин}}}{2}.$$

Величину динамической нагрузки $Q_{\text{дин}}$ можно определить, зная величину статической нагрузки Q и динамический коэффициент k_d : $Q_{\text{дин}} = k_d \cdot Q$.

Подставляя найденные величины в выражение (21.3) и учитывая, что динамическое перемещение $\delta_{\text{дин}} = k_d \cdot \delta_{\text{ст}}$, получим

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{V_0^2}{2 \cdot \left(1 + \beta \cdot \frac{Q_0}{Q}\right)} + Q \cdot k_d \cdot \delta_{\text{ст}} = \frac{k_d^2 \cdot Q \cdot \delta_{\text{ст}}}{2} \Rightarrow$$

$$k_d^2 \cdot \delta_{\text{ст}} - 2 \cdot k_d \cdot \delta_{\text{ст}} - \frac{V_0^2}{g} \cdot \frac{1}{1 + \beta \cdot \frac{Q_0}{Q}} = 0.$$

Решая полученное квадратичное уравнение, найдем

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g \cdot \delta_{\text{ст}} \cdot \left(1 + \beta \cdot \frac{Q_0}{Q}\right)}}.$$

Если учесть, что груз падает с высоты h , то можем записать

$$V_0^2 = 2 \cdot g \cdot h.$$

Тогда

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{ст} \cdot \left(1 + \beta \cdot \frac{Q_0}{Q}\right)}}. \quad (21.4)$$

Таким образом, для расчета конструкции при ударном нагружении необходимо определить напряжения и деформации в системе, как если бы она была нагружена статической нагрузкой равной по величине нагрузке динамической (ударной). Затем найденные «статические» величины домножаются на динамический коэффициент (21.4):

$$\sigma_d = k_d \cdot \sigma_{ст}; \quad \delta_d = k_d \cdot \delta_{ст}.$$

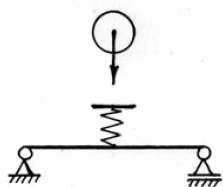
Проанализируем формулу (21.4):

1) Мгновенная нагрузка ($h=0$ или $V_0=0$). При подстановке этих данных в формулу (21.4) получим, что $k_d=2$. То есть, даже если груз мгновенно устанавливается на конструкцию с нулевой высоты или с нулевой скоростью, то напряжения в системе превышают соответствующие статические величины в два раза!

2) Расчет без учета массы груза по сравнению с массой конструкции ($Q_0 \ll Q$, то есть $Q_0/Q \approx 0$). В этом случае формула (21.4) приобретает следующий более простой вид, который наиболее часто используется в расчетной практике:

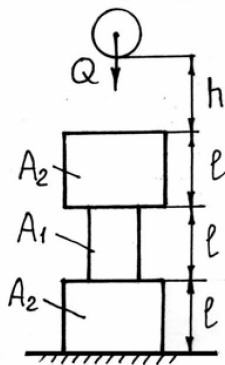
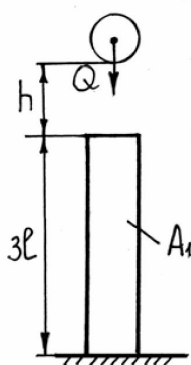
$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{ст}}}. \quad (21.5)$$

3) Способ снижения динамического коэффициента. Как видим из формул (21.4) и (21.5), едва ли не единственным способом снижения динамического коэффициента является увеличение величины $\delta_{ст}$ – деформации конструкции при статическом нагружении. То есть при проектировании конструкций, работающих на удар, необходимо стремиться к увеличению податливости системы путем увеличения длины элементов конструкции, установкой буферных пружин (амортизаторов), замены материала другим, с меньшим модулем упругости («постелить соломку»), выравниванием площадей поперечного сечения.



работающих на удар, необходимо стремиться к увеличению податливости системы путем увеличения длины элементов конструкции, установкой буферных пружин (амортизаторов), замены материала другим, с меньшим модулем упругости («постелить соломку»), выравниванием площадей поперечного сечения.

Пример 1. Продольный удар



Проанализируем ударное воздействие груза весом Q при падении с высоты h на две колонны – ступенчатую с площадями ступеней A_1 и A_2 и длиной каждой из ступеней l , а также равномерную площадью A_1 и длиной $3 \cdot l$.

Необходимо сравнить динамические коэффициенты.

Решение

Рассмотрим статическое (неударное) приложение груза Q к колоннам и найдем статические напряжения и деформации каждой из них.

а) статические значения максимальных напряжений

$$\sigma_{1\text{ст}}^{\max} = \frac{Q}{A_1}; \quad \sigma_{2\text{ст}}^{\max} = \frac{Q}{A_1}.$$

б) статические значения абсолютных деформаций

$$\delta_{1\text{ст}} = \frac{Q \cdot (3 \cdot l)}{E \cdot A_1}; \quad \delta_{2\text{ст}} = \frac{Q \cdot l}{E \cdot A_1} + \frac{Q \cdot (2 \cdot l)}{E \cdot A_2}.$$

Заметим, что $\delta_{1\text{ст}} > \delta_{2\text{ст}}$, так как $A_1 < A_2$.

