

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Методические указания к расчетно-графической работе

В данном пособии содержатся краткие теоретические сведения о плоском поперечном изгибе, излагается последовательность расчета статически определимых балок на прочность и жесткость.

В приведенных примерах дается методика назначения размеров поперечного сечения из условий жесткости, а также показывается подбор сечения из условий прочности по расчетным сопротивлениям и по допускаемым напряжениям. В обоих примерах дано численное решение и графическая интерпретация полученных результатов.

Сформулированы вопросы для самоконтроля, указана рекомендуемая для изучения литература.

Приведены расчетные схемы и исходные данные для всех вариантов индивидуальных заданий.

СОДЕРЖАНИЕ

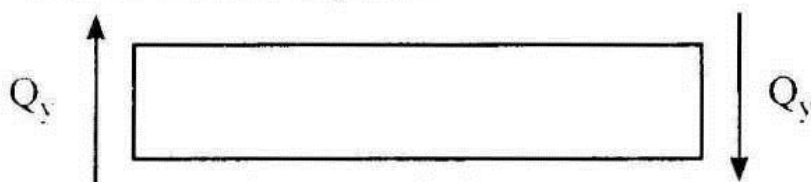
Введение _____	4
1. Напряжения и деформации при поперечном изгибе стержней ____	4
2. Пример расчета _____	10
3. Пример расчета _____	15
4. Вопросы для самоконтроля _____	21
5. Расчетно-графическая работа «Расчеты на прочность и жесткость при поперечном изгибе _____	21
6. Литература _____	22
Приложение № 1 _____	23
Приложение № 2 _____	26

ВВЕДЕНИЕ

Стержни, работающие на изгиб, применяются в конструкциях зданий, мостах, подкрановых балках и других сооружениях. Будем рассматривать статически определимые системы (т.е. балки, прикрепляемые к основанию при помощи трех опорных связей).

Примем следующие правила знаков внутренних усилий, действующих в поперечных сечениях стержней:

– поперечная сила Q_y считается положительной, если она направлена так, что стремится повернуть рассматриваемый участок балки по часовой стрелке:



– изгибающий момент M_z считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон рассматриваемого участка балки (выпуклость направлена вниз).



1. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЕЙ

Если внешняя нагрузка приложена к стержню в плоскости, совпадающей с его осью симметрии, то продольная ось стержня искривляется в плоскости действия нагрузки. Этот вид напряженного состояния стержня называется плоским поперечным изгибом.

При выборе расчетной модели изгибаемых элементов конструкций, обычно называемых балками, руководствуются следующими гипотезами:

– каждое нормальное поперечное сечение стержня, плоское до деформации, остается плоским и нормальным к искривленной продольной оси стержня после деформации (гипотеза Бернулли);

– предполагается, что материал сечения имеет волокнистую структуру, причем все волокна при изгибе подвержены только деформации растяжения или сжатия и не оказывают давления друг на друга в поперечном направлении.

На схеме деформации бруса, показанной на рис. 1, видно, что при действии вертикальной нагрузки на балку ее продольная ось искривляется, при этом поперечные сечения получают линейные и угловые перемещения.

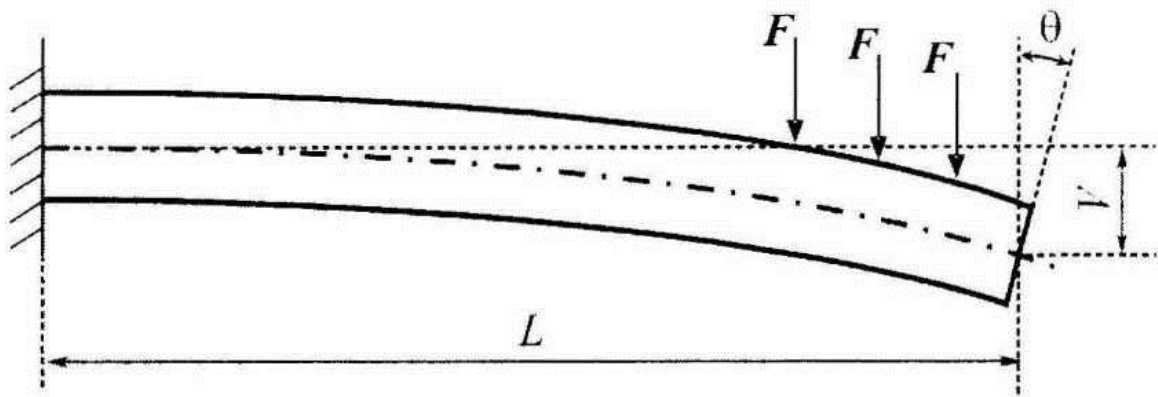


Рис. 1 Схема деформации бруса при изгибе

Линейное перемещение оси балки по вертикали, называемое прогибом, будем обозначать символом V , угловое перемещение сечения, называемое углом поворота, обозначим символом θ .

Как известно, при поперечном изгибе в сечениях балки возникают два вида внутренних усилий: изгибающий момент M_z и поперечная сила Q_y .

Изгибающий момент вызывает в поперечных сечениях нормальные напряжения, которые распределяются по высоте сечения по следующему закону:

$$\sigma_1 = \frac{M_z}{I_z} y_1, \quad (1)$$

где I_z – осевой момент инерции сечения, y_1 – расстояние от рассматриваемого волокна до нейтрального слоя, расположенного на уровне центра тяжести сечения и разделяющего его на сжатую и растянутую зоны.

От действия поперечной силы в сечениях балки возникают касательные напряжения, закон их распределения по высоте сечения:

$$\tau_i = \frac{Q_y \cdot S_z^{\text{отс}}}{I_z \cdot b_i}, \quad (2)$$

где $S_z^{\text{отс}}$ – статический момент площади отсеченной части сечения, b_i – ширина сечения на рассматриваемом уровне.

Характер эпюр нормальных и касательных напряжений для прямоугольного сечения балки показан на рис. 2.

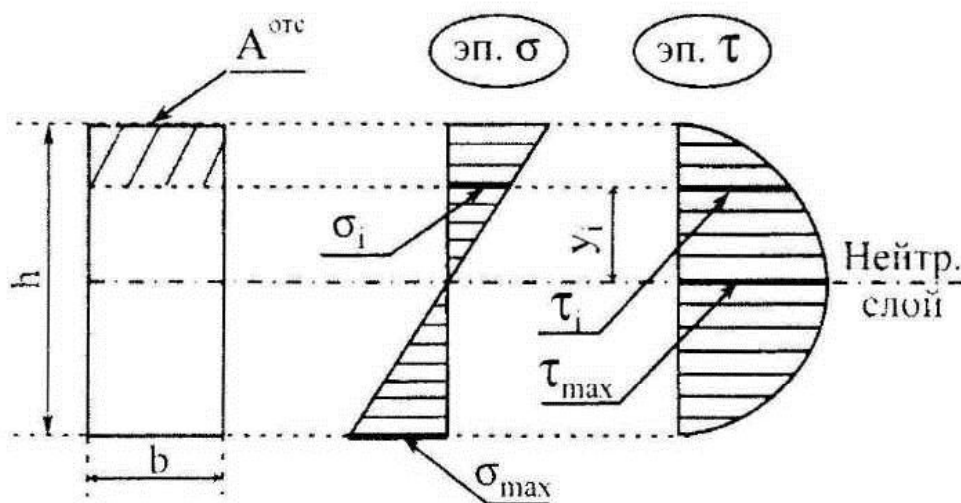


Рис. 2 Эпюры нормальных и касательных напряжений

Экстремальные нормальные напряжения, действующие в наиболее удаленных от нейтрального слоя волокнах, можно определить по формуле:

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_{\min}| = M_z / W_z, \quad (3)$$

где $W_z = b \cdot h^2 / 6$ – осевой момент сопротивления сечения.

