

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА
Учебное пособие

В пособии рассматриваются решения типовых задач, входящих в курс «Сопротивление материалов» по разделу «Изгиб прямого бруса». Учебное пособие включает необходимые теоретические сведения и расчетные формулы, используемые при решении задач, выполнении РГЗ, подготовке к сдаче зачетов и экзаменов, представленны решения типовых задач.

Предназначено для студентов, как очной формы обучения, так и заочной.

Предисловие

Наибольшие трудности у студентов, изучающих курс «Сопротивления материалов» возникают при решении задач. Данное пособие облегчит процесс изучения курса и поможет овладеть методикой решения задач.

Существенное сокращение часов аудиторных занятий влечет за собой увеличение объема самостоятельной подготовки и требует от студентов, изучающих курс «Сопротивление материалов», значительной индивидуальной работы. Поэтому в последнее время наметилась тенденция к разработке и применению в учебном процессе пособий, где достаточно подробно изложены основные теоретические сведения и довольно большое число примеров решения задач различной сложности по разделам курса. Отличительной особенностью данного пособия является то, что в нем рассматриваются в достаточном объеме примеры раздела «Изгиб», которые довольно просты, не требуют значительных расчетов и охватывают основные проблемы данного раздела.

Целью данного пособия по разделу «Изгиб», составленного на основе всестороннего анализа разработанных и использованных в настоящее время работ, а также ранее опубликованных учебных пособий по разделам «Кручение бруса» и «Растяжение – сжатие», является попытка расширить круг вопросов, рассматриваемых на практических занятиях в условиях дефицита учебного времени, привить студентам навыки самостоятельной подготовки и помочь усвоить методы решения задач, предлагаемых на зачетах и экзаменах.

Введение

Разработанное учебное пособие предназначено в первую очередь для расширения круга вопросов, рассматриваемых на практических занятиях в условиях сокращения времени учебного процесса по разделу «Изгиб». Кроме того, оно должно помочь студентам в усвоении методов решения задач, предлагаемых в расчетно-графических заданиях, на зачетах и экзаменах.

Отличительной особенностью данного пособия является то, что в нем рассматриваются в достаточном объеме примеры одного раздела «Изгиб», которые довольно просты, не требуют значительных расчетов и охватывают основные проблемы данного раздела.

В настоящем издании, подготовленном коллективом преподавателей учебного курса «Сопротивление материалов» НИ РХТУ и ТулГУ, для учащихся механического факультета рассматривается нагружение бруса поперечными силами и парами сил, лежащими в одной, проходящей через ось бруса, силовой плоскости. Существуют более сложные формы изгиба, которые будут рассмотрены в следующих учебных пособиях.

Работа с данным пособием предполагает, что только после усвоения теоретической части изучаемого курса следует приступать к разбору решения задач, а затем переходить к самостоятельному решению задач данного раздела.

1. Основные теоретические сведения и расчетные формулы изгиба прямого бруса

Изгибом называется деформация бруса, сопровождающаяся искривлением его оси.

В данном разделе рассматривается нагружение бруса поперечными силами и парами сил, лежащими в одной, проходящей через ось бруса, плоскости, называемой *силовой*. Линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения называется *силовой линией*. Если силовая линия совпадает с главной центральной осью, изогнутая ось бруса (его *упругая линия*) располагается в силовой плоскости и такой вид изгиба называется *плоским поперечным*, в противном случае *косым*. Существуют более сложные формы изгиба, которые будут рассмотрены далее.

Прямой брус, работающий на изгиб, называется *балкой*. На расчетной схеме балку принято заменять ее осью, при этом все нагрузки приводятся к ее оси (**рис.1**). Часть балки, расположенная между опорами, называется ее *пролетом*, а свешивающаяся ее часть - *консолью*.

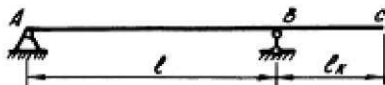


Рис.1. Ось расчетной балки.

В теории изгиба употребляют термин *волокно*, уподобляя сплошное вещество, из которого сделан брус, веществу волокнистой структуры дерева, что, вообще говоря, неправильно. Мы будем называть волокном материальную линию, бывшую до деформации прямой, параллельной оси бруса. Координаты x и y точки пересечения волокна с плоскостью поперечного сечения назовем *координатами волокна*. Еще раз подчеркнем, что понятие *волокно* для кристаллического материала условно, но весьма удобно для рассуждений.

Для того чтобы балка могла воспринимать нагрузки и передавать их на основание или другие части конструкции, она должна иметь опорные устройства (опоры). Конструктивные формы опор весьма разнообразны. Чаще всего встречаются следующие основные типы:

Шарнирно - подвижная опора допускает поворот опорного сечения балки и его перемещение параллельно опорной поверхности. Реакция этой опоры проходит через шарнир перпендикулярно опорной поверхности (рис.2);

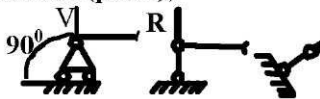


Рис. 2 Шарнирно подвижная опора

Шарнирно - неподвижная опора допускает только поворот опорного сечения балки. Реакция проходит через ось шарнира, обычно ее разлагают на две составляющие V и H (рис.3);

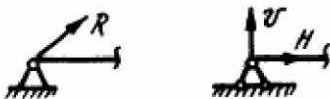


Рис.3 Шарнирно-неподвижная опора.

Подвижная заделка представляет собой паз, который допус-

кает смещение опорного сечения параллельно опорным поверхностям. В опоре действуют две реактивные составляющие: сила V , перпендикулярная опорной плоскости, и опорный момент M (рис.4.);



Рис.4. Подвижная опора.

Заделка (жесткое защемление) исключает угловое и линейное перемещения опорного сечения. Реакция заделки представляется ее тремя составляющими: силой V , перпендикулярной опорной плоскости, силой H и опорным моментом M (рис. 5).

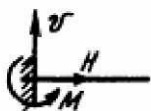


Рис. 5. Жесткая заделка.

Опорные реакции определяются из соответствующих уравнений статики. Если их достаточно для того, чтобы найти реакции опор, балку называют *статически определимой*, в противном случае балка *статически неопределима*. Способы вычисления опорных реакций рассматриваются в курсе теоретической механики и для статически определимой балки (рис. 6) производятся в следующем порядке:

1. обычно опоры обозначаются буквами A, B , либо цифрами 1, 2. Перед составлением уравнений равновесия необходимо выбрать направление опорных реакций и изобразить их на схеме. Если к балке приложена распределенная нагрузка, при вычислениях опорных реакций она заменяется ее равнодействующей, численно равной площади эпюры этой нагрузки и приложенной в ее центре тяжести.

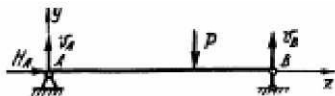


Рис. 6. Статически определимая балка.

Сосредоточенная пара сил, в каком бы сечении балки она не была бы приложена, входит непосредственно в уравнение равновесия;

2. три неизвестные реакции опор находятся из следующих уравнений равновесия:

$\sum Z = 0$, отсюда находят H_A . Для большинства балок внешние силы перпендикулярны их осям, поэтому записанное уравнение удовлетворяется тождественно ($H_A = 0$) и его не записывают;

$\sum M_B = 0$ – сумма моментов всех сил, приложенных к балке, относительно второй опоры (опоры B) равна нулю, что позволяет вычислить величину реакции V_A ;

$\sum M_A = 0$ – сумма моментов всех сил, приложенных к балке, относительно первой опоры (опоры A) равна нулю, что позволяет вычислить величину реакции V_B ;

3. для контроля правильности вычислений обычно используют равенство нулю суммы проекций всех сил, включая реакции опор, на вертикальную ось ($\sum Y = 0$) или условие равенства нулю суммы моментов всех сил относительно произвольно выбранной точки C , не совпадающей ни с A , ни с B .

Примечание: если балка имеет в пролете промежуточный шарнир, к трем основным уравнениям статики добавляют дополнительное уравнение: сумма моментов относительно промежуточного шарнира от всех сил, расположенных по одну сторону от него, равна нулю. Это дополнительное уравнение позволяет вычислить "лишнюю" опорную реакцию.

Рассмотрим деформацию балки в случае ее простейшего нагружения - *чистом изгибе* парами сил, приложенным к ее торцевым сечениям (рис. 7).



Рис. 7. Чистый изгиб балки.

Как показывает опыт, поперечные сечения балки, оставаясь плоскими, поворачиваются друг относительно друга на некоторый угол, оставаясь перпендикулярными к ее оси. Верхние продольные волокна при этом укорачиваются (сжимаются), а нижние - удлиняются (растягиваются). В одном и том же слое волокна деформируются одинаково. Очевидно, существует слой волокон, длина которых в процессе деформации не изменяется. Этот слой называют *нейтральным*. Волокна, принадлежащие нейтральному слою, ни сжаты, ни растянуты, они только искривлены.

Пересечение нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения происходит по прямой, называемой *нейтральной (нулевой) линией (осью)*. При плоском поперечном изгибе она проходит через центр тяжести сечения перпендикулярно силовой линии.

При плоском поперечном изгибе внутренние напряжения, возникающие в поперечном сечении, приводятся к поперечной силе Q и изгибающему моменту M (рис.8).

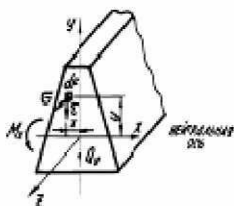


Рис.8. Распределение сил и напряжений при плоском поперечном изгибе.

Поперечная сила - это равнодействующая внутренних касательных сил в поперечном сечении:

$$Q = \int_F \tau \cdot dF \quad (1.1)$$

Изгибающим моментом называется результирующий момент относительно нейтральной оси всех внутренних сил, возникающих в поперечном сечении балки:

$$M = \int_F \sigma \cdot dF \cdot y \quad (1.2)$$

Величины Q и M определяются с помощью *метода сечений*.