в) динамический коэффициент по формуле (21.5)

$$k_{1\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{1\text{ст}}}}; \quad k_{2\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{2\text{ст}}}}.$$

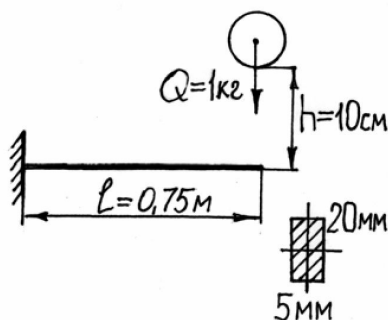
Заметим, что $k_{1\text{д}} < k_{2\text{д}}$, так как $\delta_{1\text{ст}} > \delta_{2\text{ст}}$.

г) динамические значения напряжений и деформаций

$$\sigma_{1\text{д}} = k_{1\text{д}} \cdot \sigma_{1\text{ст}}; \quad \sigma_{2\text{д}} = k_{2\text{д}} \cdot \sigma_{2\text{ст}}; \quad \delta_{1\text{д}} = k_{1\text{д}} \cdot \delta_{1\text{ст}}; \quad \delta_{2\text{д}} = k_{2\text{д}} \cdot \delta_{2\text{ст}}.$$

Как видим, несмотря на то, что первая колонна имеет меньшую площадь сечения, динамические напряжения в ней будут меньше, чем в ступенчатой колонне, так как поглощение энергии удара во втором случае происходит не по всей длине стержня, а на наиболее ослабленном участке.

Пример 2. Ударный изгиб

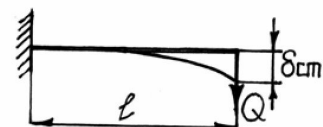


Проанализируем ударное воздействие груза весом $Q=1$ кг при падении с высоты $h=10$ см на консольно закрепленную балку длиной $l=0,75$ м прямоугольного сечения 5×20 мм. Материал балки – сталь, $[\sigma]=160$ МПа.

Необходимо определить динамический коэффициент, напряжения и деформации в балке. Проверить на прочность.

Решение

Рассмотрим статическое (неударное) приложение груза Q к балке и найдем статические напряжения и деформации.



а) наибольшие статические значения напряжений

$$\sigma_{\text{ст}}^{\text{max}} = \frac{Q \cdot l}{W_z} = \frac{10 \cdot 0,75}{\left(\frac{0,005 \cdot 0,02^2}{6} \right)} = 22,5 \text{ МПа}.$$

б) статические значения деформаций конца балки

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{Q \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z} = \frac{10 \cdot 0,75^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot \left(\frac{0,005 \cdot 0,02^3}{12} \right)} = 2,1 \text{ мм}.$$

в) динамический коэффициент по формуле (21.5)

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{0,0021}} = 10,79.$$

г) динамические значения напряжений и деформаций

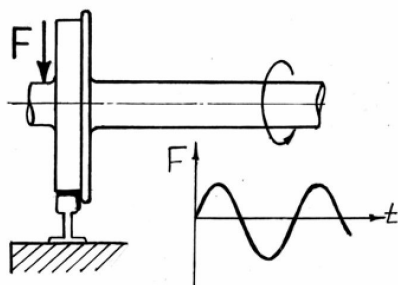
$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \cdot \sigma_{\text{ст}} = 10,79 \cdot 22,5 = 242,74 \text{ МПа} > [\sigma];$$

$$\delta_{\text{д}} = k_{\text{д}} \cdot \delta_{\text{ст}} = 10,79 \cdot 2,1 = 22,7 \text{ мм}.$$

Как видим, динамические значения превышают не только соответствующие статические величины, но и допускаемые значения – прочность не обеспечена!

22. ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ

22.1. Понятие об усталости материалов



К динамическим нагрузкам, несмотря на отсутствие значительных инерционных сил, можно отнести периодические многократно повторяющиеся (циклические) нагрузки, действующие на элементы конструкции. Такого рода нагружения характерны для большинства машиностроительных конструкций, таких, как оси, валы, штоки, пружины, шатуны и т. д.

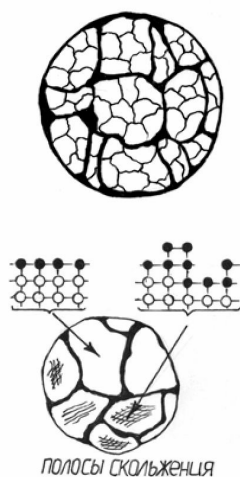
Как показывает практика, нагрузки, циклически изменяющиеся во времени по величине или по величине и по знаку, могут привести к разрушению конструкции при напряжениях, существенно меньших, чем предел текучести (или предел прочности). Такое разрушение принято называть «усталостным». Материал как бы «устает» под действием многократных периодических нагрузок.

Усталостное разрушение – разрушение материала под действием повторно-переменных напряжений.

Усталость материала – постепенное накопление повреждений в материале под действием переменных напряжений, приводящих к образованию трещин в материале и разрушению.

Выносливость – способность материала сопротивляться усталостному разрушению.

Физические причины усталостного разрушения материалов достаточно сложны и еще не до конца изучены. Одной из основных причин усталостного разрушения принято считать образование и развитие трещин.



