ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КАСТИЛИАНО ПРИ РЕШЕНИИ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ЗАДАЧ

Методические указания к решению задач

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При изучении курса сопротивления материалов студенты часто решают статически неопределимые задачи, которые представляют большой интерес с практической точки зрения. Именно способностью статически неопределимых систем воспринимать большую нагрузку по сравнению со статически определимыми системами, сохраняя при этом прочность и жесткость конструкции, объясняется их широкое распространение в технике. Особенностью решения статически неопределимых задач является составление наряду с уравнениями статики и уравнений совместности деформаций, что вызывает у студентов определенные трудности. Можно избежать написания этих уравнений, если применить теорему Кастилиано. В методических разработках приведено теоретическое обоснование применения теоремы Кастилиано при решении статически неопределимых задач и на конкретных примерах показана эффективность этого метода.

Авторы возлагают надежду, что данные разработки будут способствовать повышению знаний и активности студентов при изучении курса сопротивления материалов. При этом предполагается, что студенты знакомы с понятием статически определимых и статически неопределимых систем, условиями равновесия плоской и пространственной систем сил, а также с методом сечений, применяемым для определения внутренних усилий.

1. Теоретическая основа метода

Один из способов решения статически неопределимых задач - это составление уравнений равновесия и составление дополнительных уравнений. Эти дополнительные уравнения записываются на основании одного общего принципа, они должны выразить условия совместности деформаций системы. Для дальнейшего разъяснения возьмем числовой пример.

Задача 1. Дана статически неопределимая стержневая система, представленная на рис. 1а. Невесомая абсолютно жесткая балка OB (деформацией которой, при перемещении, пренебрегаем) соединена со стержнями CA (стержень 1) и BK (стержень 2), шарнирно закреплена в точке O и нагружена силой P. Длина и жесткость каждого стержня соответственно L и EF. Определить усилия в стержнях 1 и 2.

Решение. Для определения усилий в стержнях 1 и 2 применяют метод сечений. Стержни 1 и 2 мысленно разрезаем плоскостью перпендикулярной оси стержня, отбрасываем верхнюю часть, а в местах разреза прикладываем неизвестные внутренние усилия N_1 и N_2 (рис. 1б). Записываем уравнение статики - уравнение моментов относительно шарнира в точке O:

$$N_2 2aCOS\alpha + N_1 a - P2a = 0$$

или

$$2N_2 COS\alpha + N_1 = 2P. \qquad (1)$$

Получили одно уравнение равновесия с двумя неизвестными N_1 и N_2. Два других уравнения равновесия: сумма сил относительно осей $\sum X=0$ и $\sum Y=0$ применять не целесообразно, так как в них войдут две неизвестные реакции в шарнире O. Таким образом, задача является один раз статически неопределимой, то есть не может быть решена с помощью только одних уравнений равновесия. Поэтому необходимо рассмотреть деформации стержней, то есть составить уравнение совместности деформаций. С этой целью строят диаграмму перемещений представленную на рис. 1в.

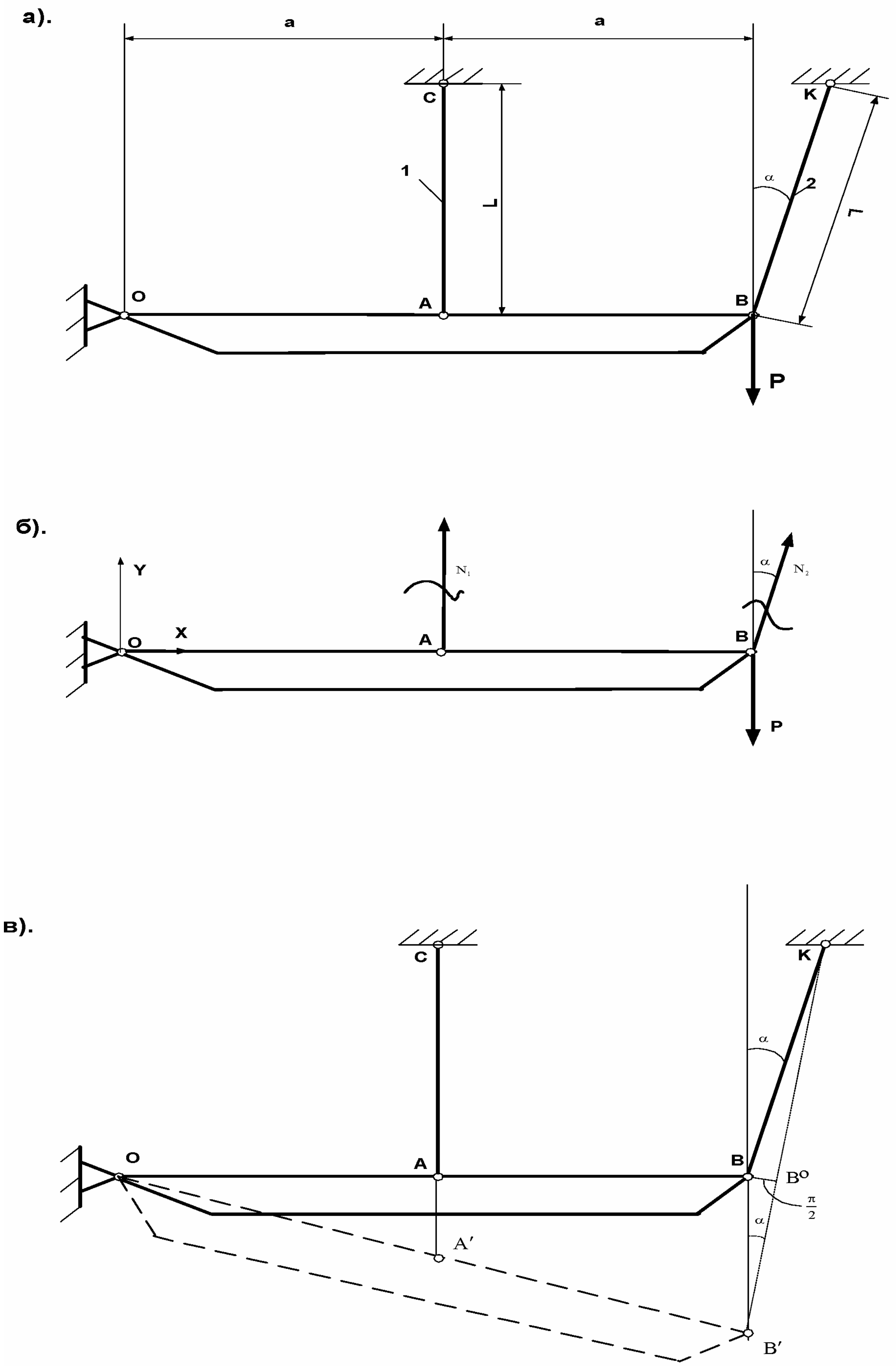

Рис. 1.

Под действием силы P балка OAB поворачивается как жесткое целое и занимает положение OA'B'. Точки A и B, таким образом, перемещаются по дугам окружностей радиусами OA и OB. Используя принцип малых перемещений, считают, что точки A и B смещаются по перпендикулярам, восстановленным к OB соответственно в точки A' и B' (рис.1в).

Очевидно, что

$$AA' = \Delta L_1 . \tag{2}$$

Легко видеть, что

$$B'B_0 = \Delta L_2 , \tag{3}$$

так как угол

$$BB_0B' = \frac{\pi}{2} .$$

Из подобия треугольников OOB' и OAA' имеем:

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{BO}{AO} = 2 . \tag{4}$$

Кроме того, из треугольника BB_0B' получаем:

$$BB' = \frac{B'B_0}{COS\alpha} = \frac{\Delta L_2}{COS\alpha} . \tag{5}$$

Из соотношений (2)-(5) следует:

$$\Delta L_2 = 2\Delta L_1 COS\alpha , \tag{6}$$

далее учитывая, что

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{EF} ,$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{EF} , \tag{7}$$

из выражений (6) и (7) имеем

$$N_2 = 2N_1 COS\alpha . \tag{8}$$

Решая совместно уравнения (1) и (8) находим:

$$N_1 = \frac{2P}{(1 + 4COS^2\alpha)} ,$$

$$N_2 = \frac{4PCOS\alpha}{(1 + 4COS^2\alpha)} . \tag{9}$$

Однако решение выше рассмотренным способом для некоторых статически неопределимых систем, сопряжено с известными трудностями. Последние главным образом связаны со сложностью написания уравнений совместности деформаций. Такой способ решения привел бы, несомненно, к громоздким выкладкам. Примеры таких систем представлены на рис. 6а и 7а. Трудности в написании уравнений совместности деформаций могут быть устранены, если обратиться к теореме Кастилиано.