Поперечная сила Q в произвольно выбранном сечении балки равна алгебраической сумме проекций на нормаль к оси балки всех сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения:

$$Q = \sum_{i=1}^n P_i \quad (1.3)$$

Изгибающий момент в произвольно выбранном сечении балки равен алгебраической сумме моментов от всех сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно нейтральной оси этого сечения:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (1.4)$$

Знак поперечной силы Q и изгибающего момента M легко можно установить с помощью рис. 9 и 10.



Рис. 9. Определение знака поперечной силы.

Поперечная сила Q в сечении положительна, если ее векторы стремятся вращать части рассеченной балки по часовой стрелке (рис. 9а), при вращении в противоположном направлении поперечной силе приписывается знак минус (рис. 9б). Изгибающий момент M положителен, если он вызывает сжатие верхних волокон балки (рис. 10а), а при растяжении верхних волокон изгибающий момент отрицателен (рис. 10 б).



Рис. 10. Определение знака изгибающего момента.

Между поперечной силой Q , изгибающим моментом M и интенсивностью распределенной нагрузки q , приложенной к балке, существуют следующие дифференциальные зависимости:

$$q = \frac{dQ}{dM}, \quad (1.5)$$

$$Q = \frac{dM}{dz}, \quad (1.6)$$

$$q = \frac{d^2 M}{dz^2}. \quad (1.7)$$

Эти зависимости позволяют установить некоторые характерные особенности эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, используемые при построении эпюр и контроле полученных графиков.

Из анализа формул (1.5) - (1.7) следует:

1. При отсутствии распределенной нагрузки, приложенной к балке, эпюра поперечной силы ограничена горизонтальной прямой, параллельной ее оси, а эпюра изгибающего момента - наклонной прямой (рис. 11). Если при этом $Q > 0$, изгибающий момент возрастает, а при $Q < 0$ - убывает. В сечении, где к балке приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q будет скачок на величину этой силы, а на эпюре изгибающего момента - перелом, острие которого направлено против действия приложенной силы.

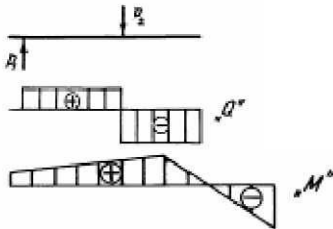


Рис. 11. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов при действии сосредоточенных сил.

2. если на участке балки $Q = 0$, эпюра изгибающего момента параллельна оси балки (рис. 12), при этом изгибающий момент, оставаясь постоянным, может быть как положительным, так и отрицательным.

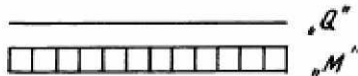


Рис. 12. Эпюра изгибающего момента при $Q=0$.

3. если в сечении балки приложена пара сил (сосредоточенный момент), на эпюре M будет скачок, равный величине приложенной пары, на эпюре Q изменений не будет (рис. 13).

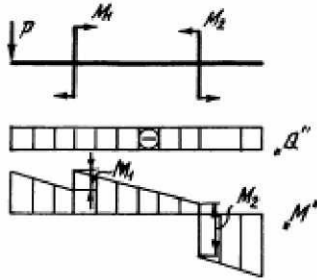


Рис. 13. Эпюры « Q » и « M » при действии сосредоточенного момента.

4. если к участку балки приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , эпюра поперечной силы ограничена наклонной прямой (рис. 14), а эпюра M - квадратной параболой. При построении эпюры изгибающих моментов на сжатых волокнах выпуклость параболы направлена в сторону, противоположную направлению действия распределенной нагрузки. В сечении, где поперечная сила, изменяясь непрерывно, обращается в ноль, изгибающий момент экстремален: максимален при изменении знака поперечной силы с плюса на минус и минимален в противоположном случае (рис. 14).

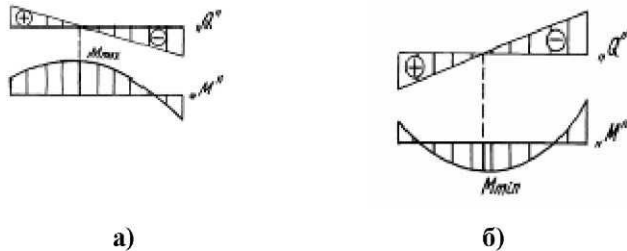


Рис. 14. Эпюры « Q » и « M » при действии распределенной нагрузки

5. при отсутствии консоли изгибающий момент над шарнирной опорой равен нулю. Если в балке имеется промежуточный шарнир, изгибающий момент в этом шарнире равен нулю (рис. 15)

При построении эпюр на сжатых волокнах положительные значения Q и M откладываются в масштабе вверх, отрицательные - вниз от осей эпюр.

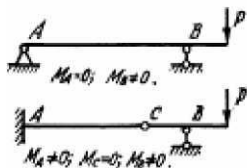


Рис.15. Варианты конструкций опор балки.

Существует несколько методов построения эпюр, два из которых рассматриваются в данном разделе:

1. аналитический способ (по уравнениям);
2. построение по характерным точкам.

Рассмотрим первый способ. По этому способу балка разбивается на участки, в пределах которых выражения для вычисления изгибающего момента и поперечной силы остаются постоянными. Границами участков служат сечения, в которых приложены

сосредоточенные силы, пары сил, начинаются или заканчиваются распределенные нагрузки, имеются опоры или промежуточные шарниры.

В пределах каждого участка выбирается какое - либо произвольное сечение на расстоянии z от начала координат и для этого сечения составляются выражения для вычисления Q и M : $Q = f(z)$, $M = f(z)$. Начало координат можно располагать в крайнем левом или крайнем правом сечениях балки, в начале или конце любого участка. Придавая z несколько значений в пределах каждого участка, получим соответствующие значения Q и M , по которым строятся эпюры.

Второй способ построения эпюр так же предусматривает разбиение балки на участки. Значения Q и M вычисляются в характерных точках (на границах участков), а также там, где данный силовой фактор имеет экстремальное значение. Вычисленные значения усилий откладываются в масштабе от оси балки и соединяются прямыми или кривыми линиями; очертание эпюры устанавливается на основе дифференциальных зависимостей (1.5) - (1.7).

При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают нормальные и касательные напряжения, величина которых зависит как от внутренних силовых факторов, так и от формы и размеров сечения.

Нормальное напряжение в любой точке поперечного сечения определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{M}{I_x} \cdot y, \tag{1.8}$$

где: M - изгибающий момент в данном сечении;

I_x - момент инерции сечения относительно нейтральной оси;

y - расстояние от точки, в которой определяется напряжение, до нейтральной оси (рис. 16 а).

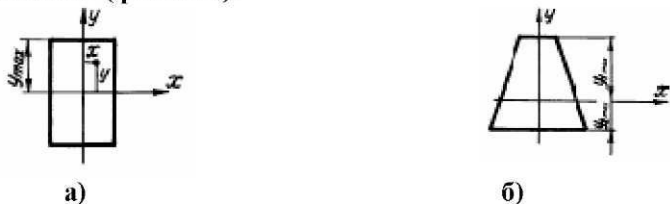


Рис. 16. Схемы определения нормальных напряжений в любой точке поперечного сечения бруса.

Из формулы (1.8) следует, что нормальные напряжения постоянны по ширине сечения и, изменяясь по линейному закону по его высоте, достигают максимальных значений в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси :

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_x} \cdot y_{\max} . \quad (1.9)$$

Вводя обозначение W для новой геометрической характеристики сечения, называемой *осевым моментом сопротивления*:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \quad (1.10)$$

получаем:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x} \quad (1.11)$$

Если сечение несимметрично относительно нейтральной оси, вычисляются два значения W (осевого момента сопротивления) путем подстановки в формулу (1.10) значений ординат для крайних растянутых и сжатых волокон (рис. 16б):

$$\min \sigma = \frac{M}{W_2} , \quad W_{2x} = \frac{I_x}{y_{2\max}} \quad (1.12)$$

Напряжения в крайних растянутых и сжатых волокнах при этом различны:

$$\max \sigma = \frac{M}{W_1} , \quad \min \sigma = \frac{M}{W_2} . \quad (1.13)$$

Условие прочности при изгибе для пластичных материалов:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma] . \quad (1.14)$$

Для хрупких материалов, имеющих существенно различные пределы прочности при растяжении $\sigma_{\sigma.p}$ и сжатии $\sigma_{\sigma.c}$ требуется про-

верка прочности по наибольшим растягивающим σ_p и наибольшим сжимающим напряжениям $\sigma_{сж}$:

$$\sigma_p = \frac{M_{\max}}{I_x} \cdot y_p \leq [\sigma]_p, \quad \sigma_{сж} = \frac{M_{\max}}{I_x} \cdot y_{сж} \leq [\sigma]_{сж};$$

где: $[\sigma]_p = \sigma_{a.p} / n$, $[\sigma]_{сж} = \sigma_{a.сж} / n$; n - запас прочности.

Используя условие прочности при изгибе, можно решить три основных задачи сопротивления материалов:

1 - подобрать поперечное сечение балки, определив необходимый момент сопротивления при изгибе:

$$W_x \geq \frac{M}{[\sigma]}$$

Если требуется подобрать сечение прокатного профиля, следует в таблицах сортамента найти нужный номер профиля, момент сопротивления которого наиболее близок к вычисленному. Превышение напряжений в поперечном сечении по сравнению с допускаемыми не должно быть больше, чем 5%.

Зная требуемый момент сопротивления, можно найти размеры поперечных сечений таких простых фигур, как круг, прямоугольник или сложной фигуры, которую можно разбить на простые.

Если балка изготовлена из материала, неодинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, и эпюра M имеет участки разных знаков, то следует дополнительно провести расчет на прочность по растягивающим напряжениям для сечения, где имеется наибольший момент противоположного знака.