Механизм усталостного разрушения во многом связан с неоднородностью реальной структуры материалов (различие размеров, очертаний, ориентации соседних зерен металла; наличие различных включений – шлаков, примесей; дефекты кристаллической решетки, дефекты поверхности материала – царапины, коррозия и т. д.). В связи с указанной неоднородностью при переменных напряжениях на границах отдельных включений и вблизи микроскопических пустот и различных дефектов возникает концентрация напряжений, которая приводит к микропластическим деформациям сдвига некоторых зерен металла (при этом на поверхности зерен могут появляться полосы скольжения) и накоплению сдвигов (кото-

рое на некоторых материалах проявляется в виде микроскопических бугорков и впадинок – экструзий и интрузий);



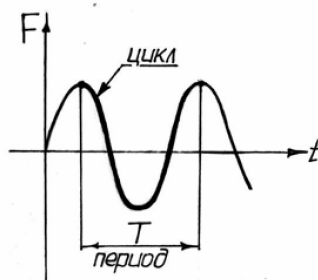
затем происходит развитие сдвигов в микротрещины, их рост и слияние;

на последнем этапе появляется одна или несколько макротрещин, которая достаточно интенсивно развивается (растет). Края трещины под действием переменной нагрузки притираются друг об друга, и поэтому зона роста трещины отличается гладкой (полированной) поверхностью. По мере роста трещины поперечное сечение детали все больше ослабляется, и наконец происходит внезапное хрупкое разрушение детали, при этом зона хрупкого долома имеет грубозернистую кристаллическую структуру (как при хрупком разрушении).

22.2. Основные характеристики циклического нагружения.

Виды циклов нагружения

Усталостная прочность материалов при повторно-переменном нагружении во многом зависит от характера изменения напряжений во времени. При этом далее будем изучать периодические нагрузки.



Периодическая нагрузка – переменная нагрузка с установившимся во времени характером изменения, значения которой повторяются через определенный промежуток (п е р и о д) времени.

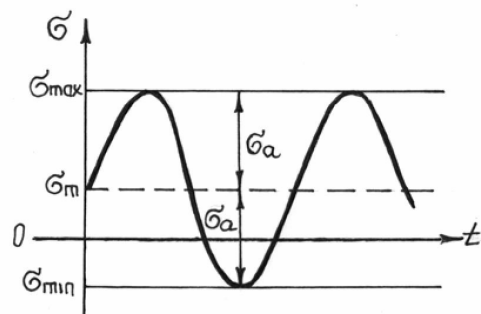
Цикл напряжений – совокупность всех значений переменных напряжений за время одного периода изменения нагрузки.

Цикл напряжений может описываться любым периодическим законом, чаще всего – синусоидальным. Однако прочность материала при циклическом нагружении зависит не от закона изменения напряжений во времени, а в основном от значений наибольшего (максимального, σ_{max}) и наименьшего (минимального, σ_{min}) напряжений в цикле.

Обычно цикл напряжений характеризуется двумя независимыми из следующих основных характеристик (п а р а м е т р о в цикла):

σ_{max} – максимальное напряжение цикла (наибольшее в алгебраическом смысле напряжение цикла);

σ_{min} – минимальное напряжение цикла



(наименьшее в алгебраическом смысле напряжение цикла);

σ_m – среднее напряжение цикла (полусумма наибольшего и наименьшего напряжений цикла)

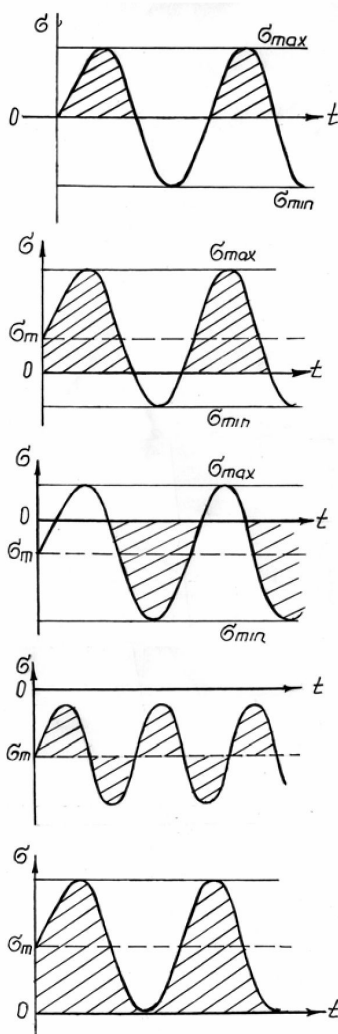
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2};$$

σ_a – амплитудное напряжение цикла (полуразность наибольшего и наименьшего напряжений цикла)

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2};$$

R – коэффициент асимметрии цикла напряжений (отношение наименьшего и наибольшего напряжений цикла)

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}.$$



В зависимости от величины перечисленных характеристик циклы напряжений могут быть подразделены на следующие основные типы:

симметричный цикл – максимальное и минимальное напряжения равны по абсолютной величине и противоположны по знаку

$$\sigma_{max} = -\sigma_{min}, R=-1;$$

асимметричный цикл – максимальное и минимальное напряжения не равны по абсолютной величине ($\sigma_{max} \neq -\sigma_{min}$), при этом асимметричный цикл может быть знакопеременным или знакопостоянным;

знакопеременный цикл – максимальное и минимальное напряжения не равны по абсолютной величине и противоположны по знаку ($\sigma_{max} \neq -\sigma_{min}$, $R < 0$, $R \neq -1$);

знакопостоянный цикл – максимальное и минимальное напряжения не равны по абсолютной величине и имеют одинаковый знак ($\sigma_{max} \neq -\sigma_{min}$, $R > 0$, $R \neq 1$);

отнулевой (пульсирующий) цикл – максимальное или минимальное напряжения равны нулю ($\sigma_{min}=0$ или $\sigma_{max}=0$, $R=0$ или $R=\infty$);

Циклы с одинаковым коэффициентом асимметрии R называют подобными. R меняется от $+\infty$ до -1 .