Теорема Кастилиано: частная производная от потенциальной энергии системы по силе равна перемещению точки приложения силы по направлению этой силы.

Рассмотрим, находящееся в равновесии пространственное тело (рис. 2), нагруженное произвольной системой N - внешних обобщенных сил $\vec{P}_n$,

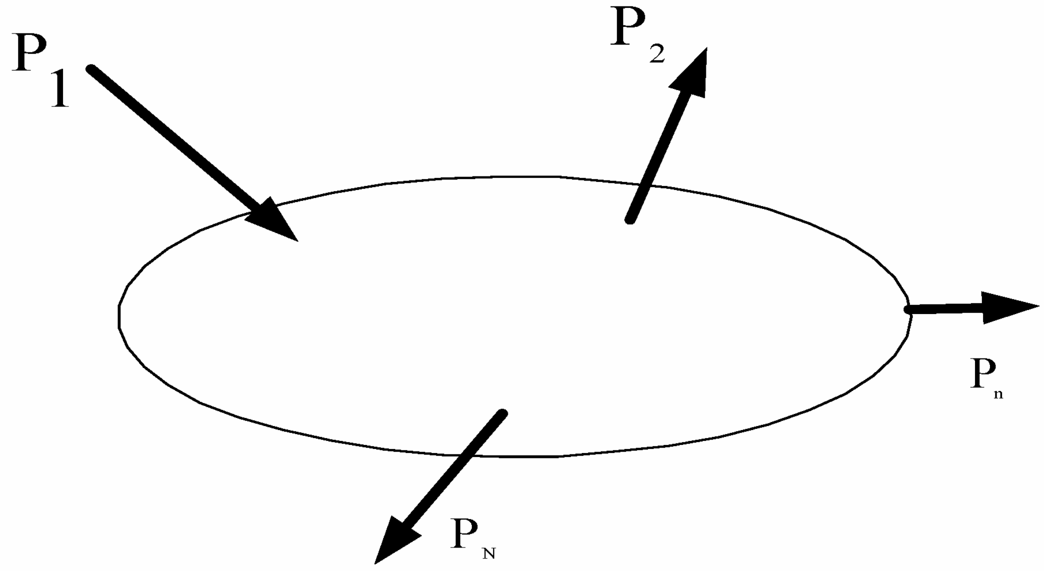

Рис.2.

$(1 \le n \le N)$, где в качестве $\vec{P}_n$ могут быть как сосредоточенные, так и распределенные силы или моменты сил. Система внешних сил определенным образом деформирует тело и сообщает ему некоторую потенциальную энергию деформации U.

Тогда согласно теореме Кастилиано имеем:

$$\vec{\delta}_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} \cdot \frac{\vec{P}_n}{P_n}, \tag{10}$$

где P_n – модуль вектора $\vec{P}_n$.

Очевидно, компоненты вектора перемещения $\vec{\delta}_n$ равны:

$$\delta_{nx} = \frac{\partial U}{\partial P_n} \mathrm{COS}\alpha, \ \delta_{ny} = \frac{\partial U}{\partial P_n} \mathrm{COS}\beta, \ \delta_{nz} = \frac{\partial U}{\partial P_n} \mathrm{COS}\gamma, \tag{11}$$

где α, β, γ – углы, определяющие направление вектора $\vec{P}_n$, а, следовательно, и вектора $\vec{\delta}_n$ в пространстве.

Учитывая, что

$$P_n = \frac{P_{nx}}{\mathrm{COS}\alpha}, \ P_n = \frac{P_{ny}}{\mathrm{COS}\beta}, \ P_n = \frac{P_{nz}}{\mathrm{COS}\gamma},$$

(где P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} – компоненты вектора $\vec{P}_n$) можно записать следующее:

$$\delta_{nx} = \frac{\partial U}{\partial P_{nx}}, \ \delta_{ny} = \frac{\partial U}{\partial P_{ny}}, \ \delta_{nz} = \frac{\partial U}{\partial P_{nz}},$$

или

$$\delta_{ni} = \frac{\partial U}{\partial P_{ni}}, \tag{12}$$

где i пробегает индексы x, y, z.

Заметим, что δ_{ni} имеет смысл линейного перемещения, если $\vec{P}_n$ – сосредоточенная сила и углового, если $\vec{P}_n$ – момент сил. Можно показать, что указанные соотношения справедливы как для внешних сил, так и для внутренних. Если сила $\vec{P}_n$ обусловлена действием опор на указанную систему, то величины δ_{ni} будут по смыслу равны перемещениям опор в направлении i обусловленным действием силы $\vec{P}_n$. Если опоры считать идеальными, то есть запрещающими перемещения соответствующих точек системы в тех или иных направлениях, то соотношения Кастилиано существенно упрощаются, принимая однородный вид.

Например, для опоры, приведенной на рис. 3а уравнения (12) имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial P_x} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial P_y} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial P_z} = 0, \tag{13}$$

а для опоры на рис. 3б, наряду с соотношениями (13), будут справедливы уравнения:

$$\frac{\partial U}{\partial M_X} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial M_Y} = 0 \text{ и } \frac{\partial U}{\partial M_Z} = 0, \tag{14}$$

где P_x, P_y, P_z и M_x, M_y, M_z – компоненты сил и моментов соответственно.

Если в системе отсутствуют монтажные дефекты и все элементы конструкции находятся при одной температуре, то для внутренних силовых факторов уравнения (12) принимают вид :

$$\frac{\partial U}{\partial P_{ni}} = 0. \qquad (15)$$

Если же в системе имеются монтажные дефекты, или же температура не постоянна по элементам конструкции, то соотношения (15) запишутся в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial P_{ni}} = \Delta i, \ \frac{\partial U}{\partial P_{ni}} = \Delta L_{ti}, \ \frac{\partial U}{\partial M_{ni}} = \Delta\varphi_i, \qquad (16)$$

где Δ_i и $\Delta\varphi_i$ – линейные и угловые дефекты, обусловленные неточностью изготовления, а ΔL_{ti} – температурные изменения длин стержней.

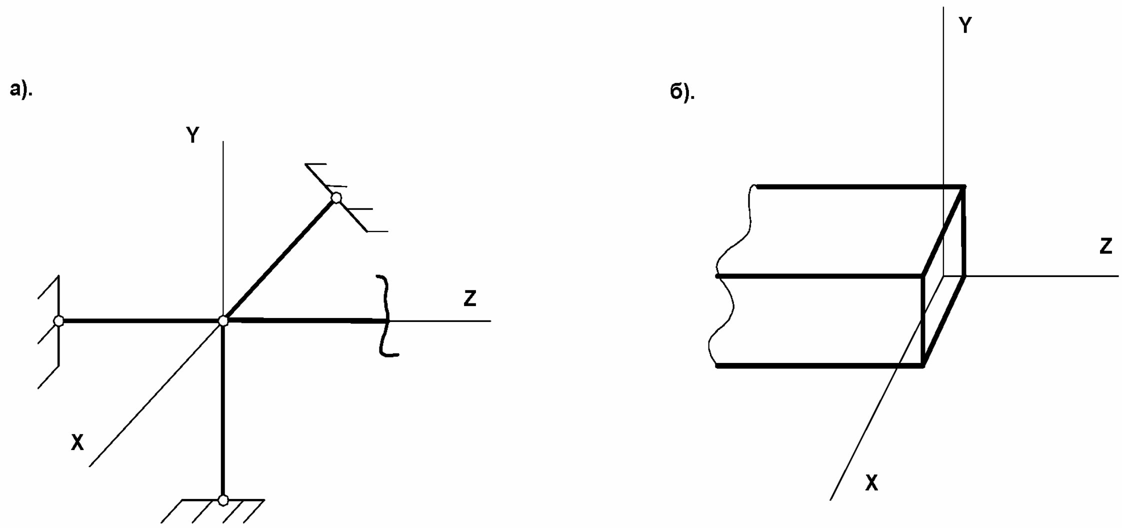

Рис. 3.