2 - найти допускаемый по условию прочности изгибающий момент, действующий в поперечном сечении балки:

$$[M_{\max}] \leq W_x \cdot [\sigma];$$

3 - проверить прочность балки, вычислив максимальные нормальные напряжения, действующие в ее поперечном сечении, и сравнить их с допускаемыми. При плоском поперечном изгибе в сечении балки возникают не только нормальные, но и касательные напряжения, которые можно определить по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{омс}}{I_x \cdot b(y)}, \quad (1.15)$$

где: $S_x^{омс}$ - статический момент площади отсеченной части относительно нейтральной оси сечения;

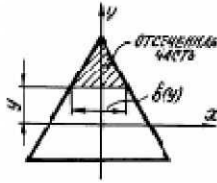


Рис. 17. Схема определения касательных напряжений.

$b(y)$ – ширина сечения на уровне той точки, где определяется напряжение (рис. 17).

Из формулы (1.15) следует, что касательные напряжения не изменяются по ширине балки. По высоте сечения распределение касательных напряжений зависит от его формы, в наиболее удаленных от нейтральной линии волокнах касательные напряжения равны нулю, а максимальных значений достигают на нейтральной линии. Заметим, что в балках сплошного сечения величина касательных напряжений по сравнению с нормальными обычно невелика, и проверять прочность по касательным напряжениям, как правило, нет необходимости.

Рассмотрим определение перемещений в балках при изгибе.

При действии на балку внешних сил (рис. 18) происходит искривление ее оси, которая в деформированном состоянии называется *упругой линией*.

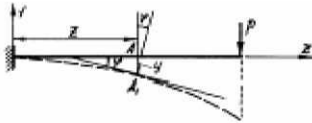


Рис. 18. Схема расчета упругой линии балки.

Деформация балки характеризуется двумя величинами: 1 - прогибом, т.е. перемещением центра тяжести ее поперечного сечения; 2 - углом поворота (углом, на который поворачивается поперечное сечение вокруг нейтральной оси). Прогибы обычно принято обозначать буквой y , либо f , либо $f(z)$, а угол поворота - φ или y' . Наибольший прогиб называется *стрелой прогиба*.

Уравнение $y = f(z)$, выражающее зависимость между прогибом y и координатой z сечения, называется *уравнением упругой линии*. Приближенное дифференциальное уравнение упругой линии записывается в виде:

$$E \cdot I_x \cdot y'' = M(z) \quad (1.16)$$

Путем его интегрирования можно получить выражения для вычисления прогибов и углов поворота сечений балок.

Следует заметить, что при определении перемещений при изгибе, дифференциальное уравнение упругой линии используется сравнительно редко, предпочтение отдается другим методам, в частности *методу начальных параметров*, в котором используется *универсальное уравнение упругой линии*. Последнее записывается в следующем виде при указанных на рис. 19 направлениях нагрузок:

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot z + \sum \frac{M(z-a)^2}{2!} + \sum \frac{P(z-b)^3}{3!} + \sum \frac{q(z-c)^4}{4!} \quad (1.17)$$

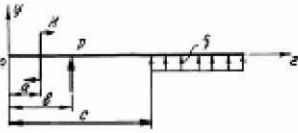


Рис. 19. Расчет универсального уравнения упругой линии

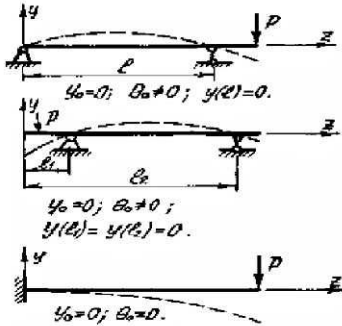


Рис. 20. Схемы определения начальных параметров уравнения упругой линии.

Здесь y_0 и θ_0 , называемые начальными параметрами, соответственно прогиб и угол поворота в начале координат. Начальные параметры определяются из условий закрепления балки (рис. 20) и могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Что касается других сла-

гаемых, то их знак зависит от того, положительный или отрицательный изгибающий момент создаст данная нагрузка в сечении с абсциссой z .

Используя универсальное уравнение упругой линии для определений деформаций балок, следует иметь в виду следующее:

1. при определении прогиба в сечении с координатой z в уравнение входят лишь те нагрузки, которые расположены на участке балки от начала координат до этого сечения (выражения в круглых скобках должны быть при этом положительны);

2. если распределенная нагрузка не доходит до конца балки, ее следует продолжить, а для компенсации приложить такую же нагрузку, но противоположного направления. Уравнение углов поворота может быть легко получено из уравнения прогибов путем его дифференцирования по координате z :

$$E \cdot I_x \cdot y' = E \cdot I_x \cdot \theta_0 + \sum \frac{M \cdot (z-a)}{1!} + \sum \frac{P \cdot (z-b)^2}{2!} + \sum \frac{q \cdot (z-c)^3}{3!} \quad (1.18)$$

2. Примеры решения типовых задач на построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе

2.1. Построение эпюр для балки, защемленной одним концом

Пример. Построить аналитическим способом эпюры Q и M для заданной балки (рис. 21 а).

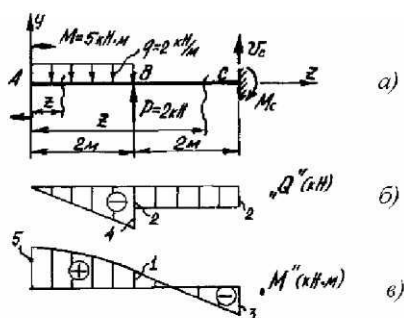


Рис. 21. Схема нагружения балки и эпюры « Q » и « M »

Решение. Рассматриваемая балка имеет два участка нагружения. В защемлении C возникают вертикальная опорная реакция V_C и опорный момент M_C .

Помещаем начало координат в левое сечение балки, тогда опорные реакции в выражения Q и M не войдут и их не надо вычислять для построения эпюр. Для каждого участка выбираем произвольное поперечное сечение, положение которого определяется координатой z , и составляем аналитические выражения для Q и M , справедливые в пределах рассматриваемого участка.

Участок AB ($0 \leq z \leq 2, m$)

$$Q(z) = -q \cdot z;$$

$$M(z) = -\frac{q \cdot z^2}{2} + M = -\frac{2 \cdot z^2}{2} + 5 = -z^2 + 5$$

Из этих уравнений следует, что на первом участке поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент по закону квадратной параболы. Подставляя в уравнения числовые значения, получим:

$$\text{при } z = 0 \quad Q = 0; \quad \text{при } z = 2 \text{ м} \quad Q = 4 \text{ кН};$$

$$\text{при } z = 0 \quad M = 5 \text{ кН м}; \quad \text{при } z = 2 \text{ м} \quad M = +1 \text{ кН м}.$$

Участок BC ($2 \leq z \leq 4 \text{ м}$)

Очевидно, что поперечная сила в пределах второго участка постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Записываем уравнения для вычисления Q , M и, подставляя в числовые значения, получим:

$$Q(z) = -q \cdot 2 + P = -2 \cdot 2 + 2 = -2 \text{ кН}; \quad \text{при } z = 2 \text{ м} \text{ и } z = 4 \text{ м}$$

$$Q = -2 \text{ кН}.$$

$$M(z) = -q \cdot 2 \cdot (z - 1) + M + P \cdot (z - 2) = -2 \cdot 2 \cdot (z - 1) + 5 + 2 \cdot (z - 2);$$

$$\text{при } z = 2 \text{ м} \quad M = -3 \text{ кН м}; \quad \text{при } z = 4 \text{ м} \quad M = -3 \text{ кН м}.$$

Выбрав масштаб, откладываем вычисленные значения ординат (положительные вверх, отрицательные - вниз) и строим соответствующие графики - эпюры Q и M (рис. 21б, в).

2.2. Построение эпюр при действии на свободный конец балки сосредоточенного момента

Пример. Построить аналитическим способом эюры

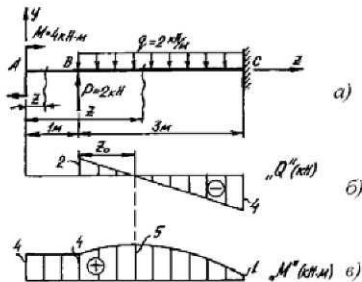


Рис. 22. Схема нагружения балки и эюры « Q » и « M »

Q и M для заданной балки (рис. 22 а).

Решение. Разбиваем балку на два участка AB и BC и записываем аналитические выражения $Q(z)$ и $M(z)$ для каждого участка.

Участок AB :

$$Q(z) = 0 ;$$

$$M(z) = 4 \text{ кНм} .$$

Участок BC :

$$Q(z) = P - q \cdot (z - 1) ;$$

$$M(z) = M + P \cdot (z - 1) - \frac{q \cdot (z - 1)^2}{2}$$

Строим эюры Q и M . В пределах первого участка поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент постоянен (рис. 22 б, в).

На участке BC эюра Q ограничена наклонной прямой, а эюра M ограничена квадратной параболой. Очевидно, что в сечении с абсциссой z_0 изгибающий момент имеет максимум. Расстояние z_0 найдем из выражения:

$$Q(z_0) = 2 - 2 \cdot z_0 = 0, \text{ откуда } z_0 = 1 \text{ м} .$$

Вычисляем значения Q и M в начале и конце участка BC :

$$z = 1 \text{ м} : Q(1) = 2 - 2 \cdot (1 - 1) = 2 \text{ кН} ;$$

$$M(1) = 4 + 2 \cdot (1-1) - \frac{2 \cdot (1-1)^2}{2} = 4 \text{ кНм};$$

$$z = 4 \text{ м} : Q(4) = 2 - 2 \cdot (4-1) = -4 \text{ кН};$$

$$M(4) = 4 + 2 \cdot (4-1) - \frac{2 \cdot (4-1)^2}{2} = 1 \text{ кНм}.$$

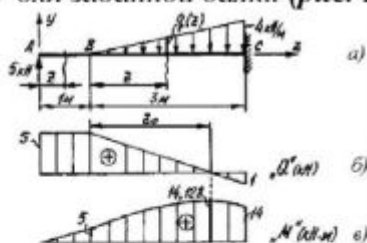
Вычисляем значение $M = M_{\max}$ в сечении $z = 1 + z_0 = 1 + 1 = 2 \text{ м}$:

$$M(2) = 4 + 2 \cdot (2-1) - \frac{2 \cdot (2-1)^2}{2} = 5 \text{ кНм}.$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, построенные по вычисленным значениям их ординат, показаны на рис. 22 б, в.