22.3. Кривая усталости (кривая Вёлера). Предел выносливости

Теперь, в дополнение к уже известным нам механическим характеристикам материала, введем некоторые новые, связанные со спецификой циклического нагружения. Эти характеристики могут быть определены путем специально поставленных экспериментов – испытаний на усталость (выносливость).

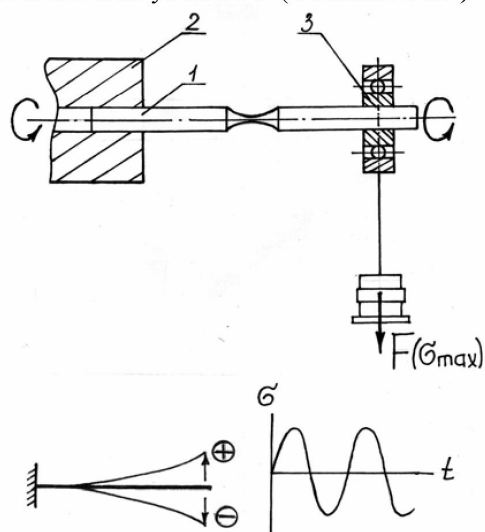
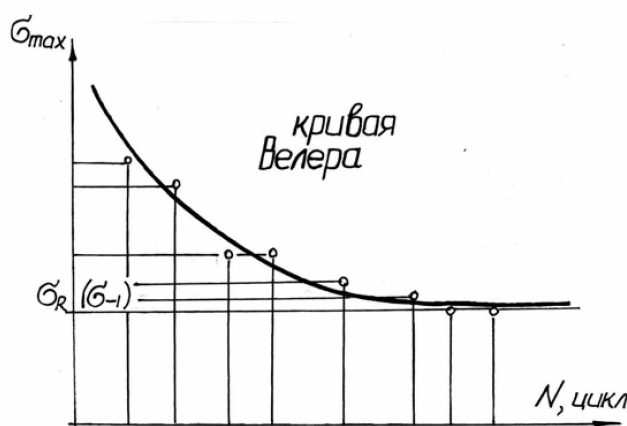


Схема простейшей машины для испытаний на усталость выглядит следующим образом: образец 1 устанавливается в патроне 2 машины, который вращается с определенной скоростью; на другом конце образца устанавливается подшипник 3, через который передается поперечная сила F , изгибающая образец. При вращении образца в его наружных волокнах будут возникать то растягивающие, то сжимающие напряжения (симметричный цикл). Такое циклическое нагружение приводит, в конце концов, к разрушению образца, после чего машина автоматически оста-

навливается, а специальный счетчик фиксирует число циклов (число оборотов образца) до разрушения образца.

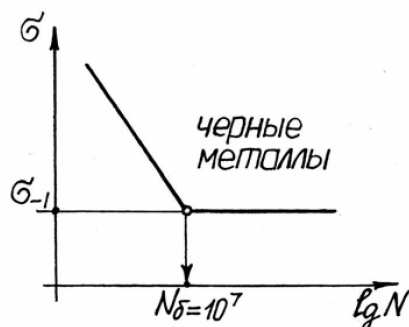
Обработка результатов усталостных испытаний обычно сопровождается построением кривой усталости¹. Кривую усталости строят по точкам в координатах: число циклов N – максимальное по модулю напряжение $\sigma = \sigma_{max}$ или в координатах $(\sigma, \lg N)$, $(\lg \sigma, \lg N)$. Каждому разрушившемуся образцу на диаграмме соответствует одна точка с координатами N (число циклов до разрушения данного образца) и σ_{max} (максимальное по абсолютной величине напряжение цикла при испытании).



Кривая усталости показывает, что с увеличением числа цикла максимальное напряжение, при котором происходит разрушение материала, значительно уменьшается. При этом для многих материалов, например углеродистой стали, можно установить такое наибольшее напряжение цикла, при котором образец не разрушается после любого числа

¹ Кривая усталости часто называется кривой Вёлера – по имени немецкого ученого, инженера, создавшего одну из первых машин для испытаний на усталость и ставшего основоположником учения об усталости материалов.

циклов (горизонтальный участок диаграммы), называемое пределом выносливости (σ_R).



Предел выносливости (усталости) σ_R – наибольшее (предельное) напряжение цикла, при котором не происходит усталостного разрушения образца после произвольно большого числа циклов.

Обозначение предела выносливости для симметричного цикла – σ_{-1} , для отнулевого – σ_0 .

Так как испытания нельзя проводить бесконечно большое время, то число циклов ограничивают некоторым пределом, который называют базовым числом циклов. В этом случае, если образец выдерживает базовое число циклов, то считается, что напряжение в нем не выше предела выносливости.



Для черных металлов базовое число циклов $N_\delta = 10^7$.

Кривые усталости для цветных металлов не имеют горизонтальных участков. Поэтому для них база испытаний увеличивается до $N_\delta = 10^8$ и устанавливается предел ограниченной выносливости (σ_{-1N}) для данной базы испытаний.

22.4. Предел выносливости при асимметричном цикле

Испытания при симметричном цикле (при $R = -1$) оказываются наиболее простыми с точки зрения их реализации. Однако в реальных конструкциях подавляющее число деталей работает при асимметричном нагружении. Поэтому, чтобы обеспечить корректность расчета, необходимы сведения о пределах выносливости для любой асимметрии цикла.

В расчетной практике обычно пользуются двумя типами диаграмм: диаграммой предельных напряжений и диаграммой предельных амплитуд.