При расчете изгибаемых элементов конструкций на прочность по методу предельных состояний должны выполняться два следующих условия прочности:

$$1. |\sigma_{\max}| \leq R_n; \quad (4)$$

$$2. |\tau_{\max}| \leq R_s. \quad (5)$$

где R_n и R_s – расчетные сопротивления материала на изгиб и на срез.

Подставляя в первое условие прочности значение максимального нормального напряжения из формулы (3), получим:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_z^{\max}|}{W_z} \leq R_{\text{н}} \Rightarrow W_z^{\text{тр}} \geq \frac{|M_z^{\max}|}{R_{\text{н}}} \quad (6)$$

Вычислив величину требуемого осевого момента сопротивления $W_z^{\text{тр}}$, назначают размеры поперечного сечения балки (по соотношению сторон b и h для прямоугольного, а по сортаменту – для сечения из прокатного профиля). Подставляя назначенные из условий прочности по нормальным напряжениям размеры сечения в формулу (2), проверяют выполнение условия прочности по касательным напряжениям (5).

При расчете на прочность по методу допускаемых напряжений последовательность назначения размеров сечения ничем не отличается от изложенной выше, изменяются лишь критерии прочности. Условия (4) и (5) записываются следующим образом:

$$1. |\sigma_{\max}| \leq [\sigma_{\text{н}}]; \quad (7)$$

$$2. |\tau_{\max}| \leq [\tau_{\text{с}}], \quad (8)$$

где $[\sigma_{\text{н}}]$ и $[\tau_{\text{с}}]$ – допускаемые напряжения материала на изгиб и на срез.

Помимо условий прочности, для всех изгибаемых элементов конструкций обязательным является условие жесткости:

$$|V_{\max}| \leq [V], \quad (9)$$

где $[V]$ – вертикальное перемещение (нормативный прогиб).

Для нахождения сечения, в котором вертикальное перемещение достигает экстремального значения, необходимо знать очертание изогнутой оси балки, которое называют упругой линией. Построить упругую линию можно несколькими способами:

– использовать дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}, \text{ интегрируя которое определяются прогибы};$$

– использовать универсальное уравнение метода начальных параметров для определения прогибов;

– для определения прогибов применить метод Мора-Верещагина.

Рассмотрим использование метода начальных параметров для построения эпюр линейных перемещений оси балки и углов поворота поперечных сечений.

На рис. 3 показана схема приложенной к балке нагрузки.

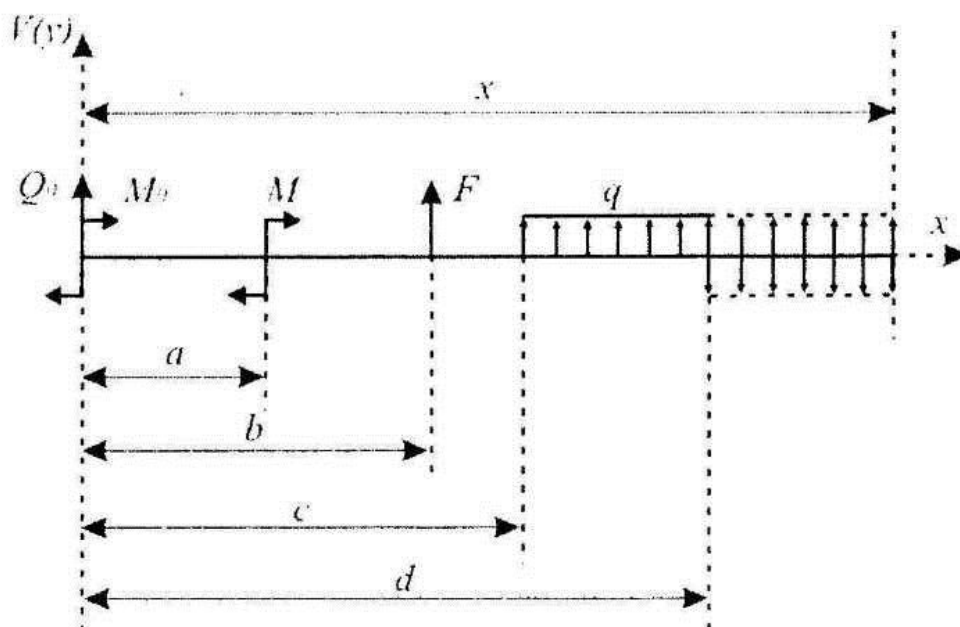


Рис. 3 Расчетная схема для составления уравнений прогибов и углов поворота при изгибе

Прогиб в произвольном сечении балки, расположенном на расстоянии x от начала отсчета, определяется следующим уравнением:

$$\begin{aligned}
 EIV_x = & EIV_0 + EI\theta_0 \cdot x + M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \\
 & + M \frac{(x-a)^2}{2!} + F \frac{(x-b)^3}{3!} + q \frac{(x-c)^4}{4!} - q \frac{(x-d)^4}{4!} \quad (10)
 \end{aligned}$$

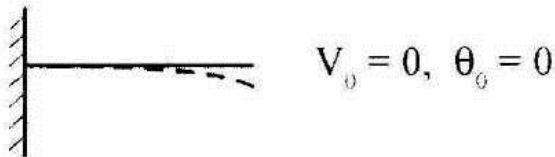
Так как все силовые факторы в рассматриваемом сечении вызывают положительный изгибающий момент, то в уравнение (10) они вводятся со знаком плюс. Распределенная нагрузка q , не доходящая до сечения, продолжена до него и уравновешена (см. последнее слагаемое уравнения).

В уравнении (10) первые четыре слагаемые, называемые начальными параметрами системы, определяются следующим образом:

– M_0 и Q_0 – значения изгибающего момента и поперечной силы в начале отсчета, всегда расположенного на левом конце балки – это соответствующие ординаты эпюр внутренних усилий;

– V_0 и θ_0 – соответственно прогиб и угол поворота в начале отсчета, определяемые расчетной схемой балки.

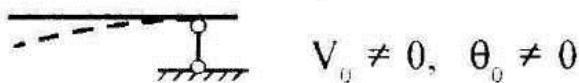
При жестком защемлении левого конца балки:



При шарнирном опирании левого конца балки:



Если левый конец балки – консольный свес:



Правило знаков перемещений в методе начальных параметров: поворот нормального сечения против часовой стрелки $\theta > 0$; вертикальное перемещение центра тяжести сечения по направлению оси $y - V > 0$.

Уравнение для определения угла поворота произвольного сечения:

$$EI\theta_x = EI\theta_0 + M_0 \cdot x + Q_0 \frac{x^2}{2!} + M \cdot (x - a) + \quad (11)$$

$$+ F \frac{(x-b)^2}{2!} + q \frac{(x-c)^3}{3!} - q \frac{(x-d)^3}{3!}$$

Правильность построенных эпюр перемещений контролируется дифференциальной зависимостью между ними $dV/dx = \theta$.

Полученное в результате построения эпюры прогибов экстремальное значение $|V_{\max}|$ подставляется в условие (9), из которого определяется величина требуемого по условию жесткости момента инерции поперечного сечения балки $I_{тр}$, затем определяют требуемые размеры сечения.

2. ПРИМЕР РАСЧЕТА № 1

Для балки, расчетная схема которой показана на рис. 4, назначить размеры поперечного сечения из условий прочности и жесткости. Расчет на прочность выполнить по первому предельному состоянию.