2.3. Построение эпюр при действии на свободный конец балки сосредоточенной силы

Пример. Построить аналитическим способом эпюры Q и M для заданной балки (рис. 23 а).



Решение. Рассматриваемая балка, как и рассмотренные ранее, имеет два участка нагружения. Разбиваем балку на два участка AB и BC и записываем аналитические выражения $Q(z)$ и $M(z)$ для каждого участка.

Участок AB:

$$Q(z) = 5 \text{ кН};$$

$$M(z) = 5z.$$

Рис. 23. Построение эпюр « Q » и « M ».

Участок BC: В пределах второго участка BC к балке приложена нагрузка, распределенная по закону треуголь-

ника. Для удобства вычислений на этом участке абсциссу z будем отсчитывать от точки B . Найдем интенсивность распределенной нагрузки в произвольном сечении z из соотношения $\frac{q(z)}{z} = \frac{4}{3}$; $q(z) = \frac{4}{3} \cdot z$. Равнодействующая распределенной нагрузки, приложенной к балке на длине z , равна $R(z) = \frac{q(z) \cdot z}{2} = \frac{2 \cdot z^2}{3}$ и приложена на расстоянии $\frac{2}{3}z$ от точки B . Таким образом, получаем следующие выражения для поперечной силы и изгибающего момента, действующих в сечении с абсциссой z :

$$Q(z) = 5 - \frac{2 \cdot z^2}{3};$$

$$M(z) = 5 \cdot (1+z) - \frac{2 \cdot z^2}{3} \cdot \frac{z}{3} = 5 \cdot (1+z) - \frac{2 \cdot z^3}{9}.$$

Из полученных выражений видно, что поперечная сила изменяется по закону квадратной параболы, а изгибающий момент - по закону кубической параболы.

Вычисляем значения Q и M в начале и конце участка BC :

$$Q(0) = 5 \text{ кН}; M(0) = 5 \cdot (1+0) = 5 \text{ кНм};$$

$$Q(3) = 5 - \frac{2 \cdot 3^2}{3} = -1 \text{ кН}; M(3) = 5 \cdot (1+3) - \frac{2 \cdot 3^3}{9} = 14 \text{ кНм}.$$

В сечении балки с абсциссой z_0 изгибающий момент имеет максимум, так как поперечная сила на рассматриваемом участке изменила знак, проходя в этом сечении через ноль.

Расстояние z_0 найдем из выражения:

$$Q(z_0) = 5 - \frac{2 \cdot z_0^2}{3} = 0 \quad \text{или} \quad z_0 = 2,74 \text{ м}.$$

Вычисляем величину максимального изгибающего момента:

$$M(z_0) = M(2,74) = 5 \cdot (1 + 2,74) - \frac{2 \cdot 2,74^2}{3} \cdot \frac{2,74}{3} = 14,1 \text{ кНм.}$$

По найденным значениям Q , M строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 23 б, в).

2.4. Построение эпюр для шарнирно - опертой балки

Пример. Построить для заданной балки (рис. 24 а)

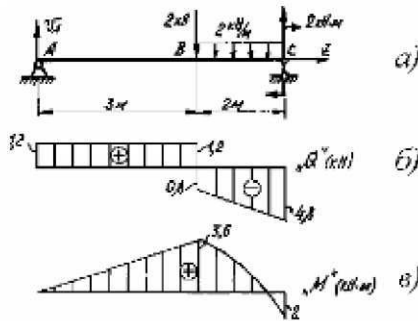


Рис. 24. Эпюры « Q » и « M » для шарнирно опертой балки

эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Решение. В этом и последующих примерах при построении эпюр внутренних усилий значения Q и M вычисляются на границах участков и в характерных сечениях балки, ординаты откладываются от оси эпюр и на основании следствий из дифференциальных зависимостей Журавского соединяются соответствующими линиями.

Записываем два уравнения статики и определяем опорные реакции:

$$\sum M_C = 0; V_A \cdot 5 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 = 0; V_A = 1,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; V_C \cdot 5 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 2 = 0; V_C = 4,8 \text{ кН}.$$

Для проверки используем уравнение:

$$\sum Y = 0: 1,2 + 4,8 - 2 - 2 \cdot 2 = 0,$$

реакции вычислены, верно.

Разбиваем балку на два участка - AB и BC . Вычисляем значения Q и M на границах участков (слева и справа от граничных сечений).

Сечение A : $Q = 1,2 \text{ кН}$, $M = 0$.

Сечение B : $Q = 1,2 \text{ кН}$ слева, справа $Q = 1,2 - 2 = -0,8 \text{ кН}$;

$$M = 1,2 \cdot 3 = 3,6 \text{ кНм} \text{ слева и справа.}$$

Сечение C : $Q = -4,8 \text{ кН}$, $M = -2 \text{ кНм}$.

По найденным значениям на рис. 24 б, в построены эпюры поперечных сил и изгибающих моментов с учетом того, что на первом участке поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону, на втором поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент - по закону квадратной параболы.

2. 5. Построение эпюр для балки с нагруженной консолью

Пример. Для балки (рис. 25 а) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Решение. Записываем уравнения статики и определяем опорные реакции:

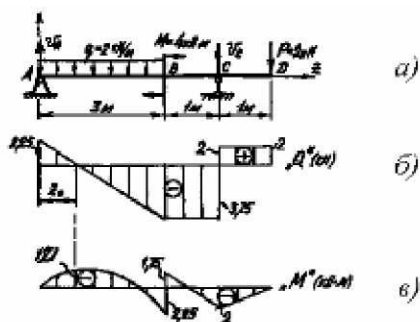


Рис. 25. Построение эйлер «Q» и «M» при нагружении консоли балки сосредоточенной силой.

$$\sum M_B = 0;$$

$$V_A \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2,5 + 4 + 2 \cdot 1 = 0;$$

$$V_A = 2,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$V_B \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 4 = 0;$$

$$V_B = 5,75 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0 : 2,25 + 5,75 - 2 - 2 \cdot 3 = 0,$$

реакции вычислены правильно.

Разбиваем балку на три участка - AB, BC, CD. Вычисляем значения Q и M на границах участков (слева и справа от граничных сечений).

Сечение A: $Q = 2,25 \text{ кН}$, $M = 0$.

Сечение B (слева и справа): $Q = 2,25 - 2 \cdot 3 = -3,75 \text{ кН}$.

В сечении балки с абсциссой z_0 поперечная сила равна нулю, изгибающий момент имеет максимум (поперечная сила на участке AB изменила знак, проходя при этом через ноль). Расстояние z_0 найдем из выражения:

$$Q(z_0) = 2,25 - 2z_0 = 0, z_0 = 1,125 \text{ м}.$$

Вычисляем значения M слева и справа от сечения B :

$$M = 2,25 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -2,25 \text{ кНм слева};$$

$$M = 2,25 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 = 1,75 \text{ кНм справа.}$$

Аналитический максимум изгибающего момента в сечении с абсциссой z_0 :

$$M_{\max} = M(z_0) = 2,25 \cdot 1,125 - 2 \cdot 1,125 \cdot \frac{1,125}{2} = 1,27 \text{ кНм.}$$

Вычисляем значения Q и M в сечениях D и C , двигаясь вдоль оси балки *справа налево*.

Сечение D: $Q = 2 \text{ кН}$, $M = 0$.

Сечение C: справа $Q = 2 \text{ кН}$; слева $Q = 2 - 5,75 = -3,75 \text{ кН}$;

$M = -2 \cdot 1 = -2 \text{ кНм}$ слева и справа.

Сечение B: $Q = -3,75 \text{ кН}$ слева и справа,

справа $M = -2 \cdot 2 + 5,75 \cdot 1 = 1,75 \text{ кНм}$,

слева $M = -2 \cdot 2 + 5,75 \cdot 1 - 4 = -2,25 \text{ кНм}$.

По найденным значениям поперечных сил и изгибающих моментов построены эпюры Q и M (рис. 25 б, в) с учетом того, что на участке AC эпюра M очерчена по квадратной параболе.

2.6. Построение эпюр для балки со встроенным промежуточным шарниром

Пример. Для балки с промежуточным шарниром (рис. 26 а) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

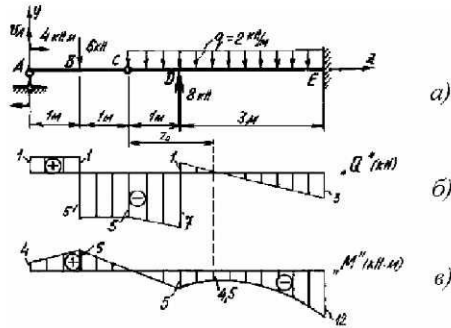


Рис. 26. Эпюры « Q » и « M » для балки с промежуточным шарниром.

Решение. При расчете балок с промежуточным шарниром, вначале рекомендуется вычислить опорную реакцию так называемой *подвесной балки* (в данном примере - AC), используя условие равенства нулю суммы моментов сил, действующих на эту часть конструкции, относительно промежуточного шарнира:

$$\sum M_C^{\text{слева}} = 0; V_A \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 4 = 0; V_A = 1 \text{ кН}.$$

Вычислив опорную реакцию подвесной балки, можно начинать построение эпюр.

Разбиваем балку на четыре участка - AB , BC , CD , DE . Вычисляем значения Q и M на границах участков (слева и справа от граничных сечений).

В граничных сечениях:

Сечение A : $Q = 1 \text{ кН}$, $M = 4 \text{ кНм}$.

Сечение B : слева $Q = 1 \text{ кН}$, справа $Q = 1 - 6 = -5 \text{ кН}$.

$$M = 4 + 1 \cdot 1 = 5 \text{ кНм} \text{ слева и справа.}$$

Сечение C : $Q = 5 \text{ кН}$, $M = 0$ слева и справа.