Уравнения (12)-(16) в формальном плане могут быть восприняты как условия совместности деформаций и ими могут быть дополнены соответствующие уравнения статики.

В сопротивлении материалов рассматриваются главным образом системы, для которых один из линейных размеров значительно превосходит два других, например, стержни, рамы. На рис. 4 изображена левая отсеченная часть кривого пространственного стержня. Главный вектор сил и главный момент сил в произвольном сечении, перпендикулярном оси z могут быть разложены на компоненты соответственно Q_x, Q_y, N и M_x, M_y, M_z. В соответствии с этим потенциальная энергия упругой информации равна

$$U = \int_L \frac{N^2}{2EF} dz + \int_L \frac{M_z^2}{2GJ_p} dz + \int_L \frac{M_x^2}{2EJ_x} dz + \int_L \frac{M_y^2}{2EJ_y} dz + K_y \int_L \frac{Q_y^2}{2GF} dz + K_X \int_L \frac{Q_X^2}{2GF} dz, \quad (17)$$

где J_p, J_x и J_y – соответственно полярный и осевые моменты инерции сечения, а K_x, K_y – безразмерные коэффициенты, зависящие от геометрии поперечного сечения. Обычно вклады от двух последних интегралов малы и ими пренебрегают.

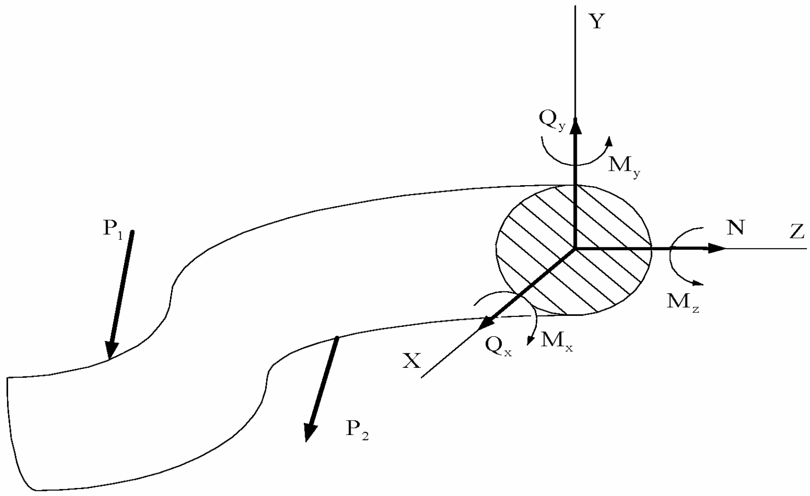

Рис. 4.

2. Применение теоремы Кастилиано к статически неопределимым стержневым системам, стержни которых работают на растяжение, сжатие

Вышеизложенные принципы легко применить к решению простейших статически неопределимых задач. Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Задача 2. Прямой однородный стержень AB (рис. 5а) жестко защемлен по концам и нагружен двумя силами P. Определить реакции в опорах.

Решение.

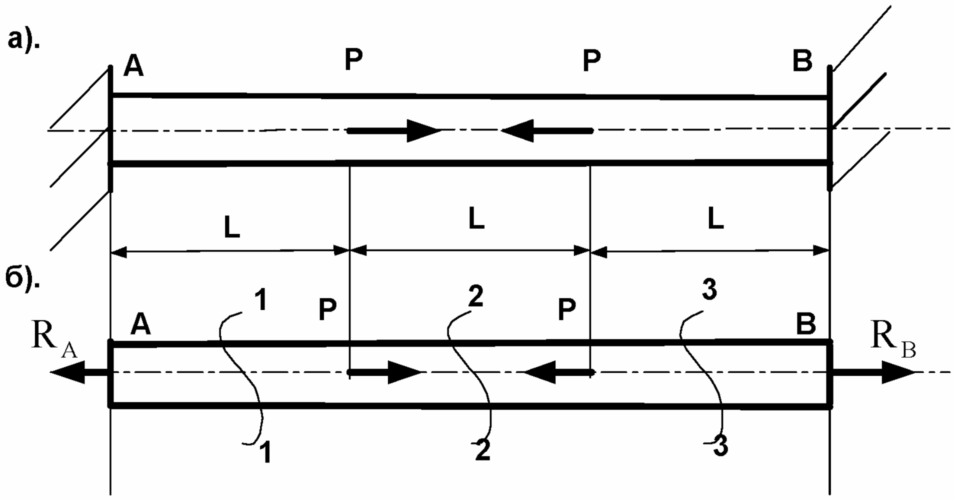

Рис. 5.

План сил приведен на рис. 5б Система один раз статически неопределима, так как реакции R_A и R_B не могут быть определены из одного уравнения равновесия:

$$\sum Z = 0,\ R_B - P + P - R_A = 0.$$

Откуда:

$$R_A = R_B.$$

Нормальные силы в поперечных сечениях 1-1, 2-2 и 3-3 соответственно равны:

$$N_1 = R_A,\ N_2 = R_A - P \text{ и } N_3 = R_A - P + P = R_A.$$

Потенциальная энергия стержня согласно выражению (17) равна:

$$U=\int_0^L \frac{R_A^2}{2EF}dz+\int_0^L \frac{(R_A-P)^2}{2EF}dz+\int_0^L \frac{R_A^2}{2EF}dz=\frac{L}{2EF}\left[R_A^2+\left(R_A-P\right)^2+R_A^2\right]$$

Применяя теорему Кастилиано и принимая, что левая и правая заделки идеально жесткие, получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial R_A}=\frac{L}{EF}\left(R_A+R_A-P+R_A\right)=0,$$

откуда

$$R_A=R_B=\frac{P}{3}.$$

Указанный пример демонстрирует эффективность предложенного способа.

Задача 3. Применяя энергетическую методику, решим задачу № 1, ранее рассмотренную в разделе 1.

Решение: Изображаем план сил и записываем уравнение моментов (1). Далее записываем потенциальную энергию упругой деформации:

$$U=\frac{N_1^2L}{2EF}+\frac{N_2^2L}{2EF}.$$

Из формулы (1) получаем:

$$N_1=2\left(P-N_2COS\alpha\right). \tag{18}$$

Подставляя выражение N_1 в формулу для U, получим:

$$U=\frac{\left[2\left(P-N_2COS\alpha\right)\right]^2L}{2EF}+\frac{N_2^2L}{2EF}.$$

Согласно теореме Кастилиано имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial N_2}=\frac{L}{EF}\left[4COS\alpha\left(N_2COS\alpha-P\right)+N_2\right]=0. \tag{19}$$

Из выражений (18) и (19) находим, что

$$N_2=\frac{4PCOS\alpha}{(1+4COS^2\alpha)}\ \text{и}\ N_1=\frac{2P}{(1+4COS^2\alpha)}. \tag{20}$$

Сравнивая (20) и (9), видим, что решение (20), полученное энергетическим методом, полностью адекватно решению (9), полученному в разделе 1.

Применение теоремы Кастилиано наиболее эффективно при рассмотрении сложных стрежневых систем. Одна из таких систем представлена на рис. 6а.

Задача 4. Стержни ДС (стержень 1), ВС (стержень 2) и АС (стержень 3) соединены шарнирно в точке С одними концами, а другими соответственно прикреплены шарнирно к основанию в точках Д, В и А и нагружены силой Р, приложенной в точке С. Жесткости стержней 1, 2 и 3 соответственно равны E_1F_1, E_2F_2 и E_3F_3. Угол α не равен углу β. Необходимо раскрыть статическую неопределимость стержневой системы, то есть найти усилия в стержнях 1, 2 и 3.