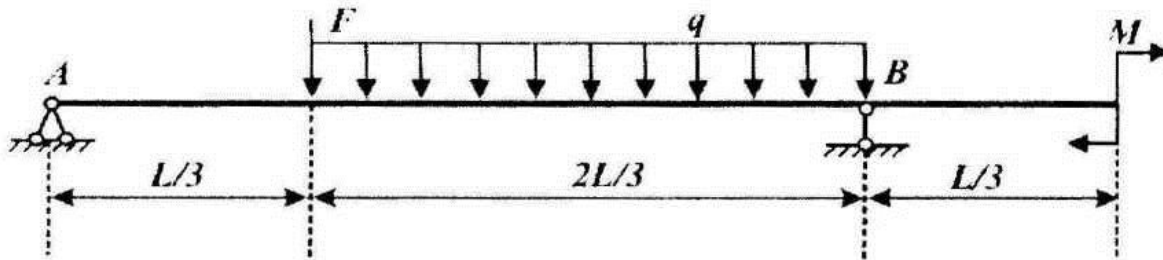


Рис. 4 Расчетная схема балки

Исходные данные:

$L = 6,0$ м, $F = 20$ кН, $q = 4$ кН/м, $M = 16$ кН·м, $R_{II} = 180$ МПа,

$R_s = 140$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[v] = L / 400$;

тип поперечного сечения – двутавровый профиль.

Для назначения размеров поперечного сечения балки из условий прочности необходимо найти сечения, в которых внутренние усилия достигают экстремума, т.е. необходимо построить эпюры внутренних усилий. Расчеты начинаются с определения величины и направления опорных реакций, для чего составляются следующие уравнения равновесия рассматриваемой балки:

$$1. \sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \cdot L - M - q(2L/3)^2 - FL/3 = 0;$$

$R_B = (M + 4qL^2/9 + FL/3) / L$; подставляя численные значения параметров, входящих в это выражение, получим: $R_B = 20,0$ кН.

$$2. \sum M_B = 0 \Rightarrow R_A \cdot L + M - q \cdot 2(L/3)^2 - F \cdot 2L/3 = 0;$$

$R_A = (-M + 2qL^2/9 + 2FL/3) / L$; подставив численные значения, получим: $R_A = 16,0$ кН.

$$3. \sum Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - F - 2qL/3 = 16 + 20 - 20 - 16 = 0,0.$$

Для построения эпюр внутренних усилий балка разбивается на характерные участки, границами которых являются сечения, где приложены сосредоточенные усилия и начинается или кончается распределенная нагрузка. Построение эпюр внутренних усилий показано на рис. 5.

Эпюра изгибающих моментов построена на растянутом волокне.

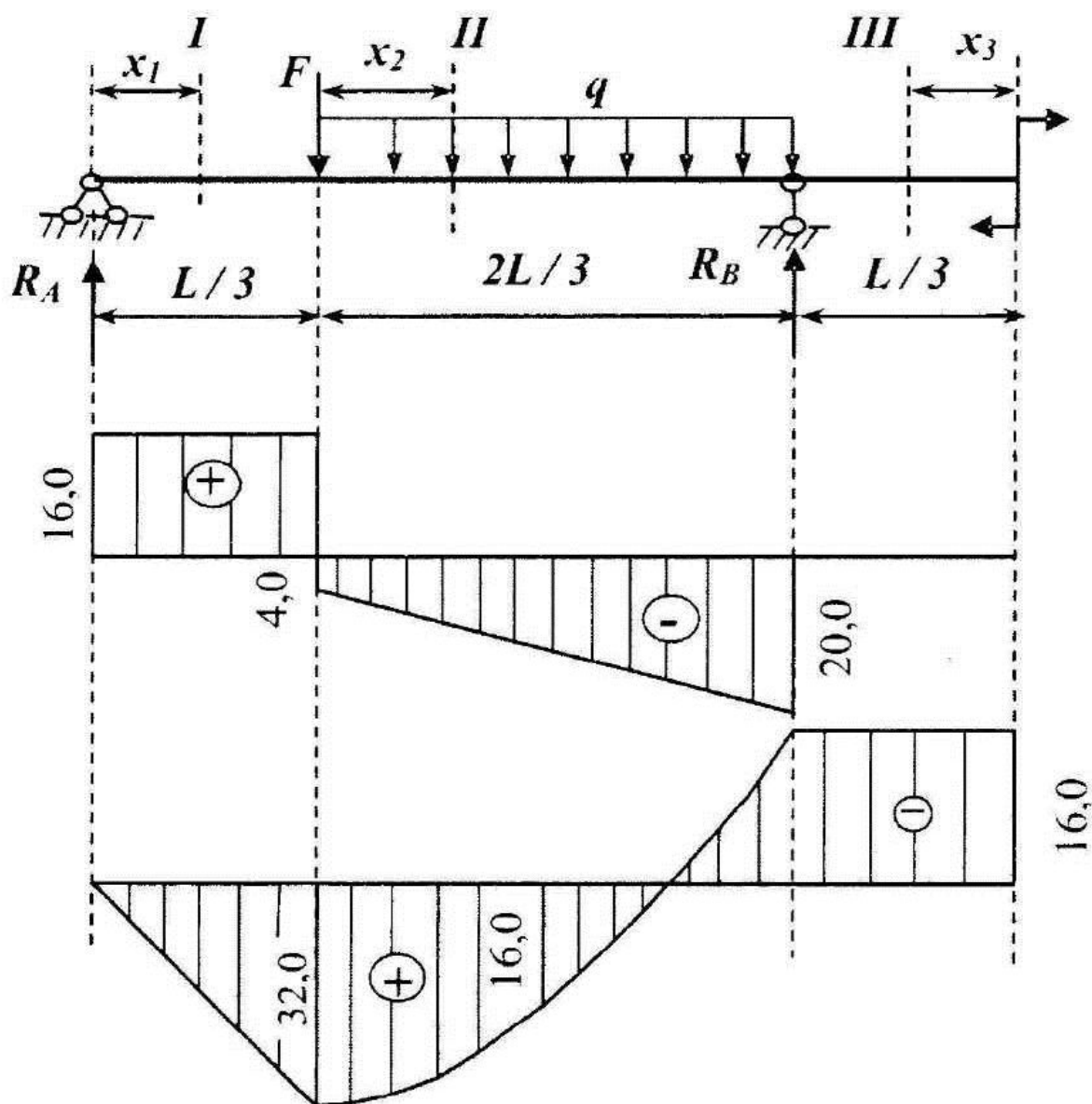


Рис. 5 Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Сечение I ($0 \leq x_1 \leq L/3$)

$$Q_y = R_A = 16,0 \text{ кН}; M_z = R \cdot x_1; x_1 = 0 \Rightarrow M_z = 0, x_1 = L/3 \Rightarrow M_z = 32,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сечение II ($0 \leq x_2 \leq 2L/3$)

$$Q_y = R_A - F - q \cdot x_2; \quad x_2 = 0 \Rightarrow Q_y = -4,0 \text{ кН}, \quad x_2 = 2L/3 \Rightarrow Q_y = -20,0 \text{ кН},$$

$$M_z = R_A (L/3 + x_2) - F \cdot x_2 - q \cdot x_2^2/2; \quad x_2 = 0 \Rightarrow M_z = 32 \text{ кН}\cdot\text{м}, \\ x_2 = L/3 \Rightarrow M_z = 16,0 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad x_2 = 2L/3 \Rightarrow M_z = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Сечение III ($0 \leq x_3 \leq L/3$)

$$Q_y = 0; \quad M_z = -M = -20,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Максимальный изгибающий момент $M_{\max} = 32,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$, следовательно, расчет на прочность по нормальным напряжениям нужно произвести на это усилие:

$M_{\max} / W_z \leq R_{II}$; тогда требуемый момент сопротивления сечения $W_z^{\text{тp}} \geq M_{\max} / R_{II} \geq 32,0 \cdot 10^{-3} / 180 = 178 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$.

$W_z^{\text{тp}} \geq 178 \text{ см}^3$, по сортаменту [5] находим, что это условие выполняется для **I** № 20, у которого $W_z = 184 \text{ см}^3$.