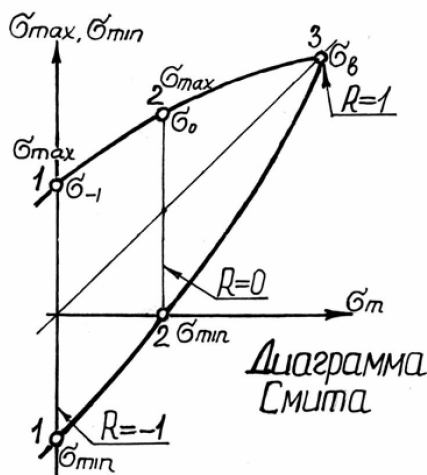


Диаграмма предельных напряжений [диаграмма Смита (Smith)]

Диаграмма Смита строится, как минимум, по трем режимам нагружения (по трем точкам), для каждого из которых определяют предел выносливости σ_R :

первый режим (точка 1) – обычный симметричный цикл нагружения ($R = -1$, $\sigma_m = 0$,

$\sigma_{max} = \sigma_{-1}$, $\sigma_{min} = -\sigma_{-1}$);

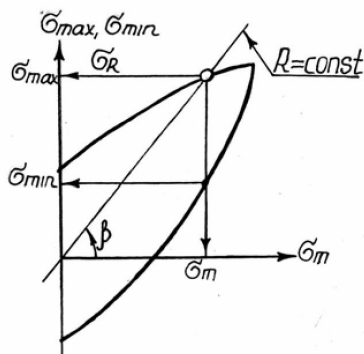
второй режим (точка 2) – асимметричный цикл, как правило, отнулевой ($R = 0$, $\sigma_m = \sigma_0/2$, $\sigma_{max} = \sigma_0$, $\sigma_{min} = 0$);

третий режим (точка 3) – простое статическое растяжение ($R=1$, $\sigma_{max}=\sigma_{min}=\sigma_m=\sigma_B$).

Полученные точки соединяем плавной линией (1–2–3), ординаты точек которой соответствуют пределам выносливости материала при различных значениях коэффициента асимметрии цикла.

Легко показать, что луч, проходящий под углом β через начало координат диаграммы предельных напряжений, характеризует циклы с одинаковым коэффициентом асимметрии R :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_m} = \frac{2 \cdot \sigma_{max}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{2}{1+R}.$$

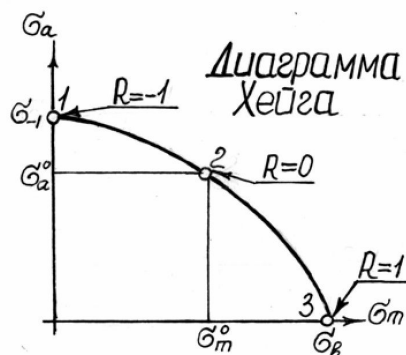


Тогда, для определения предела выносливости при заданной асимметрии цикла R нужно по приведенной формуле вычислить величину угла β и провести луч под этим углом до пересечения с линией 1–2–3, ордината точки пересечения и даст нам искомый предел выносливости σ_R .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{min} .

Диаграмма предельных амплитуд [диаграмма Хейга (Haigh)]

Диаграмма Хейга строится в координатах: среднее напряжение цикла σ_m – амплитуда цикла σ_a . При этом для ее построения необходимо провести усталостные испытания так же, как минимум, для трех режимов: 1 – симметричный цикл нагружения ($R=-1$, $\sigma_a=\sigma_{-1}$, $\sigma_m=0$); 2 – отнулевой цикл ($R=0$, $\sigma_a=\sigma_m=\sigma_0/2$); 3 – статическое растяжение ($R=1$, $\sigma_a=0$, $\sigma_m=\sigma_B$).

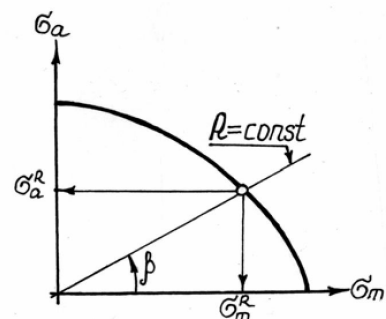


Соединяя экспериментальные точки (1, 2, 3) плавной кривой, получим график, характеризующий зависимость между значениями предельных амплитуд и значениями предельных средних напряжений в цикле.

Здесь также можем провести луч, характеризующий циклы с одинаковой асимметрией:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{1-R}{1+R}.$$

Тогда, для определения предела выносливости при заданной асимметрии цикла R нужно по приведенной формуле вычислить величину угла β и провести луч под этим углом до пересечения



с линией 1-2-3, ордината точки пересечения даст нам величину предельной амплитуды σ_a и значение предельного среднего напряжения σ_m в цикле. Предел выносливости σ_R найдем в виде

$$\sigma_R = \sigma_m + \sigma_a.$$

22.5. Факторы, влияющие на усталостную прочность материалов

На величину предела выносливости образцов и деталей, изготовленных из одного и того же материала, кроме характеристик цикла нагружения влияет целый ряд различных факторов. Многочисленные эксперименты, проведенные с образцами различных форм и размеров, а также практика эксплуатации деталей машин показывают, что предел выносливости конкретной детали в значительной степени зависит от ее формы и размеров, от состояния поверхности и других обстоятельств.

Стандартные испытания на выносливость проводят на специальных лабораторных образцах диаметром 5...10 мм, имеющих строго цилиндрическую форму рабочей части и высокую чистоту поверхности. Очевидно, что предел выносливости реальной детали, изготовленной из того же материала, будет заметно отличаться от предела выносливости лабораторного образца.