Сечение D : слева $Q = 1 - 6 - 2 \cdot 1 = -7 \text{ кН}$,

$$\text{справа } Q = 1 - 6 - 2 + 8 = 1 \text{ кН};$$

$$M = 1 \cdot 3 + 4 - 6 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0,5 = -6 \text{ кНм} \text{ слева и}$$

справа.

Сечение E: $Q = 1 - 6 - 2 \cdot 4 + 8 = -5 \text{ кН}$,

$$M = 1 \cdot 6 + 4 - 6 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = -12 \text{ кНм}.$$

В сечении балки с абсциссой z_0 поперечная сила равна нулю, изгибающий момент максимален. Расстояние z_0 найдем из выражения:

$$Q(z_0) = 1 - 6 + 8 - 2z_0 = 0, \quad z_0 = 1,5 \text{ м}.$$

Максимальное значение изгибающего момента в сечении с абсциссой z_0 :

$$M_{\max} = M(z_0) = 4 + 1 \cdot 3,5 - 6 \cdot 2,5 - 2 \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2} + 8 \cdot 0,5 = 2,75 \text{ кНм}.$$

По найденным значениям поперечных сил и изгибающих моментов построены эпюры Q и M , показанные на рис. 26 б, в.

2.7. Определение по эпюрам «Q» и «M» нагрузки, действующей на балку

Пример. По эпюрам поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 27 а, з), установить нагрузку, действующую на балку (рис. 27 б). Ординаты эпюры M даны в кНм, эпюры Q - в кН, длины участков балки в метрах.

Решение. Подобные задачи решаются на основе следствий, вытекающих из дифференциальных зависимостей 1.5 - 1.7.

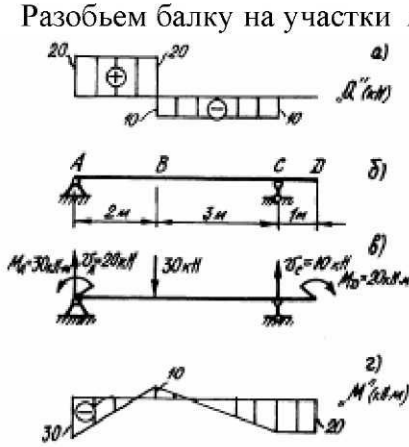


Рис. 27. Схемы расчета нагрузки на балку по заданным эпюрам « Q » и « M ».

Разобьем балку на участки AB , BC , CD , границами которых будут скачки и изломы на эпюрах Q и M .

На первом участке AB в сечении A на эпюрах имеются скачки, это означает, что в сечении A приложены сосредоточенная сила 20 кН, направленная вверх (поперечная сила в сечении положительна) и пара сил M_A с моментом 30 кНм, направленная против часовой стрелки (из-

гибающий момент отрицателен).

В сечении B на эпюре Q имеется скачок на величину 30 кН, а на эпюре M - ее перелом. Это означает, что в этом сечении приложена сосредоточенная сила P_1 , равная 30 кН и направленная вниз.

В сечении C на эпюре Q скачок на величину 10 кН вызван сосредоточенной силой $P_2 = 10$ кН, направленная вверх.

В сечении D приложена пара сил $M_D = 20$ кНм, направленная по часовой стрелке (изгибающий момент отрицателен).

Схема балки с действующими нагрузками показана на рис. 27 в.

2.8. Расчет нагрузки на балку по заданным эпюрам

Пример. По эпюрам поперечных сил Q и изгибающих моментов M , показанных на рис. 28 а, г установит на-

грузку, действующую на балку (рис. 28 б). Ординаты эпюры M даны в кНм, эпюры Q - в кН, длины участков балки в метрах.

Решение. Очевидно, что в сечении A балки приложены сосредоточенная сила V_B (реакция опоры) и пара сил M_A (на эпюрах Q и M в этом сечении имеются скачки, величины которых численно равны приложенным нагрузкам). Учитывая знаки усилий, находим $V_A = 24$ кН (сила направлена вверх), $M_A = 4$ кНм (пара сил направлена против часовой стрелки, так как изгибающий момент отрицателен).

На участке AB поперечная сила убывает, эпюра ограничена наклонной прямой, эпюра изгибающих моментов - квадратной параболой, не имеющей экстремума. Это означает, что на участке AB приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , направленная вниз. Параметр q можно определить, зная, что слева от сечения B поперечная сила равна нулю.

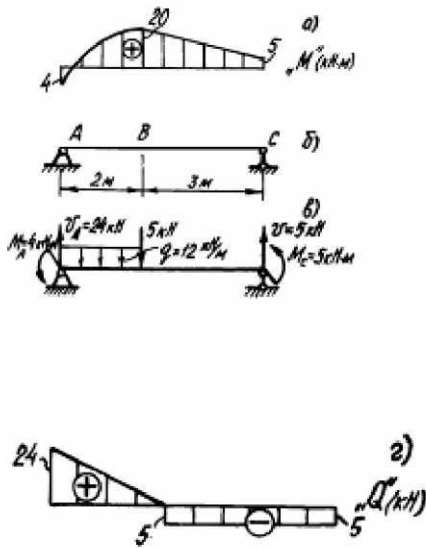


Рис. 28. Схемы расчета нагрузки на балку по заданным эюрам «Q» и «M».

$$Q(B)=24 - q \cdot 2 = 0; q = 12 \text{ кН/м.}$$

В сечении *B* балки приложена сосредоточенная сила, направленная вниз и равная по величине скачку на эюре *Q*, т.е. 5 кН.

На участке BC поперечная сила постоянна, что означает отсутствие на нем каких-либо нагрузок. В сечении C на эпюре M скачок, равный 4 кНм - здесь приложена пара сил, направленная против часовой стрелки.

В этом же сечении скачок на эпюре Q , равный -5 кН , говорит о том, что реакция опоры $V_C = 5 \text{ кН}$ направлена вверх.

Балка с действующими на нее нагрузками показана на **рис. 28 в**.

2.9. Расчет максимальных значений «Q» и «M» при действии сплошной нагрузки, распределенной по заданному закону

Пример. Для балки, несущей сплошную нагрузку, распределенную по закону $q(z) = q \sin \frac{\pi \cdot z}{l}$ (**рис. 29 а**), построить эпюры Q, M и вычислить наибольшие значения поперечной силы и изгибающего момента.

Решение. Элементарная нагрузка, приходящаяся на отрезок балки длиной dz равна $dQ = q(z) \cdot dz = q \sin \frac{\pi \cdot z}{l} dz$.
Равнодействующая распределенной нагрузки численно равна площади эпюры этой нагрузки:

$$\Omega = \int_0^l d\omega = \int_0^l q \sin \frac{\pi \cdot z}{l} dz = -q \frac{1}{\pi/l} \left(\cos \frac{\pi \cdot l}{l} - \cos \frac{\pi \cdot 0}{l} \right) = \frac{2ql}{\pi}.$$

Опорные реакции вследствие симметрии нагрузки равны :

$$V_A = V_B = \frac{\Omega}{2} = \frac{ql}{\pi}.$$

Значение поперечной силы в произвольном сечении z получим из дифференциальной зависимости **(1.7)** :
 $q = -\frac{d^2M}{dz^2}$ (знак минус поставлен, потому, что $q < 0$). Интегрируя выражение **(1.7)**, получим:

$$\frac{dM}{dz} = Q(z) = -\int_0^z q \sin \frac{\pi \cdot z}{l} dz + Q_0$$

Произвольная постоянная Q_0 определяется из граничного условия:

при $z = 0$

$$Q(0) = V_A = \frac{ql}{\pi} = Q_0.$$

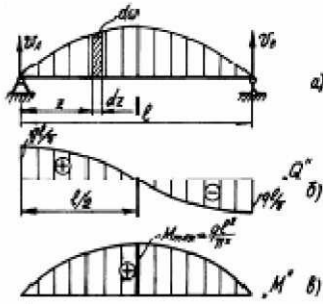


Рис. 29. Схемы расчета максимального значения «Q» и «M»

получим:

$$M(z) = \int_0^z Q(z) dz + M_0$$

Произвольная постоянная M_0 определяется из граничного условия: при:

$$z = 0 \quad M(0) = M_0 = 0.$$

Тогда

$$M(z) = \int_0^z Q(z) dz = \int_0^z \frac{q}{\pi/l} \cdot \cos \frac{\pi z}{l} dz = \frac{q}{\pi/l} \cdot \frac{1}{\pi/l} \sin \frac{\pi z}{l} = \frac{ql^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi z}{l}$$

Для построения эпюр по точкам подсчитаем ординаты этих эпюр в некоторых характерных сечениях:

Интеграл

$$\int_0^z q \sin \frac{\pi \cdot z}{l} dz = -\frac{q}{\pi/l} \left(\cos \frac{\pi z}{l} - 1 \right) = \frac{q}{\pi/l} - \frac{q}{\pi/l} \cdot \cos \frac{\pi z}{l}$$

Тогда:

$$Q(z) = -\left(\frac{q}{\pi/l} - \frac{q}{\pi/l} \cdot \cos \frac{\pi z}{l} \right) + \frac{q}{\pi/l} = \frac{q}{\pi/l} \cdot \cos \frac{\pi z}{l}$$

Значение изгибающего момента в произвольном сечении z получим из дифференциальной зависимости (1.6). Интегрируя выражение (1.6),

$$z = 0: Q = V_A = \frac{ql}{2}; M = M_0 = 0;$$

при $z = \frac{l}{2}: Q = 0; M = M_{\max} = \frac{ql^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^2}{\pi^2};$

$$z = l: Q = V_B = -\frac{ql}{2}; M = 0.$$

Из выражений $Q(z) = \frac{q}{\pi/l} \cos \frac{\pi z}{l}$ и $M(z) = \frac{ql^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi z}{l}$ следует,

что эпюра Q ограничена косинусоидой, а эпюра M - синусоидой.

По найденным значениям поперечных сил и изгибающих моментов построены эпюры Q и M (рис. 29 б, в).