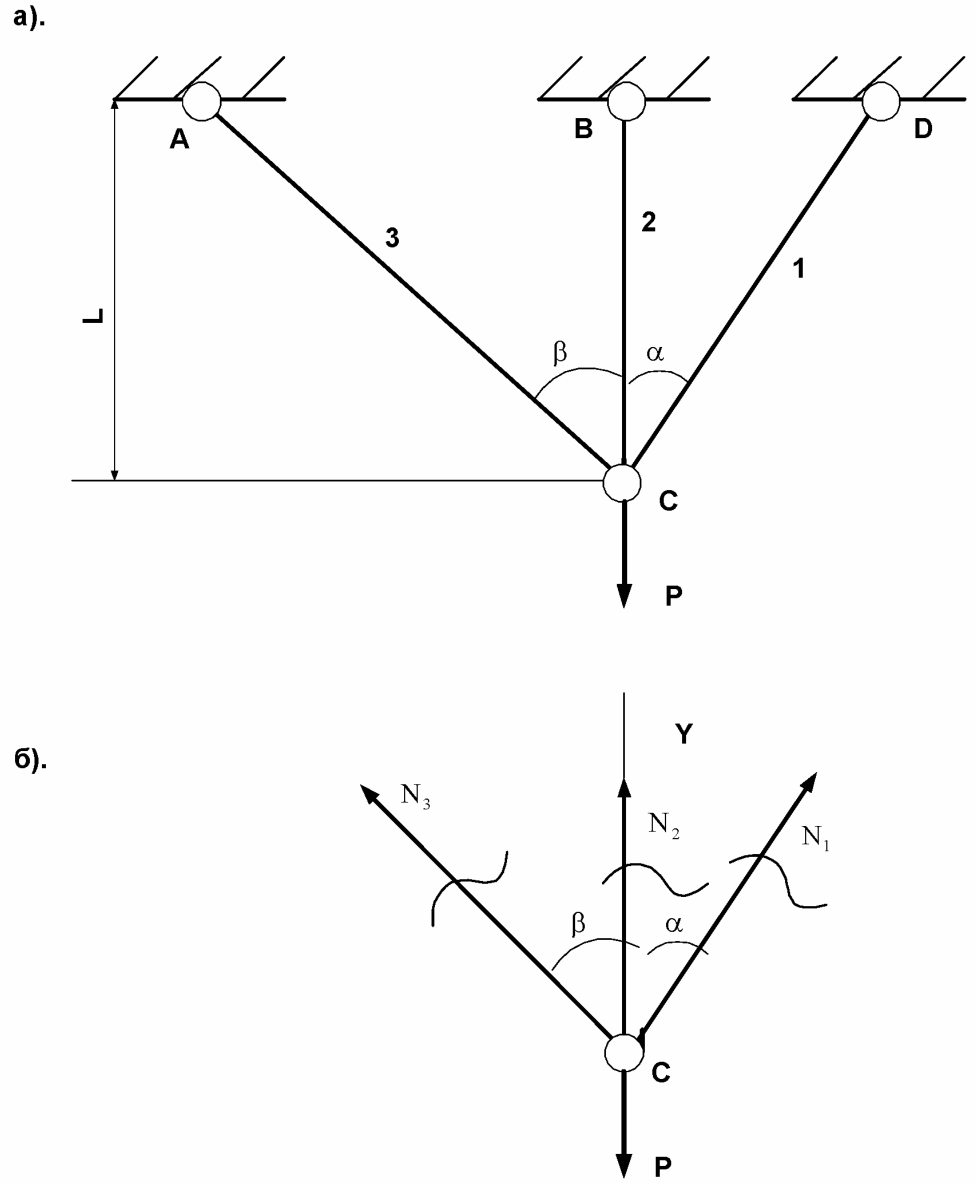

Рис. 6.

Решение: Данная система является статически неопределимой. Поэтому, наряду с уравнениями статики, нам необходимо составить дополнительные уравнения совместности деформаций. Это в свою очередь представляет определенные трудности, так как направление перемещения точки С при действии силы Р составит с вертикальной осью Y неизвестные углы. Применение теоремы Кастилиано позволяет избежать указанные трудности.

План сил представлен на рис. 6б. Запишем условия равновесия узла С:

$$\sum X = 0: \; N_1 SIN\alpha - N_3 SIN\beta = 0,$$
$$\sum Y = 0: \; N_1 COS\alpha + N_2 + N_3 COS\beta - P = 0. \tag{21}$$

потенциальная энергия упругой деформации стержней ДС, ВС, АС равна:

$$U = \frac{N_1^2 L}{2E_1F_1COS\alpha} + \frac{N_2^2 L}{2E_2F_2} + \frac{N_3^2 L}{2E_3F_3COS\beta}. \tag{22}$$

Заменяя в уравнении (22) N_2 и N_3, выраженные через N_1, согласно уравнению (21) получаем:

$$U = \frac{N_1^2 L}{2E_1F_1COS\alpha} + \frac{(P - N_1 SIN\alpha Ctg\beta - N_1 COS\alpha)^2 L}{2E_2F_2} + \frac{N_1^2 L SIN^2\alpha}{2E_3F_3 SIN^2\beta COS\beta}.$$

Применяя теорему Кастилиано, находим:

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = \frac{N_1 L}{E_1F_1COS\alpha} + \frac{L(P - N_1 SIN\alpha Ctg\beta - N_1 COS\alpha)(-SIN\alpha Ctg\beta - COS\alpha)}{E_2F_2} +$$
$$+ \frac{N_1 L SIN^2\alpha}{E_3F_3 SIN^2\beta COS\beta} = 0,$$

откуда:

$$N_1 = \frac{\dfrac{P(SIN\alpha Ctg\beta + COS\alpha)}{E_2F_2}}{\dfrac{1}{E_1F_1COS\alpha} + \dfrac{(SIN\alpha Ctg\beta + COS\alpha)^2}{E_2F_2} + \dfrac{SIN^2\alpha}{E_3F_3 SIN^2\beta COS\beta}}.$$

Из уравнений (21) можно найти N_2 и N_3.

Задача 5. Рассмотрим еще одну статически неопределимую стержневую систему представленную на рис. 7а. Невесомая жесткая балка АВ соединена с основанием стержнями 1, 2, 3 и 4, на концах которых имеются шарниры. Жесткость каждого стержня EF. Система нагружена силой Р, приложенной в точке А. Определить нормальные усилия в стержнях 1, 2, 3 и 4.

Решение: План сил представлен на рис. 7б. Система уравнений статики примет вид:

$$\sum X = 0 \qquad -N_2 COS30^\circ + N_3 COS30^\circ = 0,$$

$$\sum Y = 0 \qquad N_1 + N_2 COS60^\circ + N_3 COS60^\circ - N_4 - P = 0,$$

$$\sum M = 0 \qquad P2a - N_1 a - N_4 a = 0,$$

После несложных преобразований находим, что:

$$N_2 = N_3,$$

$$2N_1 + N_2 + N_3 - 2N_4 = 2P,$$

$$N_1 + N_4 = 2P. \qquad (23)$$

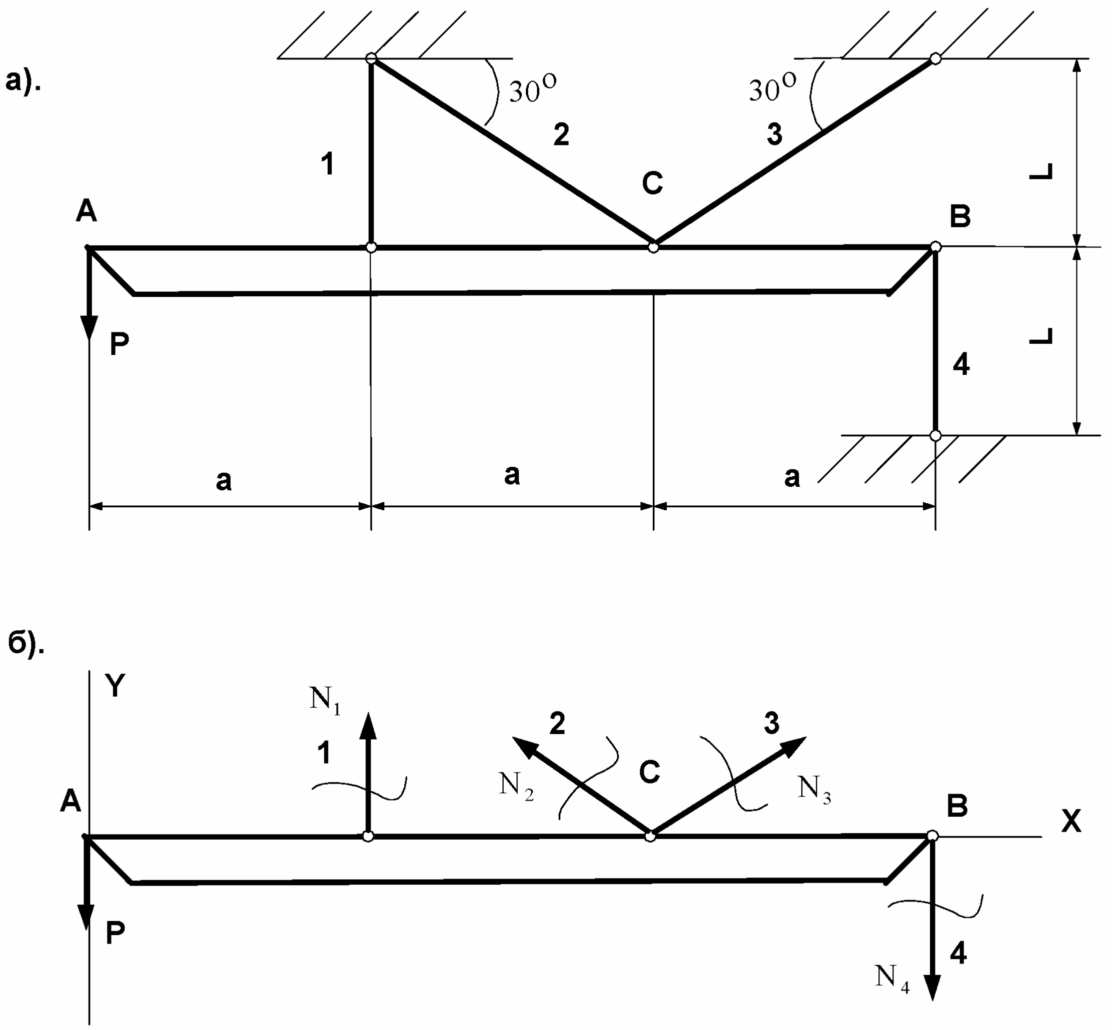

Рис. 7.

Усилия N_2, N_3 и N_4 выразим через N_1 из уравнений (23):

$$N_2 = N_3 = 3P - 2N_1 \text{и} N_4 = 2P - N_1. \qquad (24)$$

Потенциальная энергия упругой деформации запишется в виде:

$$U = \frac{N_1^2 L}{2EF} + \frac{2(3P - 2N_1)^2 2L}{2EF} + \frac{(2P - N_1)^2 L}{2EF} = \frac{L}{2EF}\left[N_1^2 + 4\left(3P - 2N_1\right)^2 + \left(2P - N_1\right)^2\right].$$

Из условия $\frac{\partial U}{\partial N_1} = 0$ находим:

$$N_1 = \frac{13}{9}P,$$

а, затем по уравнениям (24) найдем:

$$N_2 = N_3 = \frac{1}{9}P \text{ и } N_4 = \frac{5}{9}P.$$

Данная методика применима также и к задачам дважды и более раз статически неопределимым. Рассмотрим конкретный пример.

Задача 6. Невесомая жесткая балка ОВ (рис. 8а) соединена с основанием стержнями 1, 2 и 3, имеющими на концах шарниры и опирается на шарнир в точке О. Балка ОВ нагружена в точке В силой Р. Жесткость каждого стержня EF. Определить нормальные усилия в стержнях 1, 2 и 3.

Решение: План сил представлен на рис. 8б. Записываем уравнение моментов относительно точки О:

$$N_1 a + N_2 2a + N_3 3a - P3a = 0$$

или

$$N_1 + 2N_2 + 3N_3 - 3P = 0. \qquad (25)$$

Выражая N_1 через N_2, N_3 и Р из уравнения (25) и записывая выражение потенциальной энергии, получаем:

$$U = \frac{L}{2EF}\left[\left(3P - 2N_2 - 3N_3\right)^2 + N_2^2 + N_3^2\right]. \qquad (26)$$

Условия совместности деформаций для второго и третьего стержней примут вид:

$$\frac{\partial U}{\partial N_2} = 0 \text{ и } \frac{\partial U}{\partial N_3} = 0. \qquad (27)$$

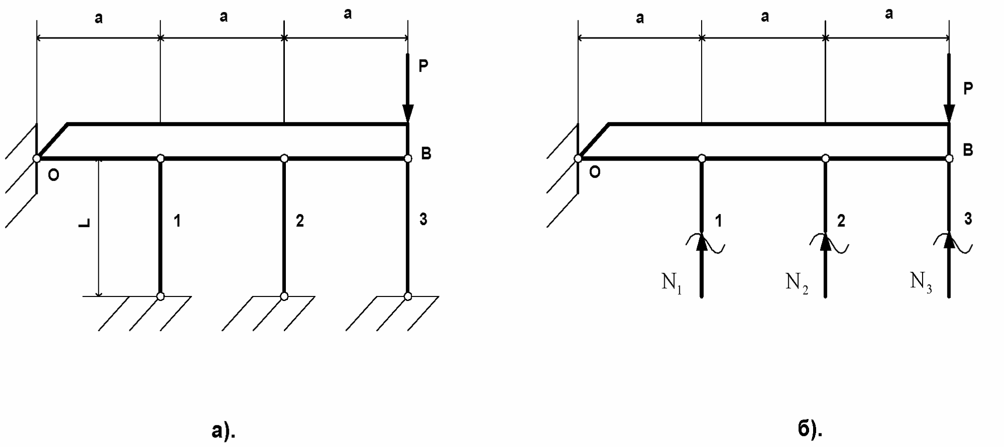

Рис. 8.

Откуда из уравнений (25-27) получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$N_1 + 2N_2 + 3N_3 - 3P = 0,$$

$$5N_2 + 6N_3 - 6P = 0,$$

$$6N_2 + 10N_3 - 9P = 0.$$

Применяя любой из известных методов решения системы таких уравнений, находим, что:

$$N_1 = \frac{3}{14}P, \ N_2 = \frac{3}{7}P \ \text{и} \ N_3 = \frac{9}{14}P.$$

3. Учет неточности изготовления элементов стержневых систем, а так же температурных воздействий при решении статически неопределимых задач

Задача 7. На рис. 9а представлен стержень АВ, который изготовлен с отклонением от проектной длины и поэтому закреплен до приложения внешних сил с зазором Δ. Жесткость стержня EF. Определить реакции в опорах.