Падение предела выносливости конкретной детали ($\sigma_{-1д}$) по сравнению с пределом выносливости лабораторного образца (σ_{-1}) учитывается в расчетах при помощи коэффициента K , который называется коэффициентом снижения предела выносливости и отражает влияние основных факторов на сопротивление усталости:

$$\sigma_{-1д} = \frac{\sigma_{-1}}{K}.$$

Коэффициент K рекомендуется (ГОСТ 25.504–82) определять по следующей формуле:

$$K = \left(\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V \cdot K_A}.$$

Коэффициенты, входящие в выражение для K , учитывают влияние на усталостную прочность следующих факторов:

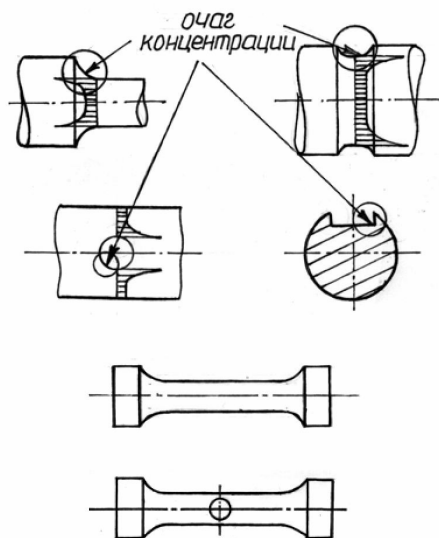
- концентрация напряжений (K_σ);
- масштабный фактор, то есть влияние абсолютных размеров детали ($K_{d\sigma}$);
- качество обработки поверхности ($K_{F\sigma}$);
- эксплуатационные факторы (температура, коррозия, частота нагружения, радиационное облучение и т. д.);
- наличие поверхностного слоя, упрочненного различными технологическими методами (K_V);
- анизотропия (неоднородность) прочностных свойств материала (K_A).

Далее коротко рассмотрим влияние данных факторов на предел выносливости и способы определения соответствующих коэффициентов.

Влияние концентрации напряжений

Концентрация напряжений, вызванная резким изменением сечения детали, представляется наиболее важным фактором, снижающим предел выносливости. На практике концентра-

торами напряжений являются шпоночные канавки, отверстия в детали, выточки, нарезки на поверхности, резьбы, малые радиусы закругления в местах резкого изменения размеров детали и т. д. Концентрация напряжений при циклическом нагружении вызывает в зоне очага концентрации зарождение и рост усталостной трещины и последующее усталостное разрушение материала.



Влияние концентраторов напряжений на предел выносливости учитывается эффективным (действительным) коэффициентом концентрации напряжений, который представляет собой отношение предела выносливости образца без концентрации напряжений к пределу выносливости образца тех же размеров, но с концентратором напряжений:

$$K_{\sigma} = \sigma_{-1} / \sigma_{-1к}.$$

Эффективные коэффициенты концентрации обычно устанавливаются экспериментальным путем, однако при отсутствии опытных данных для их вычисления можно пользоваться следующими формулами:

$$K_{\sigma} = 1 + q \cdot (a_{\sigma} - 1),$$

где q – коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений, который зависит от свойств материала: чем хрупче материал, тем чувствительнее он к концентрации напряжений, тем больше величина q (для высокопрочных сталей $q \approx 1$; для углеродистых сталей $q = 0,6 \dots 0,8$; для чугуна $q \approx 0$ – из-за наличия внутренних концентраторов в виде включений графита); a_{σ} – теоретический коэффициент концентрации напряжений, который зависит только от формы концентратора, определяется либо расчетным путем (методами теории упругости), либо экспериментально (тензометрией, оптическими методами и т. д.) и приводится в справочных таблицах.

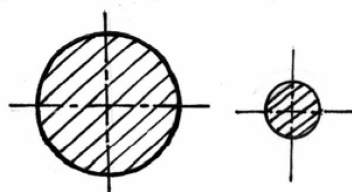
В последнее время применяется более современная методика расчета коэффициента K_{σ} (ГОСТ 25.504–82), согласно которой

$$K_{\sigma} = a_{\sigma} / n, \quad n = 1 + \sqrt{G} \cdot 10^{-(0,33 + \sigma_T / 712)},$$

где G – относительный градиент (перепад) напряжений (мм^{-1}), который (как и a_{σ}) определяется расчетным или опытным путем и приводится в справочниках; σ_T – предел текучести материала (МПа).

Влияние масштабного фактора

Экспериментально установлено, что с увеличением размеров образца его предел выносливости уменьшается. При этом в качестве причин проявления масштабного фактора можно указать следующие: 1) статистический фактор – большая вероятность появления дефектов



в структуре образцов больших размеров; 2) технологический фактор – ухудшение структуры и свойств поверхностного слоя при механической обработке крупногабаритных деталей; 3) металлургический фактор – ухудшение качества

заготовки с увеличением ее размеров (литейные дефекты, дефектыковки и т. д.).