Для назначенного сечения необходимо проверить выполнение условия прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{I_z b_i} \leq R_s;$$

где $Q_y = 20,0 \text{ кН}$ – максимальная поперечная сила; по сортаменту статический момент площади отсеченной части сечения $S_z^{\text{отс}} = 104 \text{ см}^3$, толщина стенки двутавра $b_i = 5,2 \text{ мм}$.

$$\tau_{\max} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{1840 \cdot 10^{-8} \cdot 5,2 \cdot 10^{-3}} = 21,7 \text{ МПа} \leq 140 \text{ МПа}.$$

Из условий прочности по нормальным и касательным напряжениям принято: сечение балки – **I** № 20, $W_z = 184 \text{ см}^3$, $I_z = 1840 \text{ см}^4$.

Для обеспечения условия жесткости (9) необходимо построить эпюру прогибов и по ней отыскать экстремальное значение прогиба балки.

Для рассматриваемой расчетной схемы универсальное уравнение, по которому определяется вертикальное перемещение оси балки (см. рис. 6):

$$EIV_x = EIV_0 + EI\theta_0 \cdot x + M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} - F \frac{(x-L/3)^3}{6} - q \frac{(x-L/3)^4}{24}$$

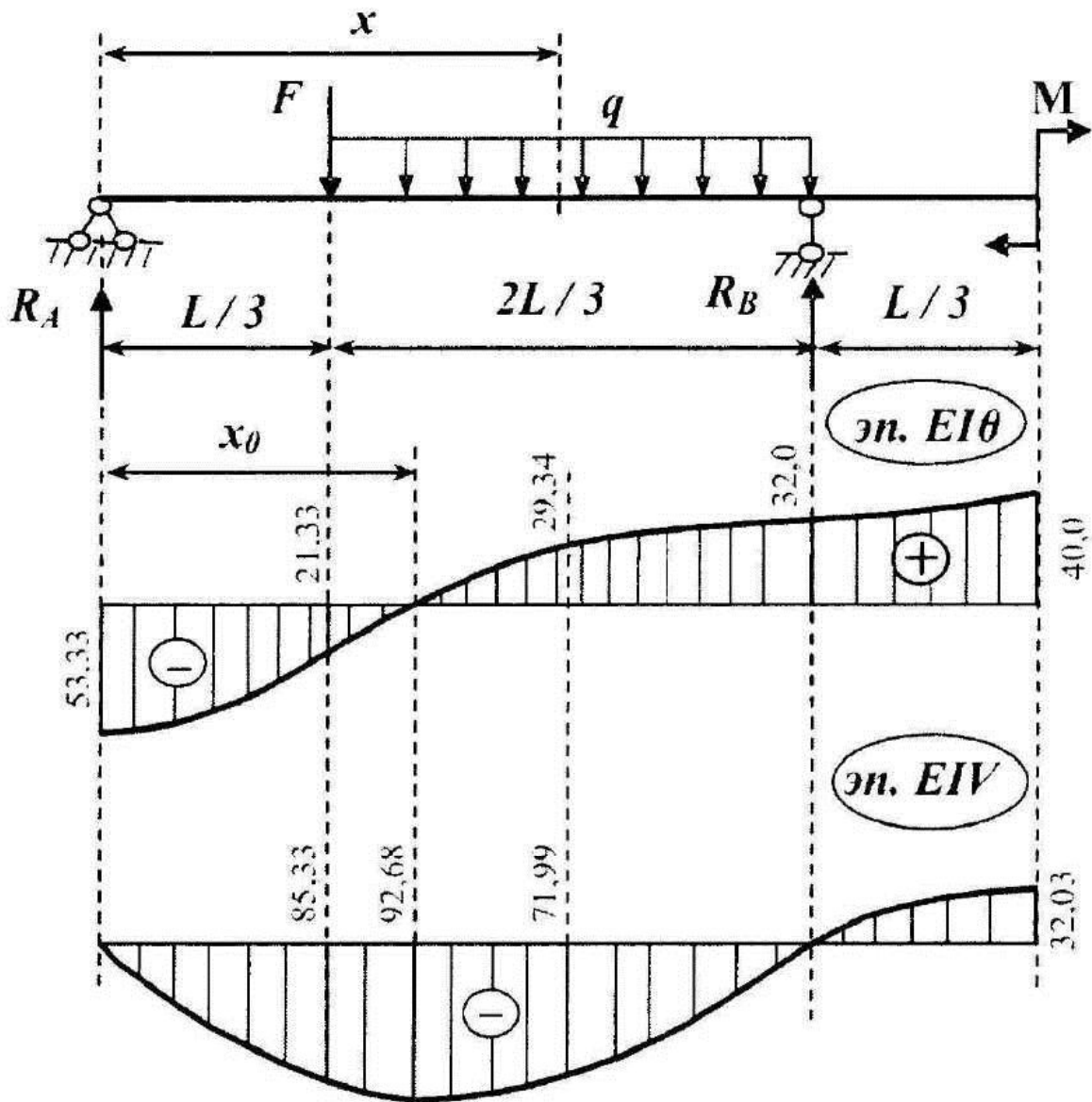


Рис. 6 Эпюры угловых и линейных перемещений

В этом уравнении: $V_0 = 0$; $\theta_0 \neq 0$; $M_0 = 0$; $Q_0 = R_A$. Для определения неизвестного угла поворота сечения в начале отсчета используем следующее условие: при $x = L$ $V_L = 0$, тогда:

$$EIV_L = EI\theta_0 \cdot L + R_A \frac{L^3}{6} - F \frac{(2L/3)^3}{6} - q \frac{(2L/3)^4}{24} = 0,$$

отсюда:

$$EI\theta_0 = \frac{1}{L} \left[-R_A \frac{L^3}{6} + F \frac{(2L/3)^3}{6} + q \frac{(2L/3)^4}{24} \right].$$

После подстановки числовых данных в это выражение получим:
 $EI\theta_0 = -53.33$.

Теперь, зная все начальные параметры системы, можно определить величину и направление угла поворота и вертикального перемещения оси балки для любого сечения (в интервале $0 \leq x \leq 4L/3$)

Выражения для определения прогибов и углов поворота следующие:

$$1. x = L/3 \quad EIV = EI\theta_0 \frac{L}{3} + R_A \frac{L^3}{27 \cdot 6}; \quad EI\theta = EI\theta_0 + R_A;$$

$$2. x = 2L/3$$

$$EIV = EI\theta_0 \frac{2L}{3} + R_A \frac{8L^3}{27 \cdot 6} - F \frac{L^3}{27 \cdot 6} - q \frac{L^4}{81 \cdot 24};$$

$$EI\theta = EI\theta_0 + R_A \frac{4L^2}{9 \cdot 2} - F \frac{L^2}{9 \cdot 2} - q \frac{L^3}{27 \cdot 6};$$

$$3. x = L$$

$$EIV = 0; \quad EI\theta = EI\theta_0 + R_A \frac{L^2}{2} - F \frac{4L^2}{9 \cdot 2} - q \frac{8L^3}{27 \cdot 6};$$

$$4. x = 4L/3$$

$$EIV = EI\theta_0 \frac{4L}{3} + R_A \frac{16L^2}{9 \cdot 2} - F \frac{L^3}{6} - q \frac{L^4}{24} + q \frac{L^4}{81 \cdot 24} + R_B \frac{L^3}{27 \cdot 6};$$

$$EI\theta = EI\theta_0 + R_A \frac{16L^2}{9 \cdot 2} - F \frac{L^2}{2} - q \frac{L^3}{6} + q \frac{L^3}{27 \cdot 6} + R_B \frac{L^2}{9 \cdot 2}.$$

Результаты выполненных расчетов представлены в табл. 1.

Таблица 1

x	0	L/3	2L/3	L	4L/3
EIV	0.0	-85.33	-71.99	0.0	32.03
EIθ	-53.33	-21.33	29.34	32.0	40.00

Эпюры углов поворота и прогибов показаны на рис. 6. Максимальный прогиб следует определить для сечения, в котором угол поворота равен 0.