Рассмотрим методы построения эпюр внутренних силовых факторов для статически определимых рам.

Рамой называют систему брусьев, жестко соединенных между собой в узлах. Встречаются рамы, некоторые элементы которых соединены шарнирно.

В общем случае в поперечных сечениях бруса возникают три силовых фактора: поперечная сила Q , изгибающий момент M и продольная (нормальная) сила N . Для определения величин Q и M следует руководствоваться правилами, которые были рассмотрены применительно к балкам. Продольная сила в произвольном сечении, какого-либо из стержней рамы численно равна алгебраической сумме проекций на ось этого стержня всех внешних сил, приложенных к раме по одну сторону от проведенного сечения. Продольная сила считается положительной, если внешняя сила вызывает в рассматриваемом сечении растяжение, и отрицательной, если в сечении вызывается сжатие.

Ниже приводятся примеры построения эпюр для статически определимых рам.

3. Примеры построения эпюр для статически определимых рам

3.1. Построение эпюр «Q», «M» и «N» для рамы с защемленным концом

Пример. Построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил для рамы, показанной на рис. 30.

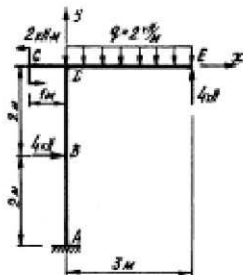


Рис. 30. Схема нагружения рамы

Решение. При построении эпюр Q , M , N условимся придерживаться следующих правил :

1. стержни рамы рассматриваются поочередно;
2. ось стержня принимается за ось абсцисс;
3. ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются со стороны сжатых волокон, знак на эпюре моментов не ставится;

4. штриховка эпюр производится перпендикулярно к оси соответствующего стержня .

Чтобы сократить объем вычислений, будем рассматривать отсеченную часть рамы, не включающую опору.

Рассмотрим стержень CD .

Вычисляем Q , M , N на границах участка - в сечениях C и D .

$$Q(C) = 0; M(C) = 2 \text{ кНм (сжатое волокно -снизу)}; N(C) = 0.$$

Изгибающий момент на всей длине стержня постоянен.

Стержень ED .

$$\text{Сечение } E: Q(E) = - 4 \text{ кН}; M(E) = 0; N(E) = 0.$$

Сечение D : $Q(D) = - 4 + 2 \cdot 3 = 2 \text{ кН}$; поперечная сила изменила знак и в сечении с абсциссой z_0 стержня ED (рис.30) она равна нулю, изгибающий момент в этом сечении максимален .

Расстояние z_0 найдем из выражения:

$$Q(z_0) = - 4 + 2 z_0 = 0, z_0 = 2 \text{ м} .$$

Максимум изгибающего момента в сечении с абсциссой z_0 :

$$M_{\max} = M(z_0) = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 4 \text{ кНм.}$$

$M(D) = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 3 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - сверху); $N(D) = 0$.

Стержень DA .

Участок DB : сечение D : $Q(D) = 0$; $M(D) = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 2 = 5 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - слева); $N(D) = 4 - 2 \cdot 3 = 2 \text{ кН}$;

сечение B : $Q(B) = 0$; $M(B) = M(D) = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 2 = 5 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - слева); $N(B) = N(D) = 4 - 2 \cdot 3 = 2 \text{ кН}$.

Участок BA : сечение B : $Q(B) = 4 \text{ кН}$; $M(B) = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 2 = 5 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - слева); $N(B) = 4 - 2 \cdot 3 = -2 \text{ кН}$;

сечение A : $Q(A) = 4 \text{ кН}$; $M(A) = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 2 - 4 \cdot 2 = -3 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - справа); $N(A) = 4 - 2 \cdot 3 = -2 \text{ кН}$.

По найденным значениям поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил построены эпюры Q , M и N (рис. 31 а, б, в).

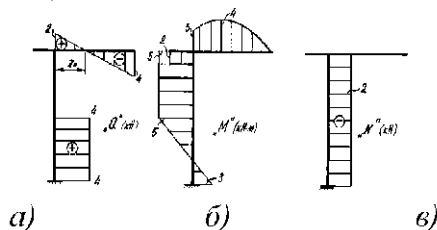


Рис. 31. Эпюры « Q », « M » и « N »

Для проверки правильности построения эпюр вырежем мысленно жесткий узел D рамы, приложим к сходящимся

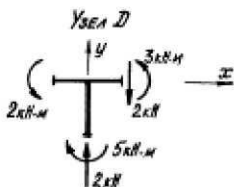


Рис. 32. Проверка правильности построения эпюр.

в этом узле стержням внутренние усилия (**рис. 32**) и проверим равновесие узла. Для этого составляем соответствующие уравнения статики:

$$\sum Y = 0.2 - 2 = 0;$$

$$\sum X \equiv 0;$$

$$\sum M = 0.2 + 3 - 5 = 0.$$

Узел находится в равновесии.

В уравнение моментов моменты поперечных сил не включены, так как их плечи относительно узла D , бесконечно малы. Если же к узлу приложена внешняя сила или пара сил, то они входят в уравнения равновесия.

3.2. Построение эпюр для шарнирно-опертой рамы

Пример. Построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил для рамы, показанной на **рис. 33**.

Решение. Составляя уравнения равновесия сил, действующих на раму, определяем опорные реакции:

$$\sum M_D = 0;$$

$$V_A \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0;$$

$$V_A = 5 \text{ кН};$$

$$\sum X = 0: 1 + 3 - H_D = 0; H_D = 4 \text{ кН};$$

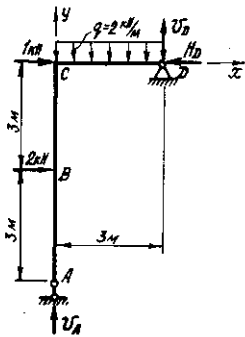


Рис. 33. Схема нагружения рамы.

$$\sum M_i = 0;$$

$$V_D \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 0;$$

$$V_D = 1 \text{ кН}.$$

Все реакции получились положительными, следовательно, их направления на рисунке показаны правильно.

Проверим вычисления, используя уравнение статики:

$$\sum Y = 0: 5 + 1 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Реакции опор определены правильно.

Рассмотрим поочередно стержни рамы.

Стержень AC.

Участок AB, сечение A: $Q(A) = 0$; $M(A) = 0$;

$$N(A) = -5 \text{ кН};$$

сечение B: $Q(B) = Q(A) = 0$; $M(B) = M(A) = 0$; $N(B) = N(A) = -5 \text{ кН}$.

Участок BC, сечение B: $Q(B) = -2 \text{ кН}$; $M(B) = 0$; $N(B) = -5 \text{ кН}$;

сечение C: $Q(C) = Q(B) = -2 \text{ кН}$; $M(C) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - справа); $N(C) = N(B) = -5 \text{ кН}$.

Стержень DC.

Сечение D: $Q(D) = -1 \text{ кН}$; $M(D) = 0$; $N(D) = H_D = -3 \text{ кН}$;

Сечение C: $Q(C) = -1 + 2 \cdot 3 = 5 \text{ кН}$; $M(C) = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = -6 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - снизу); $N(C) = N(D) = -3 \text{ кН}$.

Результаты вычислений поперечных сил в сечениях стержня DC показывают, что при переходе от сечения C к сечению D поперечная сила изменяет свой знак с плюса на минус. Это означает, как указывалось ранее, что в сечении, где $Q = 0$, изгибающий момент будет максимален.

Абсциссу z_0 этого сечения (рис. 34 а) найдем из выражения:

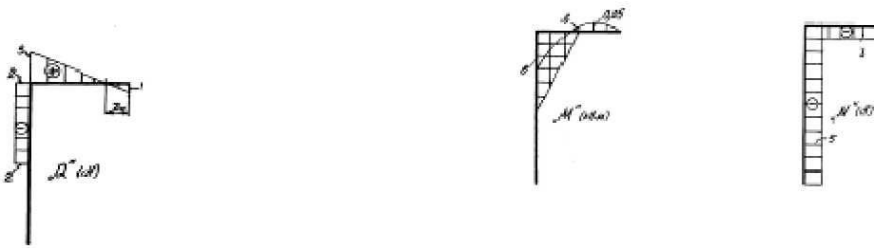
$$Q(z_0) = -1 + 2z_0 = 0, \quad z_0 = 0,5 \text{ м}.$$

Максимум изгибающего момента в сечении с абсциссой z_0 равен :

$$M_{\max} = M(z_0) = 1 \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,5}{2} = 0,25 \text{ кНм} \quad (\text{сжатое волокно - сверху})$$

Эпюры Q , M и N построены по найденным значениям поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил

(рис.34 а, б, в).



а)

б)

в)

Рис. 34. Эпюры действующих нагрузок.

Для проверки правильности построения эпюр вырежем мысленно жесткий узел C (рис..35), приложим к сходящимся в этом узле стержням внутренние усилия и внешнюю силу, равную одному килоньютону, а затем проверим равновесие узла.

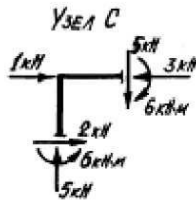


Рис. 35. Проверочный узел

Для этого составляем уравнения статики:

$$\sum Y = 0,5 - 5 = 0;$$

$$\sum X = 0,1 + 2 - 3 = 0;$$

$$\sum M = 0,6 - 6 = 0$$

Узел находится в равновесии.

3.3. Построение эпюр от действия внешних нагрузок

Пример. Построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил для рамы, показанной на рис. 36.

Решение. Составляя уравнения равновесия сил, действующих на раму, определяем опорные реакции:

$$\sum M_E = 0: V_A \cdot 4 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 0,5 \cdot 6 = 0;$$

$$V_A = 3,75 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: V_B \cdot 4 + 0,5 \cdot 6 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 4 = 0;$$

$$V_B = 4,25 \text{ кН}.$$

$$\sum X = 0: 0,5 + 2,5 - H_D = 0; H_D = 2 \text{ кН}.$$

Все реакции получились положительными, следовательно, их направления на рисунке показаны правильно.