Влияние абсолютных размеров детали на предел выносливости материала учитывается масштабным коэффициентом, который представляет собой соотношение между пределом выносливости σ_{-1} лабораторных образцов (диаметром 6...10 мм) и пределом выносливости геометрически подобных образцов (или деталей) больших размеров σ_{-1d} , то есть

$$K_{d\sigma} = \sigma_{-1d} / \sigma_{-1}.$$

Масштабные коэффициенты устанавливаются экспериментальным путем, при отсутствии опытных данных для их вычисления рекомендуется пользоваться следующими формулами:

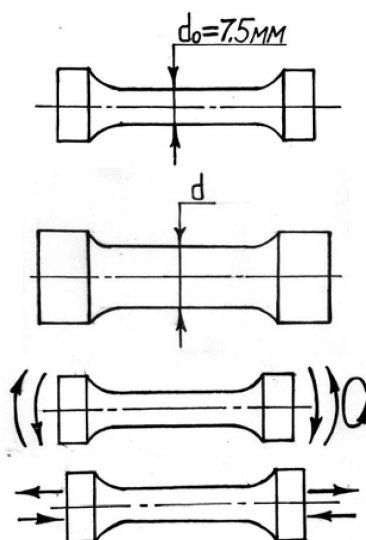
$$K_{d\sigma} = 1 - (1 - \sigma_{-1}^p / \sigma_{-1}) \cdot 0,77 \cdot \lg(d/d_0), \text{ при } d \leq 150 \text{ мм};$$

$$K_{d\sigma} = \sigma_{-1}^p / \sigma_{-1}, \text{ при } d > 150 \text{ мм},$$

где σ_{-1} – предел выносливости лабораторного образца диаметром $d_0 = 7,5$ мм при циклическом изгибе с вращением;

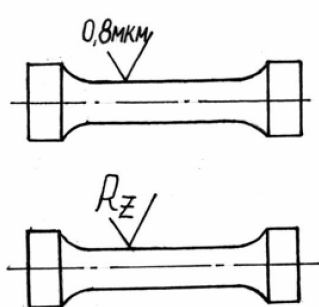
σ_{-1}^p – предел выносливости лабораторного образца диаметром $d_0 = 7,5$ мм при циклическом растяжении-сжатии;

d – диаметр рассчитываемой детали (образца).



Влияние качества обработки поверхности

Усталостные трещины, как правило, начинаются от поверхности детали. Поэтому состояние поверхностного слоя оказывает существенное влияние на прочность при переменных напряжениях. Микронеровности (риски, шероховатость) от механической обработки, повреждения поверхности (царапины, прижоги) и т. п. являются источниками концентрации напряжений и могут вызвать весьма значительное снижение предела выносливости.



Влияние качества поверхности на предел выносливости материала учитывается коэффициентом качества поверхности, который представляет собой соотношение между пределом выносливости σ_{-1} лабораторных образцов с полированной поверхностью и пределом выносливости геометрически подобных образцов с заданной шероховатостью $\sigma_{-1(Rz)}$, то есть

$$K_{F\sigma} = \sigma_{-1(Rz)} / \sigma_{-1}.$$

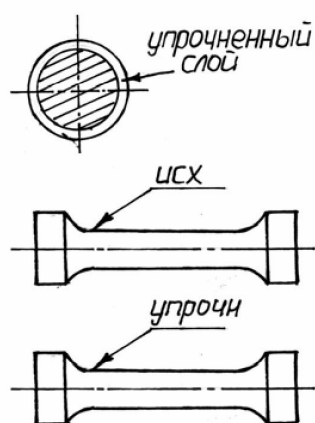
При отсутствии опытных данных для вычисления $K_{F\sigma}$ рекомендуется пользоваться следующими формулами:

$$K_{F\sigma} = 1 - 0,22 \cdot (\lg(\sigma_b/20) - 1) \cdot \lg Rz, \text{ при } Rz > 1 \text{ мкм};$$

$$K_{F\sigma} = 1, \text{ при } Rz \leq 1 \text{ мкм},$$

$\sigma_{-1(Rz)}$ – предел выносливости образца с шероховатостью Rz .

влияние методов поверхностного упрочнения



Применение методов поверхностного упрочнения приводит в ряде случаев к значительному повышению пределов выносливости (в 2–3 раза и более), что связано с формированием в поверхностном слое упрочненной детали сжимающих остаточных напряжений и повышением твердости поверхности.

Повышение предела выносливости вследствие поверхностного упрочнения характеризуется коэффициентом

$$K_V = \sigma_{-1(\text{упр})} / \sigma_{-1}$$

$\sigma_{-1(\text{упр})}$ – предел выносливости упрочненного образца.

22.6. Поверочный расчет при циклическом нагружении

В большинстве случаев расчеты на прочность деталей, работающих при переменных напряжениях, выполняют как *п о в е р о ч н ы е*, то есть проверяется запас циклической прочности готовой детали. При этом проекторочный расчет детали, служащий для определения ее размеров, выполняется приближенно без учета переменности напряжений, но по пониженным допускаемым напряжениям.

При поверочном расчете определяют коэффициенты запаса прочности для одного или нескольких предположительно опасных сечений готовой детали, а затем сравнивают эти коэффициенты с допускаемыми. В этом случае условие прочности при поверочном расчете выглядит следующим образом:

$$n \geq [n].$$

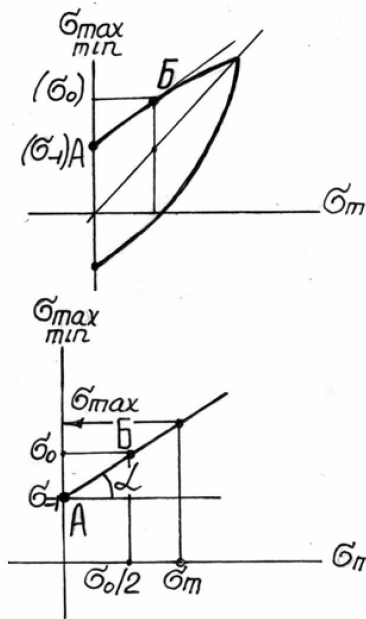
Величина допускаемого коэффициента запаса прочности зависит от целого ряда факторов, основными из которых являются: 1) достоверная точность определения усилий и напряжений; 2) однородность структуры материала; 3) технология и культура изготовления детали; 4) условия работы детали и степень ее ответственности.