Абсцисса x_0 определяется решением кубического уравнения

$$x^3 - 5,667x^2 + 5,33x + 7,555 = 0, \quad (*)$$

которое получено при подстановке числовых значений известных параметров в уравнение углов поворота на втором участке балки:

$$EI\theta_0 + R_A \cdot x_0^2/2 - F(x_0 - L/3)^2/2 - q(x_0 - L/3)^3/6 = 0$$

Единственный действительный корень уравнения (*) дает значение абсциссы $x_0 = 2,7$ м. При подстановке этого значения x_0 в уравнение прогибов для второго участка балки, получим значение $V_{\max} = 92,68/EI$.

Подставляя полученное значение $|V_{\max}|$ в условие жесткости, с учетом того, что все размерности должны быть выражены в МН и м, получим:

$$\frac{92,68 \cdot 10^{-3}}{EI_z} \leq \frac{L}{400},$$

тогда требуемый момент инерции сечения:

$$I_z^{\text{тр}} \geq \frac{92,68 \cdot 10^{-3} \cdot 400}{E \cdot L} = \frac{92,68 \cdot 10^{-3} \cdot 400}{2 \cdot 10^5 \cdot 6} = 10^{-8} \cdot 3084 \text{ м}^4 = 3084 \text{ см}^4.$$

По сортаменту [5] или [6] ближайший момент инерции, превышающий 3084 см^4 , для двутаврового профиля № 24 $\Rightarrow I_z = 3460 \text{ см}^4$.

Так как по условию жесткости требуются большие размеры сечения, чем по условию прочности, окончательно принято: поперечное сечение балки I № 24, $I_z = 3460 \text{ см}^4$, $W_z = 289 \text{ см}^3$, $A = 34,8 \text{ см}^2$.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА № 2

Для расчетной схемы балки, показанной на рис. 7, требуется назначить размеры поперечного сечения из условий прочности и жесткости. Типы поперечного сечения:

- прямоугольное, отношение сторон $h:b = 4$;
- двутавровый профиль.

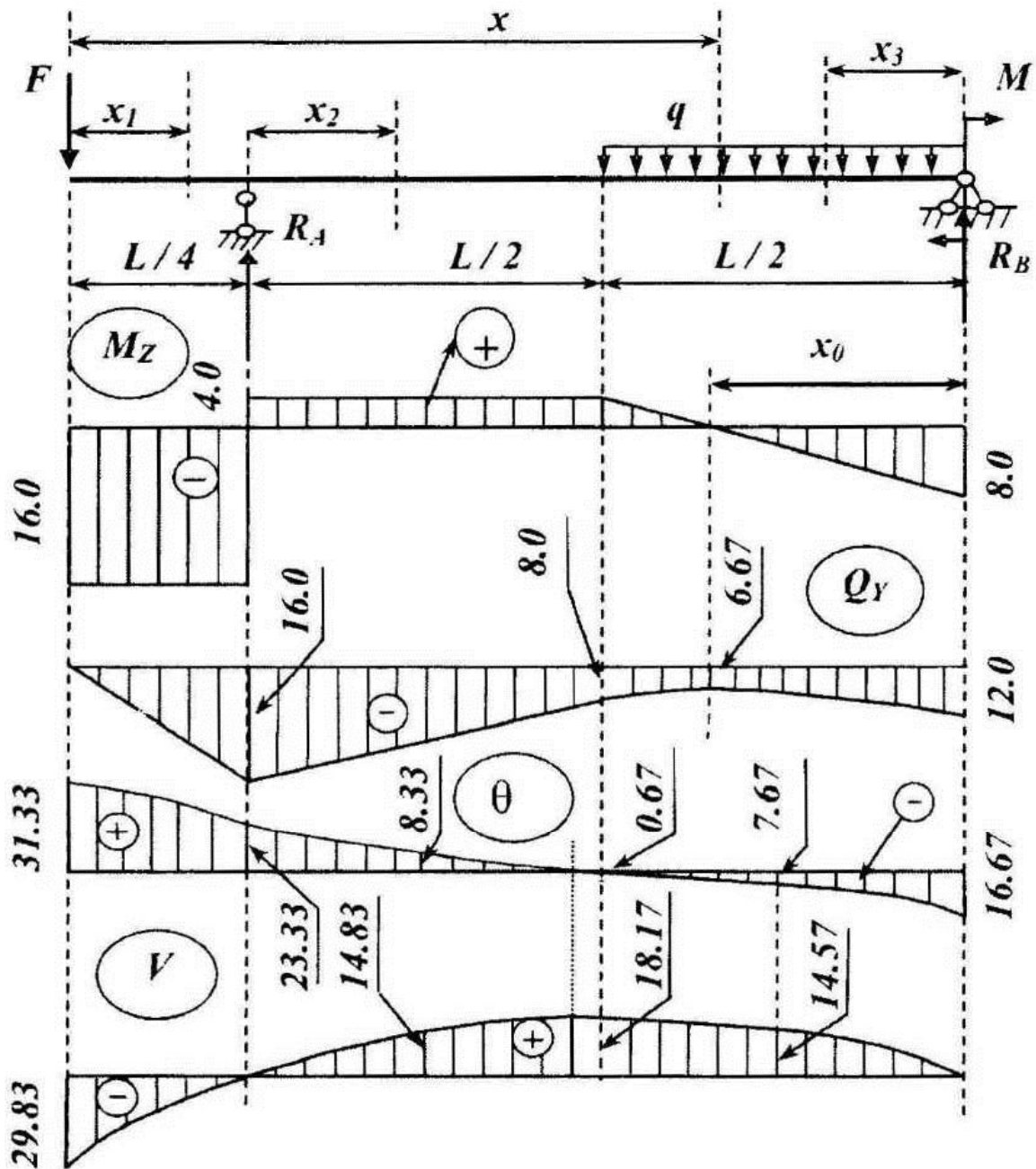


Рис. 7. Эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, углов поворота и прогибов

Расчет на прочность произвести по допускаемым напряжениям.

Исходные данные для проектирования: $L = 4$ м, $F = 16$ кН, $q = 6$ кН/м, $M = 12$ кН·м; $[\sigma_{II}] = 160$ МПа, $[\tau_s] = 130$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[V] = L/300$.

Расчет следует начать с определения величины и направления опорных реакций, для чего составляются следующие уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
\sum M_A &= R_B L - M - 3qL^2/8 + FL/4 = 0; \\
R_B &= (M + 3qL^2/8 - FL/4) / L = (12 + 36 - 16)/4 = 8.0 \text{ кН}; \\
\sum M_B &= R_A L + M - qL^2/8 - 5FL/4 = 0; \\
R_A &= (-M + qL^2/8 + 5FL/4) / L = (-12 + 12 + 80)/4 = 20.0 \text{ кН}; \\
\sum Y &= R_A + R_B - qL/2 - F = 20 + 8 - 12 - 16 = 0.0.
\end{aligned}$$

Для построения эпюр внутренних усилий, показанных на рис.7, балка разбивается на характерные участки, для каждого участка составляются аналитические выражения Q_y и M_z . Эпюра изгибающих моментов построена на сжатом волокне.