Проверим вычисления, используя уравнение статики:

$$\sum Y = 0: 3,75 + 4,25 - 2 \cdot 4 = 0. \text{ Реакции опор определены правильно.}$$

Рассмотрим поочередно стержни рамы.

Стержень AC.

Участок AB, сечение A: $Q(A) = 2 \text{ кН}$; $M(A) = 0$; $N(A) = -3,75 \text{ кН}$;

сечение B: $Q(B) = Q(A) = 2 \text{ кН}$; $M(B) = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - слева); $N(B) = N(A) = -3,75 \text{ кН}$.

Участок BC, сечение B: $Q(B) = 2 \text{ кН}$;

$M(B) = 2 \cdot 4 + 4 = 12 \text{ кНм}$;

$N(B) = -3,75 \text{ кН}$;

сечение C: $Q(C) = Q(B) = 2 \text{ кН}$; $M(C) = 2 \cdot 6 + 4 = 16 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - слева); $N(C) = N(B) = -5 \text{ кН}$.

Стержень CD.

Сечение C: $Q(C) = 3,75 \text{ кН}$; $M(C) = 2 \cdot 6 + 4 = 16 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - сверху); $N(C) = 2 \text{ кН}$.

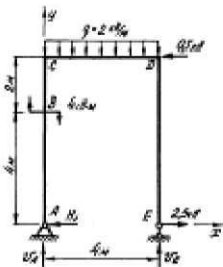


Рис. 36. Схема нагружения рамы.

Внутренние усилия в сечении D вычислим, рассматривая часть рамы, расположенную справа от этого сечения.

Сечение D : $Q(D) = -4,75 \text{ кН}$; $M(D) = 2,5 \cdot 6 = 15 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - сверху); $N(D) = 2,5 - 0,5 = 2 \text{ кН}$.

На участке CD поперечная сила изменяет свой знак с плюса на минус. В сечении, где $Q = 0$, изгибающий момент, изменяясь по закону квадратной параболы, будет максимален.

Абсциссу этого сечения z_0 (рис.37 а) найдем из выражения:

$$Q(z_0) = 4,25 - 2z_0 = 0, z_0 = 1,125 \text{ м.}$$

Максимум изгибающего момента в сечении с абсциссой z_0 равен:

$$M_{\max} = M(z_0) = 4,25 \cdot 1,125 + 2,5 \cdot 6 - 2 \cdot 1,125 \cdot \frac{1,125}{2} = 19,5 \text{ кНм (сжатое волокно - сверху).}$$

Стержень ED . Сечение E : $Q(E) = -2,5 \text{ кН}$; $M(E) = 0$; $N(C) = -4,25 \text{ кН}$;

сечение D : $Q(D) = -2,5 \text{ кН}$; $M(D) = 2,5 \cdot 6 = 15 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - справа); $N(D) = -4,25 \text{ кН}$;

На (рис. 37 а, б, в) показаны эпюры Q , M и N , построенные по найденным значениям внутренних усилий.

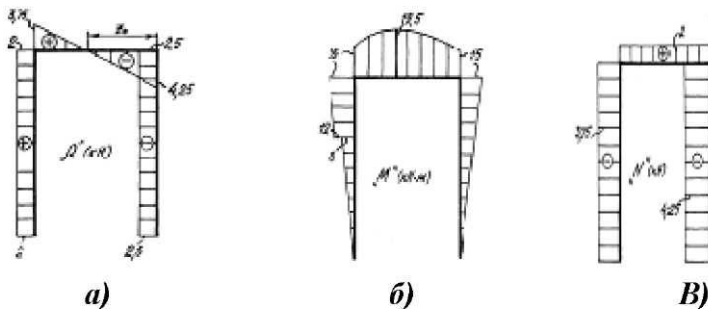


Рис. 37. Эпюры «Q», «M» и «N».

Для проверки правильности построения эпюр вырежем мысленно жесткие узлы *C* и *D* (рис. 38), приложим к сходящимся, в этих узлах стержням внутренние усилия, а затем проверим равновесие узлов. Для этого составляем соответствующие уравнения статики.



Рис. 38. Проверочные узлы.

Узел *C*:

$$\sum Y = 0; 3,75 - 3,75 = 0; \sum X = 0; -2 + 2 = 0; \sum M = 0; 16 - 16 = 0.$$

Узел *D*:

$$\sum Y = 0; 4,25 - 4,25 = 0; \sum X = 0; -2 - 0,5 + 2,5 = 0; \sum M = 0; 15 - 15 = 0.$$

Узлы находятся в равновесии.

3.4. Построение эпюр для рамы с промежуточным шарниром

Пример. Для рамы с промежуточным шарниром, показанной на рис. 39, построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил.

Решение. Определяем опорные реакции. Для этого составляем три уравнения равновесия рамы и дополнительно используем условие равенства нулю изгибающего момента в шарнире *C*.

$$\sum M_E = 0; V_A \cdot 4 + H_A \cdot 2 - 6 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0; V_A = 4,67 \text{ кН};$$

$$\sum X = 0; 4,67 - 2 \cdot 4 + H_E = 0; H_E = 3,33 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{шарнир}} = V_E \cdot 4 + 3,33 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0; V_E = 1,33 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{слева} = V_A - H_A = 0; V_A = H_A.$$

Проверим вычисления, используя уравнение статики:

$$\sum Y = 0; 4,67 + 1,33 - 6 = 0.$$

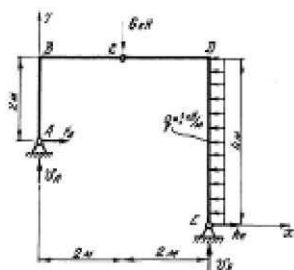


Рис. 39. Рама с промежуточным шарниром.

Реакции опор определены правильно.

Рассматриваем поочередно стержни рамы.

Стержень *AB*.

Сечение *A*: $Q(A) = -4,67 \text{ кН}$;
 $M(A) = 0$; $N(A) = -4,67 \text{ кН}$;
сечение *B*: $Q(B) = -4,67 \text{ кН}$;
 $M(B) = 4,67 \cdot 2 = 9,34 \text{ кНм}$
(сжатое волокно - справа);
 $N(B) = N(A) = -4,67 \text{ кН}$.

Стержень *BC*.

Сечение *B*: $Q(B) = 4,67 \text{ кН}$;

$M(B) = 4,67 \cdot 2 = 9,34 \text{ кНм}$

(сжатое волокно - снизу);

$N(B) = -4,67 \text{ кН}$;

сечение *C*: $Q(C) = Q(B) = 4,67 \text{ кН}$; $M(C) = 0$; $N(C) = N(B) = -4,67 \text{ кН}$.

Стержень *CD*.

Сечение *C*: $Q(C) = 4,67 - 6 = -1,33 \text{ кН}$; $M(C) = 0$; $N(C) = -4,67 \text{ кН}$.

сечение *D*: $Q(D) = -1,33 \text{ кН}$; $N(D) = -4,67 \text{ кН}$.

Изгибающий момент в сечении *D* стержня *CD* вычисляем, рассматривая правую по отношению к сечению *D*, часть рамы.

$M(D) = 1,33 \cdot 2 + 3,33 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 2,62 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - снизу).

Стержень *DE*.

Вычисления начинаем, рассматривая сначала сечение *E*.

Сечение *E*: $Q(E) = -3,33 \text{ кН}$; $M(E) = 0$; $N(E) = -1,33 \text{ кН}$;

сечение D : $Q(D) = -3,33 + 2 \cdot 4 = 4,67 \text{ кН}$.

Очевидно, что при переходе от сечения E к сечению D поперечная сила меняет знак, проходя через ноль. Как указывалось ранее, в этом сечении изгибающий момент максимален. Найдем (рис. 40 а) абсциссу этого сечения из выражения:

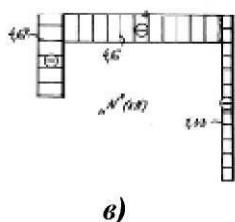
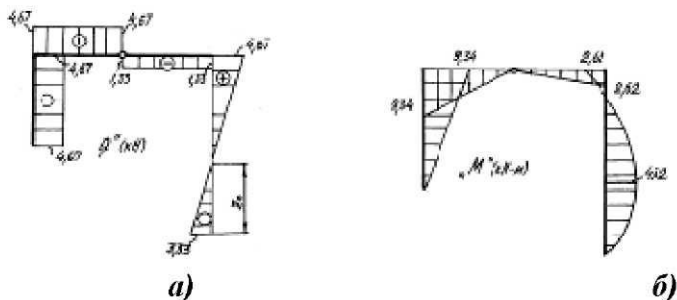
$$Q(z_0) = -3,33 + 2z_0 = 0, z_0 = 1,665 \text{ м}.$$

Максимум изгибающего момента в сечении с абсциссой $z_0 = 1,665 \text{ м}$ равен:

$$3,33 \cdot 1,665 - 2 \cdot 1,665 \cdot \frac{1,665}{2} = 4,26 \text{ кНм} \quad (\text{сжатое волокно - справа});$$

$$N(D) = -1,33 \text{ кН}.$$

Эпюры внутренних усилий, действующие в поперечных сечениях рамы, показаны на рис. 40 а, б, в.



в)
Рис. 40. Эпюры внутренних усилий.

Для проверки правильности построения эпюр вырежем мысленно узлы B и D рамы (рис.41) и проверим равновесие узлов. Для этого составляем соответствующие уравнения статики:

Узел B :

$$\sum Y = 0: 1,33 - 1,33 = 0; \sum X = 4,67 - 4,67 = 0;$$

$$\sum M = 0: 0,2,62 + 2,62 = 0$$

Узел D :

$$\sum \chi = 0: +e_1 - +e_1 = 0; \sum \chi = 0: +e_1 - +e_1 = 0; \sum \chi = 0: +e_1 + +e_1 = 0$$



Рис. 41. Проверочные узлы.