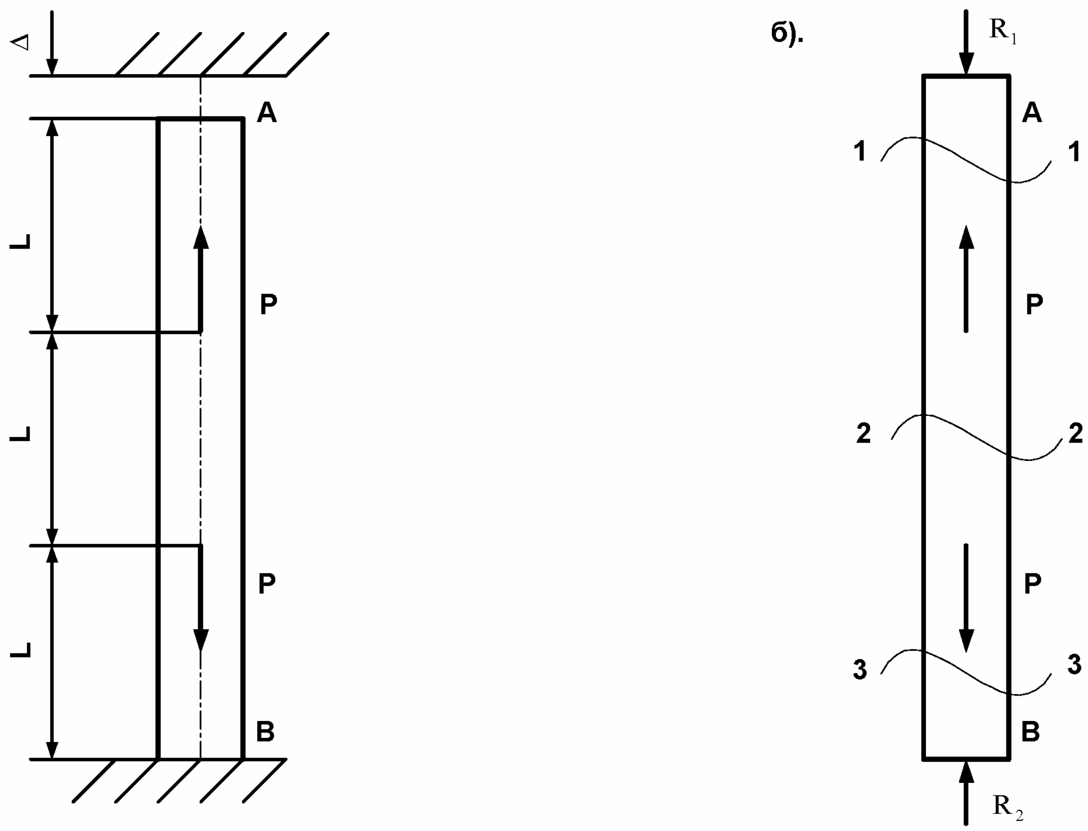

Рис. 9.

Решение: Если после приложения внешних сил к стержню АВ зазор перекроется, вследствие удлинения стержня, то наряду с реакцией R_2 будет действовать реакция R_1. План сил представлен на рис. 9б. Из условия равновесия стержня АВ следует, что:

$$R_1 = R_2,$$

$$N_1 = -R_1,\ N_2 = -R_1 + P,\ N_3 = -R_1 + P - P = -R_1.$$

Тогда потенциальная энергия деформации:

$$U=\frac{L}{2EF}\left[\left(-R_1\right)^2+\left(-R_1+P\right)^2+\left(-R_1\right)^2\right]. \qquad (27)$$

По теореме Кастилиано имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial R_1}=\frac{L}{2EF}\left(2R_1+2R_1-2P+2R_1\right)=-\Delta. \qquad (28)$$

Откуда:

$$R_1=R_2=\frac{P}{3}-\frac{\Delta EF}{3L}.$$

В уравнении (28) в правой части поставлен знак минус, так как направление перемещения торца стержня АВ до закрытия зазора противоположно направлению реакции R_1.

Задача 8. Жесткая невесомая балка ОВ (рис. 10а) закреплена шарнирно в точке О и должна быть соединена с основанием стержня АВ (стержень 2) и ДС (стержень 1). При этом стержень 1 оказался короче проектной длины на величину Δ. Жесткость каждого стержня EF. Определить усилия в стержнях 1 и 2 после сборки конструкции.

Решение: При сборке конструкции в стержнях 1 и 2 возникнут растягивающие усилия. План сил изображен на рис. 10б. Записывая уравнение моментов относительно точки О, получаем

$$-N_1 aCOS\beta+N_2 2aCOS\alpha=0,$$

откуда

$$N_2=\frac{N_1 COS\beta}{2COS\alpha}. \qquad (29)$$

Потенциальная энергия упругой деформации стержней 1 и 2 равна:

$$U=\frac{L}{2EF}\left(N_1^2+N_2^2\right)=\frac{L}{2EF}\left(N_1^2+\frac{N_1^2\cdot COS^2\beta}{4COS^2\alpha}\right).$$

Применяя теорему Кастилиано для внутренних усилий, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial N_1}=\Delta, \frac{\partial U}{\partial N_1}=\frac{L}{2EF}\left(2N_1+\frac{N_1\cdot COS^2\beta}{2COS^2\alpha}\right)=\Delta. \qquad (30)$$

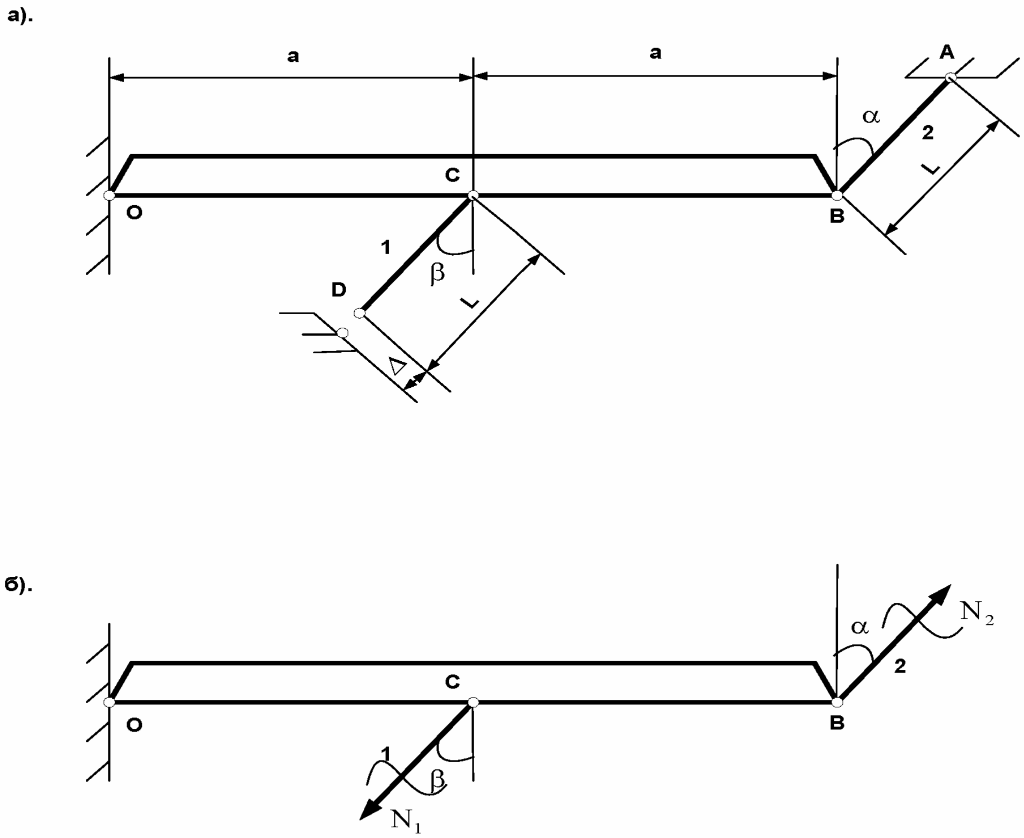

Рис. 10.

Откуда следует, что

$$N_1 = \frac{4\Delta EFCOS^2\alpha}{L(4COS^2\alpha + COS^2\beta)}.$$

Затем из выражения (29) определяем

$$N_2 = \frac{2\Delta EFCOS\alpha COS\beta}{L(4COS^2\alpha + COS^2\beta}.$$

В уравнении (30) в правой части поставлен знак плюс, так как направление перемещения точки Д при сборке конструкции и направление N_1 совпадает.

Данный пример достаточно красноречиво говорит о преимуществе применения теоремы Кастилиано при решении задач данного класса.

Аналогичная методика применима при нахождении внутренних силовых факторов в статически неопределимых стержневых системах, обусловленных изменением температуры стержней. Отличие в формальном плане состоит лишь в том, что Δ заменяется на ΔL_t, а остальные выкладки остаются одинаковыми, где ΔL_t – температурное удлинение стержня.