Сечение I ($0 \leq x_1 \leq L/4$)

$$Q_y = -F = -16 \text{ кН};$$

$$M_z = -F \cdot x_1;$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow M_z = 0; \quad x_1 = L/4 \Rightarrow M_z = -16 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Сечение II ($0 \leq x_2 \leq L/2$)

$$Q_y = -F + R_A = 4 \text{ кН};$$

$$M_z = -F(L/4 + x_2) + R_A \cdot x_2;$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow M_z = -16 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad x_2 = L/2 \Rightarrow M_z = -8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Сечение III ($0 \leq x_3 \leq L/2$)

$$Q_y = -R_B + q \cdot x_3;$$

$$x_3 = 0 \Rightarrow Q_y = -8 \text{ кН}; \quad x_3 = L/2 \Rightarrow Q_y = 4 \text{ кН};$$

$$M_z = -M + R_B \cdot x_3 - q \cdot x_3^2/2;$$

$$x_3 = 0 \Rightarrow M_z = -12 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad x_3 = L/2 \Rightarrow M_z = -8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

На рассматриваемом участке изгибающий момент достигает экстремума в том сечении, где поперечная сила равна нулю; положение этого сечения определяется из уравнения:

$$Q_y = -R_B + q \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 8/6 = 1.33 \text{ м};$$

$$M_{\max} = -12 + 8 \cdot 1.33 - 6 \cdot 1.33^2/2 = -6.67 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Расчет на прочность по нормальным напряжениям производится на максимальный (по модулю) изгибающий момент:

$$\sigma = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \leq [\sigma_{II}].$$

Из этого условия определяется величина требуемого момента сопротивления сечения:

$$W_z^{\text{тр}} \geq |M_{\text{max}}| / [\sigma_{\text{н}}] = 100 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 100 \text{ см}^3$$

Для прямоугольного сечения с отношением сторон $h:b = 4$ осевой момент сопротивления

$$W_z = b(4b)^2/6; \text{ тогда } 8b^3/3 \geq 100 \text{ см}^3;$$

$$b \geq \sqrt[3]{3 \cdot 100/8} = 3,4 \text{ см, тогда } h = 13,6 \text{ см; } A = 46,2 \text{ см}^2.$$

При назначении размеров двутаврового профиля по сортаменту [5] или [6] определяем, что требование $W_z^{\text{тр}} \geq 100 \text{ см}^3$ удовлетворяется для двутавра № 16, у которого $W_z = 109 \text{ см}^3$.

Проверка прочности по касательным напряжениям производится в опорном сечении, где действует максимальная (по модулю) поперечная сила:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{|Q_{\text{max}}| \cdot S_z^{\text{отс}}}{I_z \cdot b_i}$$

Для прямоугольного сечения максимальное касательное напряжение на уровне центра тяжести сечения с учетом того, что $I_z = bh^3/12$ и $S_z^{\text{отс}} = bh^2/8$:

$$\tau_{\text{max}} = 3Q_{\text{max}}/2A = 3 \cdot 16 \cdot 10^{-3} / 2 \cdot 46,2 \cdot 10^{-4} = 5,2 \text{ МПа.}$$

Для **II** №16 по сортаменту выбираются следующие параметры этого профиля: $I_z = 873 \text{ см}^4$, статический момент площади полусечения $S_z^{\text{отс}} = 62,3 \text{ см}^3$, толщина стенки двутавра $b = 5 \text{ мм}$, тогда максимальное касательное напряжение на уровне центра тяжести сечения:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{48 \cdot 10^{-3} \cdot 62,3 \cdot 10^{-6}}{873 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 68,5 \text{ МПа}$$

Выполненные расчеты показывают, что условие прочности по касательным напряжениям $\tau_{\text{max}} \leq [\tau_s] = 130 \text{ МПа}$ соблюдается для каждого типа сечения.

Так как для назначения размеров поперечного сечения из условия жесткости $|V_{\text{max}}| \leq [V]$ требуется определить величину максимального прогиба, необходимо построить эпюру вертикальных перемещений оси балки. Прогиб в произвольном сечении x для заданной расчетной схемы:

$$EIv_x = EIv_0 + EI\theta_0 \cdot x + M_0 \cdot x^2/2 + Q_0 \cdot x^3/6 + R_A \cdot (x - L/4)^3/6 - q \cdot (x - L/4)^4/24;$$

Из четырех начальных параметров в этом уравнении известны $M_0 = 0$ и $Q_0 = -F$. Два параметра неизвестны: $V_0 \neq 0$, $\theta_0 \neq 0$. Для их определения используем граничные условия:

$$1. x = L/4 \Rightarrow V = 0;$$

$$2. x = 5L/4 \Rightarrow V = 0.$$

Составив уравнения для определения прогибов в этих сечениях и приравняв каждое нулю, получим:

$$\begin{cases} EIv_{L/4} = EIv_0 + EI\theta_0 \cdot L/4 - FL^3/384 = 0; \\ EIv_{5L/4} = EIv_0 + EI\theta_0 \cdot 5L/4 - 125FL^3/384 + R_A \cdot L^3/6 - q \cdot L^4/192 = 0. \end{cases}$$

Решив систему этих уравнений, определим неизвестные начальные параметры: $EI\theta_0 = 31,33$; $EIV_0 = -29,83$.

Для построения эпюр прогибов и углов поворота составляются уравнения, по которым определяются перемещения в следующих сечениях балки:

при $x = L/4$

$$EIV = 0; EI\theta = EI\theta_0 - FL^2/32;$$

при $x = L/2$

$$EIV = EIv_0 + EI\theta_0 \cdot L/2 - FL^3/48 + R_A \cdot L^3/384;$$

$$EI\theta = EI\theta_0 - FL^2/8 + R_A \cdot L^2/32;$$

при $x = 3L/4$

$$EIV = EIv_0 + EI\theta_0 \cdot 3L/4 - 27FL^3/384 + R_A \cdot L^3/48;$$

$$EI\theta = EI\theta_0 - 9FL^2/32 + R_A \cdot L^2/8;$$

при $x = L$

$$EIV = EIv_0 + EI\theta_0 \cdot L - FL^3/6 + R_A \cdot 27L^3/384 - qL^4/6144.$$

$$EI\theta = EI\theta_0 - FL^2/2 + R_A \cdot 9L^2/32 - qL^3/384;$$

при $x = 5L/4$

$$EIV = 0; EI\theta = EI\theta_0 - 25FL^2/32 + R_A \cdot L^2/2 - qL^3/48.$$

Таблица 2

x	0	L/4	L/2	3L/4	L	5L/4
EIθ	31,33	23,33	8,33	-0,67	-7,67	-16,67
EIV	-29,83	0,0	14,83	18,17	14,57	0,0

Результаты расчета, полученные после подстановки в уравнения числовых значений входящих в них параметров, приводятся в табл. 2, а эпюры углов поворота сечений и вертикальные перемещения оси балки показаны на рис. 7.

По условию жесткости максимальный (по модулю) прогиб не должен превышать нормативный:

$V_{\max} = 29,83/EI_z \leq [V] = L/300$, выражая из этого условия требуемый момент инерции сечения и переведя размерность нагрузки из кН в МН, получим:

$$I_z^{\text{тр}} \geq 29,83 \cdot 10^{-3} \cdot 300 / 2 \cdot 10^5 \cdot 4 = 1118,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 1118,6 \text{ см}^4$$

По сортаменту [5] находим профиль, у которого момент инерции превышает требуемый. Для **II** № 18: $I_z = 1290 \text{ см}^4$, $A = 23,4 \text{ см}^2$, $W_z = 143 \text{ см}^3$.

Размеры прямоугольного поперечного сечения определяются из условия:

$$I_z^{\text{пр}} = b(4b)^3/12 \geq 1118,6 \text{ см}^4, \text{ т. е. } 16b^4/3 \geq 1118,6 \text{ см}^4,$$

$$b \geq \sqrt[4]{3 \cdot 1118,6 / 16} = 3,8 \text{ см},$$

$$h = 15,2 \text{ см}, A = 57,8 \text{ см}^2, W_z = 146,3 \text{ см}^3.$$

Так как полученные из условия жесткости размеры поперечного сечения превышают размеры, полученные из условий прочности, окончательно назначено:

прямоугольное сечение $b \times h = 3,8 \times 15,2 \text{ см}$;

сечение из двутаврового профиля № 18.

Студентам очной формы обучения перед выполнением расчетно-графической работы, а студентам-заочникам перед выполнением контрольной работы рекомендуется изучить теоретический материал о расчетах на прочность и жесткость при поперечном изгибе стержней и рассмотреть приведенные примеры расчетов в следующих учебниках:

[1], гл.6, § 6.1 ÷ 6.3; гл.7, § 7.1, 7.2, гл.8, §8.1 ÷ 8.3, 8.5;

[2], гл. 7, § 7.5, 7.6, 7.8, гл.9, § 9.1 ÷ 9.4;

[3], гл.10, § 60 ÷ 63, 68;

[4], гл.7, § 7. 6 ÷ 7.8, 7.10, 7.13, 7.14.