В зависимости от этих условий можно выделить три группы значений допускаемого коэффициента запаса прочности при расчетах на выносливость:

1-я группа $[n]=1,3 \dots 1,5$ – назначается при повышенной точности теоретического и экспериментального определения усилий и напряжений для деталей, изготовленных из однородного материала при качественной технологии и высокой культуре производства;

2-я группа $[n]=1,5 \dots 2$ – назначается при недостаточно полном объеме экспериментальной информации о нагрузках и прочности детали, при среднем уровне технологии изготовления, но в условиях систематического дефектоскопического контроля;

3-я группа $[n]=2...3$ – назначается при малом объеме или отсутствии экспериментальной информации и низком уровне производства.



Рассмотрим процедуру определения коэффициентов запаса прочности с использованием диаграммы Смита.

С достаточной степенью точности диаграмму предельных напряжений, построенную для лабораторного образца, можно аппроксимировать прямой линией, проходящей через две точки – точку А, соответствующую пределу выносливости при симметричном цикле $(0, \sigma_{-1})$, и точку В, соответствующую пределу выносливости при отнулевом цикле $(\sigma_0/2, \sigma_0)$, уравнение которой запишется в следующем виде:

$$\sigma_{max} = \sigma_{-1} + \sigma_m \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

где σ_m – текущие средние напряжения цикла; σ_{max} – текущие предельные напряжения цикла;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\sigma_0/2}.$$

Тогда можем записать

$$\sigma_{max} = \sigma_{-1} + \left(1 - \frac{2 \cdot \sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \cdot \sigma_m.$$

Введем понятие коэффициента влияния асимметрии цикла:

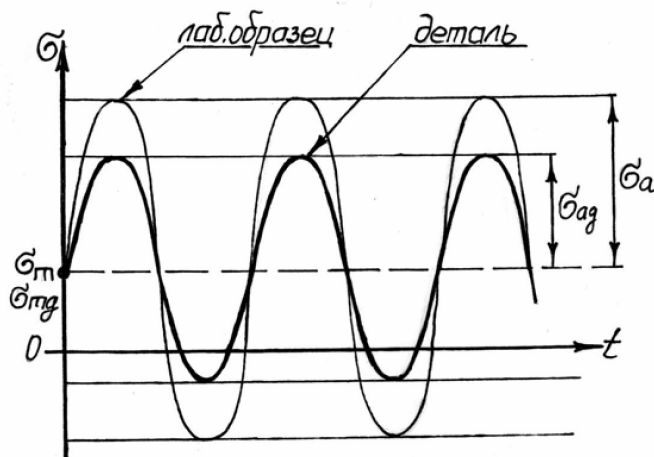
$$\psi_\sigma = \frac{2 \cdot \sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}.$$

Тогда предельные напряжения цикла найдем следующим образом:

$$\sigma_{max} = \sigma_{-1} + (1 - \psi_\sigma) \cdot \sigma_m.$$

В этом случае предельная амплитуда напряжений для лабораторных образцов может быть определена так

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \cdot \sigma_m.$$



Предельная амплитуда цикла для реальной детали $\sigma_{ад}$, очевидно, отличается от предельной амплитуды σ_a для лабораторного образца в K раз (для одного и того же среднего напряжения цикла, то есть при $\sigma_m = \sigma_{мд}$):

$$\sigma_{ад} = \frac{\sigma_a}{K} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \cdot \sigma_{мд}}{K} = \sigma_{-1д} - \psi_{\sigmaд} \cdot \sigma_{мд},$$

где $\psi_{\sigmaд} = \psi_{\sigma}/K$, $\sigma_{-1д} = \sigma_{-1}/K$ – соответственно коэффициент влияния асимметрии цикла и предел выносливости рассчитываемой детали.

Под коэффициентом запаса прочности будем понимать отношение предельных значений напряжений для данной детали к рабочим (действующим в реальных условиях эксплуатации), а именно

$$n_{\sigma} = \sigma_{ад} / \sigma_a^{раб} = \sigma_{мд} / \sigma_m^{раб} = \sigma_{макд} / \sigma_{мак}^{раб}.$$

То есть n_{σ} показывает во сколько раз рабочие напряжения, возникающие в детали в ходе ее эксплуатации, меньше предельно допустимых для данной детали величин циклических напряжений.

В этом случае можем записать

$$n_{\sigma} \cdot \sigma_a^{раб} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \cdot (n_{\sigma} \cdot \sigma_m^{раб})}{K},$$

отсюда

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K \cdot \sigma_a^{раб} + \psi_{\sigma} \cdot \sigma_m^{раб}}.$$

Если деталь подвергается действию циклических касательных напряжений (например, при кручении), коэффициент запаса выносливости найдем по аналогии

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K \cdot \tau_a^{раб} + \psi_{\tau} \cdot \tau_m^{раб}}.$$

При одновременном действии и нормальных, и касательных напряжений (при плоском напряженном состоянии) коэффициент запаса выносливости найдем в виде

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}.$$