4. Применение теоремы Кастилиано при решении задач на кручение и изгиб

Задача 9. На рис. 11а представлен стержень AB. Жестко защемленный обоими концами и нагруженный внешними моментами M и 2M. Стержень работает на кручение, жесткость его равна GJ_ρ.Определить реактивные моменты в защемлениях A и B.

Решение: При такой нагрузке в защемлениях возникают реактивные моменты M_A и M_B в плоскостях, перпендикулярных к оси Z стержня. План сил представлен на рис. 11б.

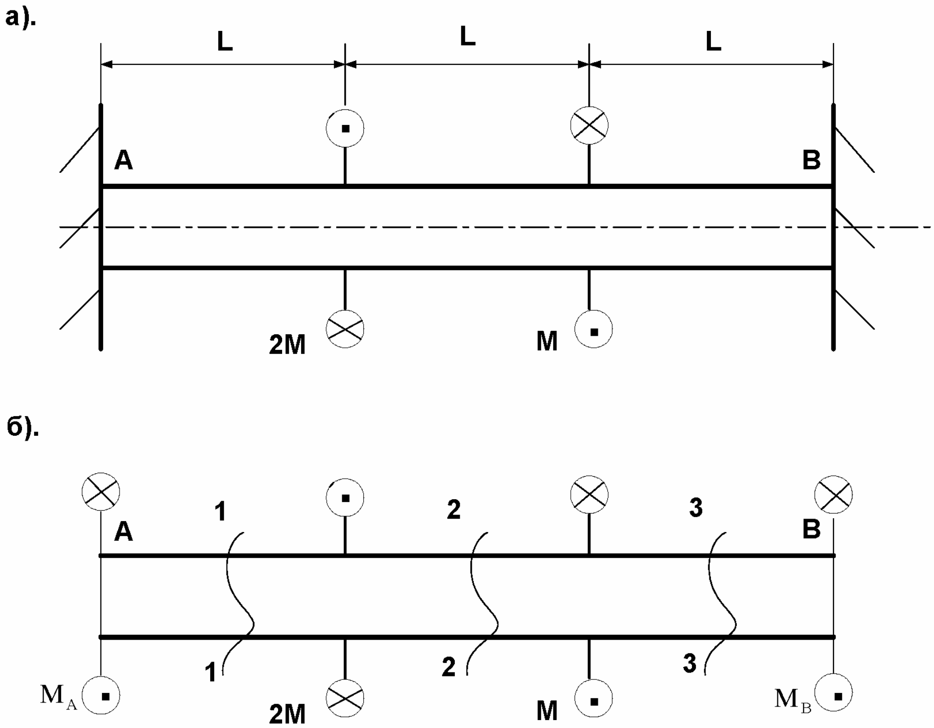

Рис. 11.

Уравнение равновесия стержня имеем вид:

$$\sum M_z = 0: \ M_A - 2M + M + M_B = 0,$$

или

$$M_A - M + M_B = 0. \tag{31}$$

Крутящие моменты в сечениях 1-1, 2-2 и 3-3 соответственно равны

$$M_{K1} = M_A, \ M_{K2} = M_A - 2M, \ M_{K3} = M_A - M.$$

Потенциальная энергия упругой деформации стержня:

$$U = \frac{M_A^2 L}{2GJ_P} + \frac{(M_A - 2M)^2 L}{2GJ_P} + \frac{(M_A - M)^2 L}{2GJ_P}.$$

Согласно теореме Кастилиано для внутренних силовых факторов получим:

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = \frac{M_A L}{GJ_P} + \frac{(M_A - 2M)L}{GJ_P} + \frac{(M_A - M)L}{GJ_P} = 0,$$

откуда

$$M_A = M.$$

Из (31) получаем, что $M_B = 0$.

Задача 10. Для балки AB, нагруженной моментом M (рис. 12) определить реакции в опорах. Жесткость балки EJ.

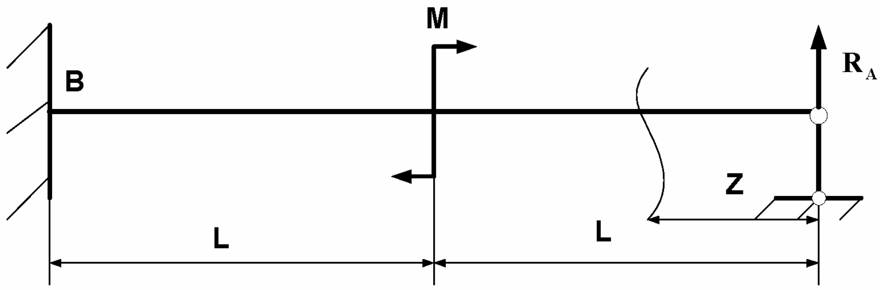

Рис. 12.

Решение: Изгибающие моменты для первого ($0 \le Z \le L$) и второго ($L \le Z \le 2L$) участков равны

$$M_1 = R_A Z \text{ и } M_2 = R_A Z - M.$$

Потенциальная энергия упругой деформации балки может быть найдена по третьему интегралу выражения (17).

$$U = \frac{L}{2EJ}\int_0^L R_A^2 Z^2 dz + \frac{L}{2EJ}\int_L^{2L} \left(R_A Z - M\right)^2 dz.$$

Пользуясь теоремой Кастилиано, получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{L}{EJ}\int_0^L R_A Z^2 dz + \frac{L}{EJ}\int_L^{2L} (R_A Z - M) Z dz = 0.$$

Откуда находим

$$R_A = \frac{9M}{16L}.$$

Записав уравнение равновесия балки AB, можно определить и реакции в опоре B.

Предложенная методика применима и в случае сложного сопротивления. Рассмотрим конкретный пример.

Задача 11. На рис. 13 изображена рама ABC, изготовленная из круглого стержня постоянного поперечного сечения с осевым моментом инерции J и нагруженная силой P, перпендикулярной плоскости рамы. Определить реакцию R_C.

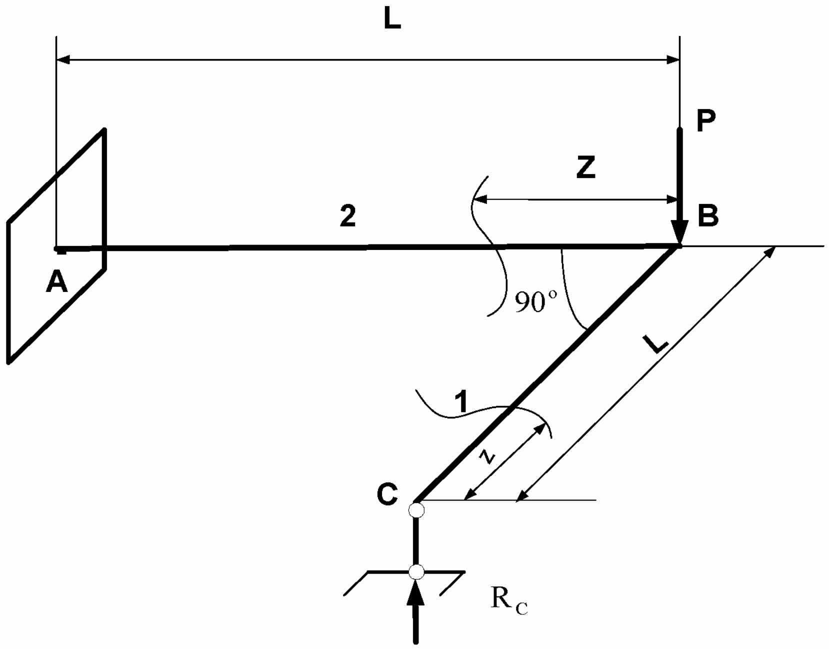

Рис. 13.