Сведения о геометрических характеристиках прокатных профилей приводятся в справочной литературе [5], гл.2, §2.9, табл.2 ÷ 6, [6], гл.8, §8.6, табл.8.3 ÷ 8.6.

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие напряжения возникают в сечении балки при чистом и при поперечном изгибе?
2. Как распределяются нормальные и касательные напряжения по высоте сечения ?
3. Как влияет переменная ширина сечения на характер эпюры касательных напряжений?
4. Как записать условия прочности при поперечном изгибе и как его использовать при определении размеров сечения?
5. Какими методами можно определить перемещения при поперечном изгибе балок?
6. На чем основывается принцип определения неизвестных начальных параметров системы?
7. Как записать и как использовать условие жесткости при назначении размеров поперечного сечения балки?

5. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Расчеты на прочность и жесткость при поперечном изгибе

Для заданной расчетной схемы балки с шарнирными опорами требуется из условий прочности и жесткости назначить поперечное сечение двух типов:

- а) прямоугольное, б) из прокатных профилей.
- Последовательность выполнения задания:
- определить величину и направление опорных реакций;
 - записать аналитические выражения для определения внутренних усилий на каждом участке рассчитываемой балки, определить их величину и построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (эп. QY [кН], MZ [кН·м]);
 - по максимальному значению изгибающего момента назначить размеры поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям. Произвести проверку прочности назначенного сечения по касательным напряжениям;
 - для определения угловых и линейных перемещений составить уравнения метода начальных параметров по каждому участку

рассчитываемой балки, определить максимальный (по модулю) прогиб и из условия жесткости назначить размеры поперечного сечения. Построить эпюры углов поворота и прогибов;

– для назначенных поперечных сечений (прямоугольного и из прокатных профилей) построить эпюры нормальных и касательных напряжений.

Для всех вариантов заданий принять:

– материал конструкции – сталь с модулем упругости $E = 2,0 \cdot 10^5$ МПа;

– нормативный прогиб $[V] \leq L/300$

Для всех нечетных вариантов расчетных схем сечение проектировать из двутаврового профиля, принять соотношение сторон для прямоугольного сечения $b:h = 1:3$; для всех четных вариантов расчетных схем сечение проектировать из двух швеллеров, а для прямоугольного сечения соотношение сторон $b:h = 1:4$.

Расчетные схемы, параметры нагрузки и механические характеристики материала для каждого варианта задания приводятся в приложениях №1 и № 2.

6. ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учебн. Для вузов. – М.: Высш. Шк., 2001. – 560 с.

2. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: Учебн. для вузов под ред. Г.С. Варданяна. – М.: Изд-во АСВ, 1995. – 568 с.

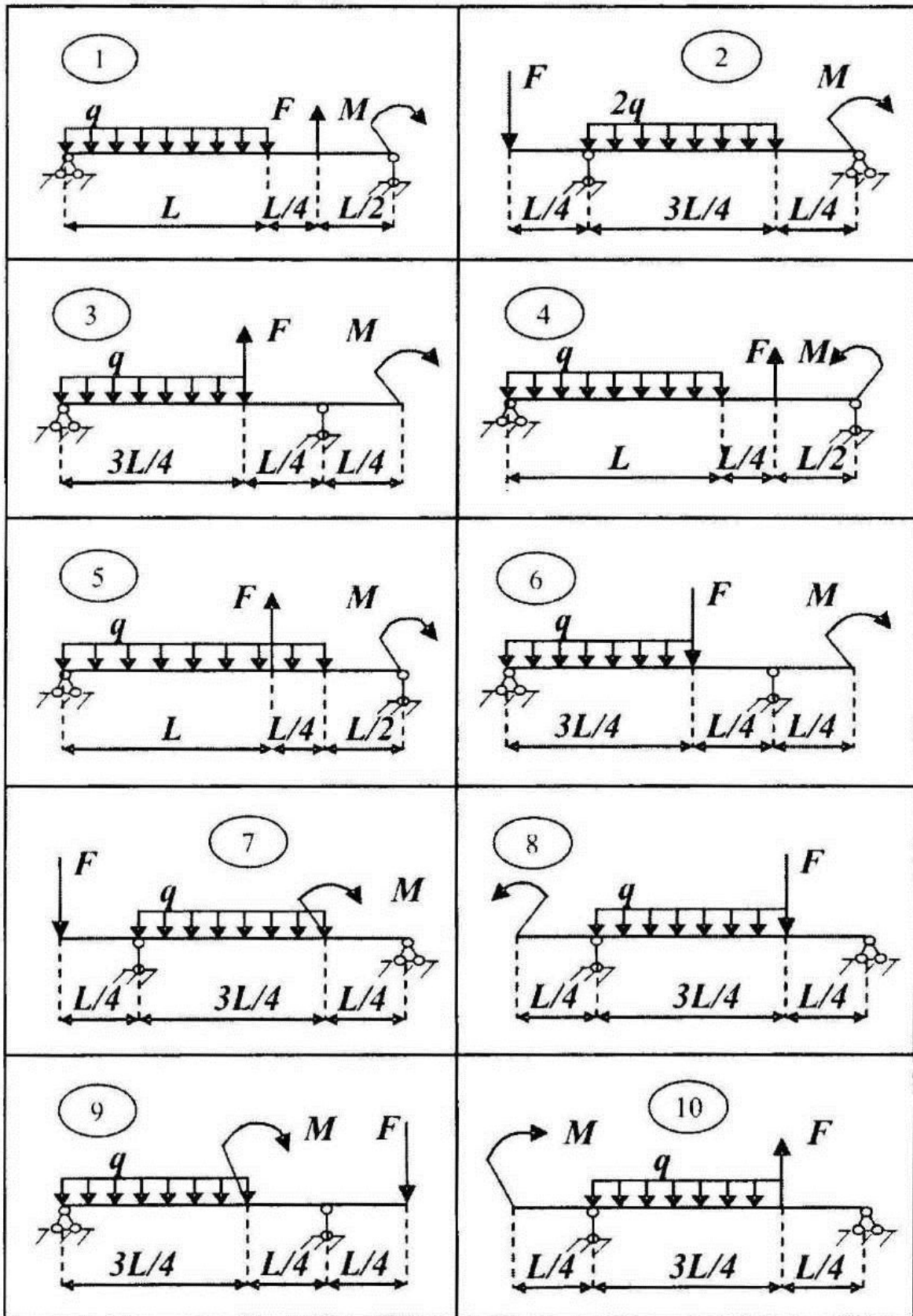
3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов: Учебн. Для вузов. – М.: Высш. Шк. 1989, 624 с.

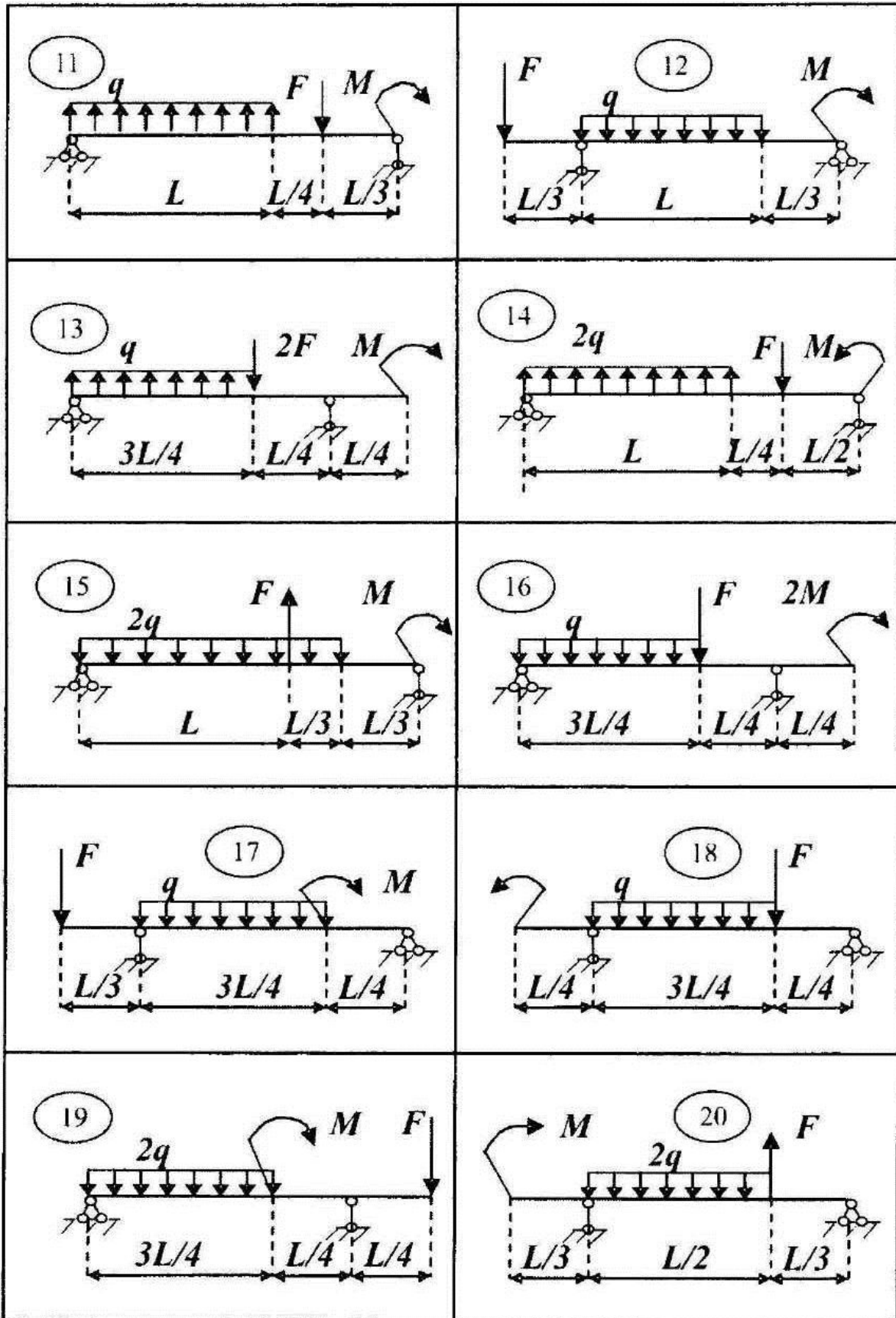
4. Сопротивление материалов: Учебн. Для вузов под ред. Г.С. Писаренко. – Киев: Высш. Шк., 1986. – 736 с.

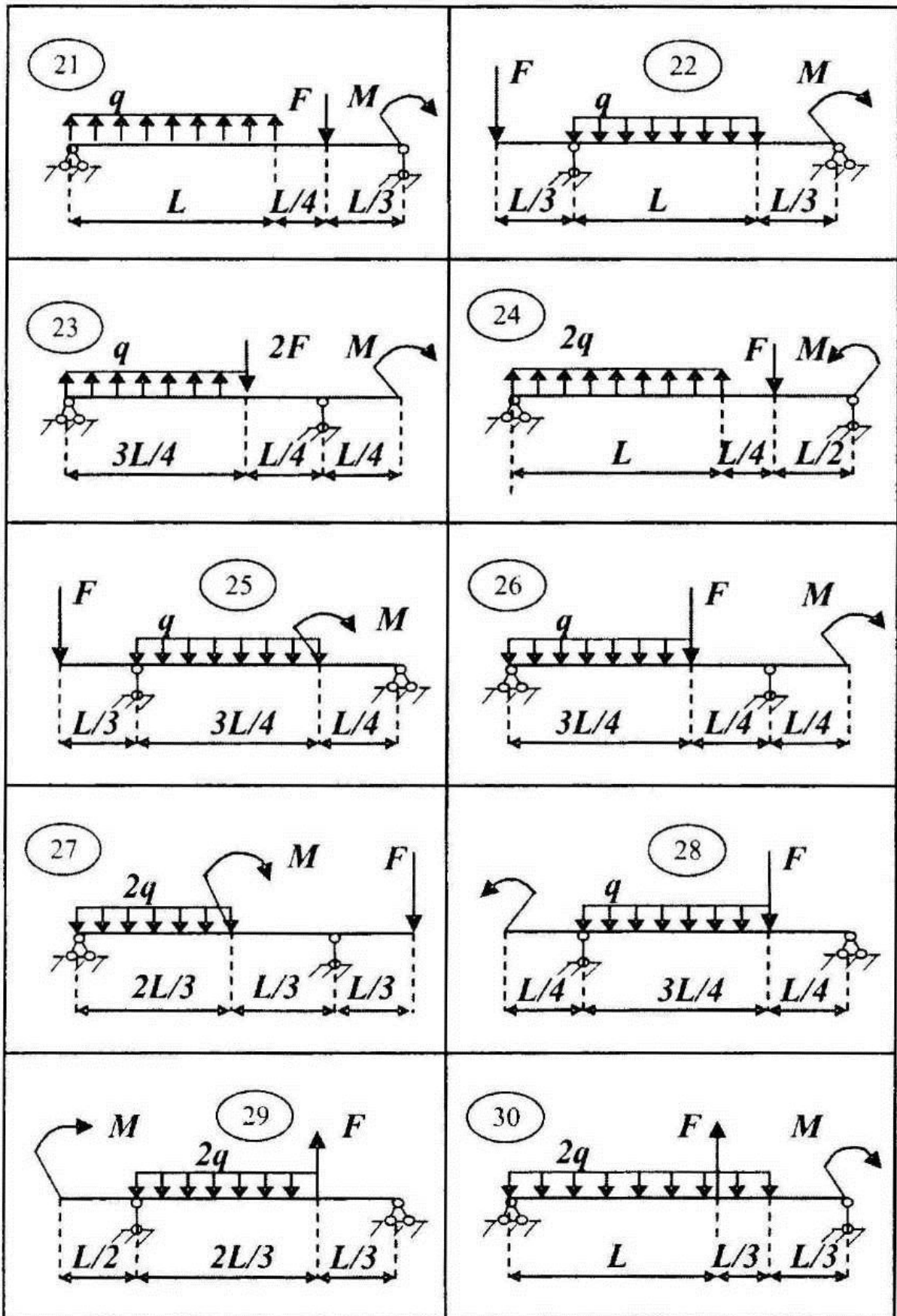
5. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов – Киев: Наук. Думка, 1988. – 736 с.

6. Винокуров Е.Ф., Балыкин М.К., Голубев И.А. и др. Справочник по сопротивлению материалов – Мн.: Наука и техника, 1988. – 464 с.

Приложение № 1
 Расчетные схемы балок







Приложение № 2
Варианты исходных данных

№ п/п	L, м	F, кН	M, кН·м	q, кН/м	Тип профи- ля	Расчетное сопротивление МПа	
						RI	RCP
1	4,8	16	12	8	□	200	140
2	5,4	18	16	6	┌	190	135
3	6,0	12	18	9	□	180	130
4	4,2	21	14	6	┌	170	125
5	3,6	20	9	8	┌	160	120
6	3,0	18	12	6	┌	150	110
7	6,0	30	24	12	┌	190	130
8	5,4	12	9	8	□	180	120
9	4,8	24	16	4	┌	170	135
10	4,2	14	21	12	┌	160	115
11	3,6	12	18	4	┌	200	135
12	3,0	15	9	12	┌	170	115
13	4,0	20	16	8	□	180	120
14	6,0	18	14	10	┌	190	125
15	8,0	16	24	4	┌	200	130