Решение: Рама имеет два участка, участок CB (первый участок, $0 \le Z \le L$) и участок BA (второй участок, $0 \le Z \le L$). При определении потенциальной энергии поперечной силой Q пренебрегаем. Изгибающие и крутящие моменты на участках соответственно равны:

$$M_1 = R_C Z,\; M_2 = (R_C - P)Z$$

и

$$M_{K1} = 0,\; M_{K2} = R_C L.$$

Потенциальная энергия рамы согласно выражения (17) равна:

$$U = \int_0^L \frac{R_C^2 Z^2}{2EJ} dz + \int_0^L \frac{(R_C - P)^2 Z^2}{2EJ} dz + \int_0^L \frac{R_C^2 Z^2}{2GJ_P} dz.$$

Далее, применяя теорему Кастилиано для реакции R_C, находим:

$$\frac{\partial U}{\partial R_C} = \frac{R_C L^3}{3EJ} + \frac{(R_C - P)L^3}{3EJ} + \frac{R_C L^3}{GJ_P} = 0,$$

откуда, учитывая, что $J_p = 2J$ получаем:

$$R_C = \frac{PGJ_P}{(2GJ_P + 3EJ)} = \frac{2PJ}{(4G + 3E)}.$$

И учитывая, что для упругой изотропной среды модуль Юнга равен:

$$E = 2(1+\nu)G,$$

будем иметь:

$$R_C = \frac{P}{(5+3\nu)},$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Монтажный фактор необходимо учитывать и при установке балок.

Задача 12. Рассмотрим балку AB, закрепленную в опорах, таким образом, что упругая линия балки в неподвижной опоре A составляет угол φ_o с горизонталью (рис. 14). Жесткость балки EJ. Определить реакции в опорах.

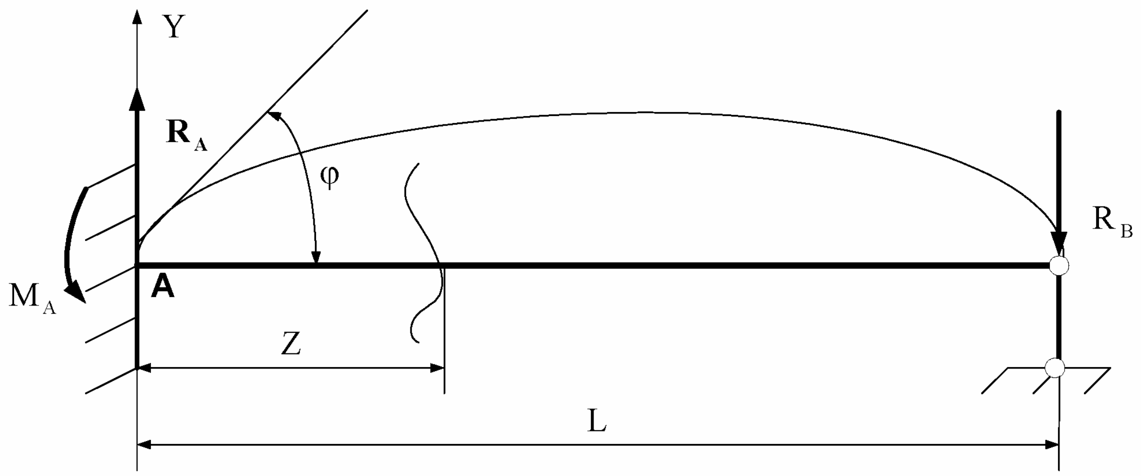

Рис. 14.

Решение: Из условия равновесия имеем:

$$\sum Y = 0,\ R_A - R_B = 0, \text{ откуда } R_A = R_B;$$

$$\sum M_B = 0,\ M_A - R_A L = 0, \text{ откуда } R_A = \frac{M_A}{L}. \qquad (32)$$

Изгибающий момент в произвольном сечении запишется:

$$M = -M_A + R_A Z = -M_A + \frac{M_A Z}{L}.$$

Потенциальная энергия упругой деформации балки равна:

$$U = \int_0^L \left(\frac{M_A}{L} Z - M_A \right)^2 \frac{1}{2EJ} dz.$$

Применяя теорему Кастилиано для левой опоры, получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = \frac{1}{EJ} \int_0^L M_A \left(\frac{Z}{L} - 1 \right)^2 dz = \frac{M_A L}{3EJ} = \varphi_0,$$

откуда

$$M_A = \frac{3EJ\varphi_0}{L}.$$

А также согласно выражению (32) имеем:

$$R_A = R_B = \frac{M_A}{L} = \frac{3EJ\varphi_0}{L^2}.$$

Задача 13. На рис. 15 изображена балка OAB жесткостью EJ. У которой при сборке обнаружилось несоответствие положения шарниров A и A’, а также B и B’ на величины ΔA и ΔB соответственно. Сборка была произведена перпендикулярным соединением шарниров A и A’, а также B и B’. определить реакции в опорах A и B.

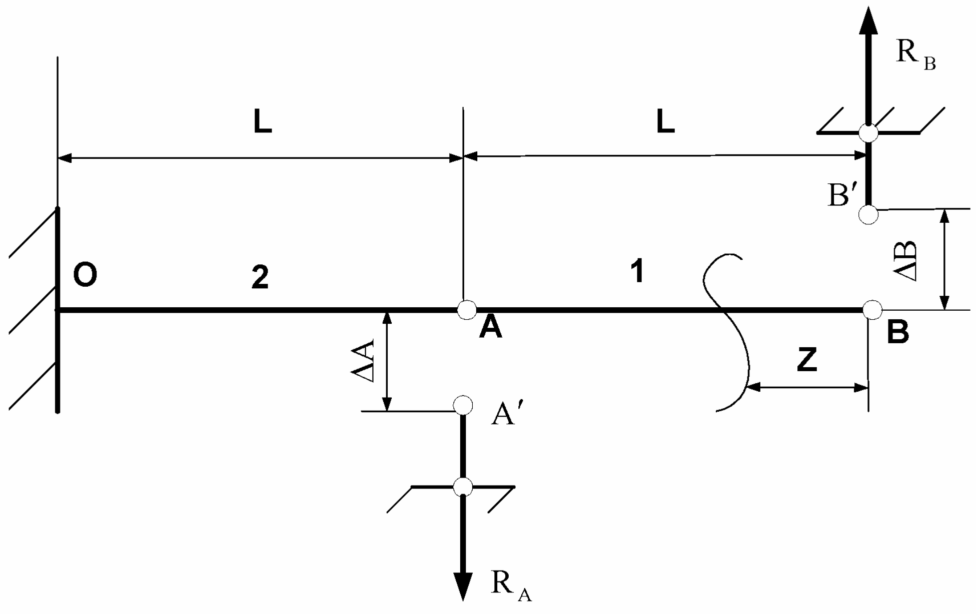

Рис. 15.

Решение: Изгибающие моменты на первом (0≤Z≤L) и втором (L≤Z≤2L) участках равны:

$$M_1 = R_B Z\,,\ M_2 = R_B Z - R_A(Z-L)\,.$$

Потенциальная энергия балки равна

$$U = \int_0^L \frac{R_B^2 Z^2}{2EJ} dz + \int_L^{2L} \frac{[R_B Z - R_A(Z-L)]^2}{2EJ} dz\,.$$

Применяя для опорных реакций теорему Кастилиано, получаем:

$$\Delta_B = \frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{1}{EJ}[\int_0^L R_B Z^2 dz + \int_L^{2L} 2[R_B Z - R_A(Z-L)]Zdz\,,$$

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{EJ}\int_L^{2L}[R_B Z - R_A(Z-L)](L-Z)dz\,. \qquad (33)$$

Интегрируя выражения (33) получаем:

$$\Delta_B = \frac{L^3}{EJ}(\frac{8}{3}R_B - \frac{5}{6}R_A)\,,$$

$$\Delta_A = \frac{L^3}{EJ}(\frac{1}{3}R_A - \frac{5}{6}R_B)\,. \qquad (34)$$

Решая систему уравнений (34) находим:

$$R_B = \frac{EJ(12\Delta_B + 30\Delta_A)}{7L^3} \text{ и } R_A = \frac{EJ}{7L^3}(96\Delta_A + 30\Delta_B)\,.$$

Рассмотрение выше примеры, свидетельствуют о том, что предложенная методика может быть эффективно использована при решении разнообразных статически неопределимых задач.