Узлы находятся в равновесии.

3.5. Определение нагрузок и построение эпюр для рамы с наклонным стержнем

Пример. Построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил для рамы с наклонным стержнем (рис. 42).

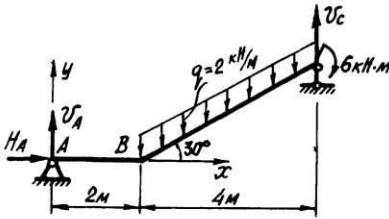


Рис. 42. Рама с наклонным стержнем.

Решение. Под действием вертикальных нагрузок в поперечных сечениях наклонных стержней рамы могут возникать растягивающие или сжимающие усилия. При вычислении продольных и поперечных усилий в сечениях наклонных участков, следует про-

ектировать нагрузки и опорные реакции соответственно на ось стержня и на нормаль к ней в рассматриваемом сечении. Расчет начинается с определения опорных реакций, для чего составляются уравнения равновесия рамы:

$$\sum X = 0: H_A = 0;$$

$$\sum M_C = 0: V_A \cdot 6 + 6 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 0; V_A = 1,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: V_C \cdot 6 - 6 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 1 \cdot 6 = 0; V_C = 6,33 \text{ кН}.$$

Проверим вычисления, используя уравнение статики:

$$\sum \lambda = 0: 0^{\circ} \cdot 6 + 6^{\circ} \cdot 33 - 5 \cdot 4 = 0$$

Реакции опор определены правильно. Для определения внутренних усилий в поперечных сечениях рассмотрим стержни рамы поочередно

Стержень AB .

Сечение A : $Q(A) = 1,67 \text{ кН}$; $M(A) = 0$; $N(A) = 0$;

стержень B : $Q(B) = Q(A) = 1,67 \text{ кН}$; $M(B) = 1,67 \cdot 2 = 3,34 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - сверху); $N(B) = N(A) = 0$.

Участок BC .

Сечение B : $Q(B) = V_A \cdot \cos 30^\circ = 1,67 \cdot \cos 30^\circ = 1,45 \text{ кН}$;

$M(B) = 1,67 \cdot 2 = 3,34 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - сверху);

$N(B) = -V_A \cdot \cos 60^\circ = -1,67 \cdot \cos 60^\circ = -0,835 \text{ кН}$.

Сечение C : $Q(C) = -N_C \cdot \cos 30^\circ = -2,33 \cdot \cos 30^\circ = -2,048 \text{ кН}$;

$M(C) = 6 \text{ кНм}$ (сжатое волокно - снизу);

$N(C) = V_C \cdot \cos 60^\circ = 6,33 \cdot \cos 60^\circ = 3,165 \text{ кН}$.

По найденным значениям построены эпюры Q и N (рис. 43 а, б).

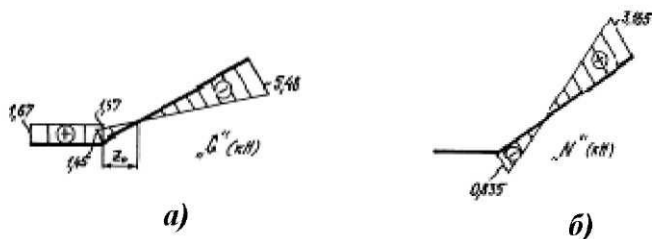


Рис. 43. Эпюры поперечных и продольных сил

Для построения эпюры M требуется провести дополнительные вычисления.

При переходе от сечения B к сечению C поперечная сила меняет знак, проходя через ноль. В этом сечении изгибающий момент максимален. Абсцисса сечения z_0 (рис.43а) находится из выражения:

$$Q(z_0) = 1,67 \cdot \cos 30^\circ - 2 \cdot \cos 30^\circ \cdot z_0 = 0 ; z_0 = 0,835 \text{ м} .$$

Максимум изгибающего момента при $z_0 = 0,835 \text{ м}$ равен $M_{\max} = M(z_0) = 1,67 \cdot (2 + 0,835) - 2 \cdot 0,835 \cdot \frac{0,835}{2} = 4,04 \text{ кНм}$ (сжатое

волокно - сверху) .

Эпюра M показана на **рис. 44**.

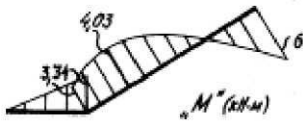


Рис. 44. Эпюра изгибающих моментов.

4. Примеры решения типовых задач расчета балок на прочность

4.1. Расчет максимальных нормальных напряжений для балки прямоугольного профиля

Пример. Для балки прямоугольного профиля (**рис. 45 а**) требуется подсчитать максимальные нормальные напряжения в опасном сечении и в точке A , отстоящей на 30 мм от нейтральной оси сечения.

Решение. Построив (**рис. 45 б, в**) эпюры Q , M находим опасное сечение - сечение, в котором изгибающий момент максимален по абсолютной величине.

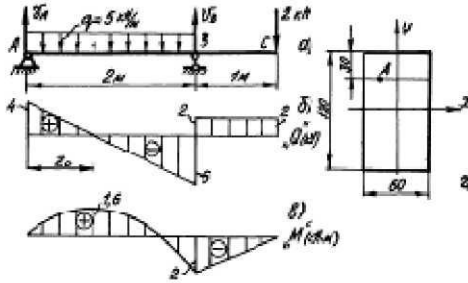


Рис. 45. Определение опасного сечения балки прямоугольного профиля.

Из эпюры M видно, что это сечение расположено над правой опорой B . Расчетная величина изгибающего момента $M_B = 2 \text{ кНм}$.

Вычисляем геометрические характеристики поперечного сечения:

момент инерции и момент сопротивления прямоугольника

относительно нейтральной оси соответственно равны:

$$I_x = \frac{6 \cdot 12^3}{12} = 864 \text{ см}^4 = 864 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$W_x = \frac{6 \cdot 12^2}{6} = 144 \text{ см}^3 = 144 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

Нормальные напряжения в точке A вычисляются по формуле 1.8

$$\sigma_A = \frac{M}{I_x} \cdot y_A = \frac{2 \cdot 10^3}{864 \cdot 10^{-8}} \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 6,94 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6,94 \text{ МПа}.$$

Максимальные нормальные напряжения в сечении балки находим по формуле 1.11:

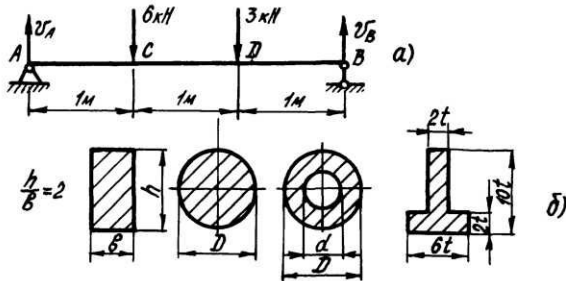
$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x} = \frac{2 \cdot 10^3}{144 \cdot 10^{-6}} = 13,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 13,9 \text{ МПа}.$$

4.2. Расчет размеров поперечного сечения стальной балки

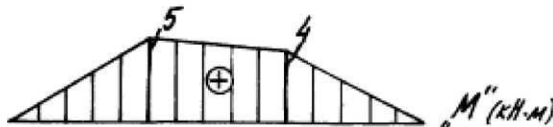
Пример. Определить размеры поперечного сечения стальной балки (рис. 45 а), рассмотрев варианты, показанные на рис. 46.

Допускаемое напряжение для стали принять $[\sigma] = 160$

МПа, коэффициент $\alpha = \frac{d}{D} = 0,8$



Решение. Определяем опорные реакции и строим эпюру изгибающих моментов M (рис. 47). Находим опасное сечение, в котором изгибающий момент максимален по модулю сечение C .



В опасном сечении M

$= 5 \text{ кНм}$. Требуемый момент сопротивления:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 31,25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 31,25 \text{ см}^3.$$

Определяем размеры сечений.

1. Прямоугольник. Его осевой момент сопротивления

$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$, следовательно, при $h = 2b$ имеем:

$$W_x = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3} = 0,67 \cdot b^3 = 31,25 \text{ см}^3 \text{ и } b = \sqrt[3]{\frac{31,25}{0,67}} = 3,6 \text{ см},$$

$$h = 2 \cdot b = 2 \cdot 3,6 = 7,2 \text{ см}.$$

2. Круг. Для круга $W_x = 0,1 \cdot D^3 = 31,25 \text{ см}^3$, $D = \sqrt[3]{\frac{31,25}{0,1}} = 6,8 \text{ см}.$

3. Кольцевое сечение: $\alpha = \frac{d}{D} = 0,8$; осевой момент сопро-

тивления

$$W_x = 0,1 \cdot D^3 (1 - \alpha^4) = 0,1 \cdot D^3 (1 - 0,8^4) = 31,25 \text{ см}^3,$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{31,25}{0,059}} = 8,1 \text{ см}, \quad d = \alpha \cdot D = 0,8 \cdot 8,1 = 6,48 \text{ см}.$$

4. Тавровое сечение. Вычисляем его геометрические характеристики, выражая их через неизвестный параметр t .

Для этого разбиваем сечение на два прямоугольника (**рис. 48**) и вычисляем ординату центра тяжести составного сечения y_c , отсчитывая ее

от вспомогательной оси x :

$$y_c = \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2}{F_1 + F_2} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 2t + 6 \cdot 2t \cdot 8}{6 \cdot 2t + 2t \cdot 8} = 3,86 t.$$



Осевой момент инерции относительно нейтральной оси x_c :

$$I_x = \left[\frac{6t \cdot (2t)^3}{12} + (2,86t)^2 \cdot 6t \cdot 2t \right] + \left[\frac{2t \cdot (8t)^3}{12} + (2,14t)^2 \cdot 2t \cdot 8t \right] = 263t^4$$

Осевой момент сопротивления относительно нейтральной оси:

$$W_{x_{\max}} = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{263t^4}{6,14t} = 42,8t^3 = 31,25\text{см}^3,$$

отсюда искомый параметр $t = \sqrt[3]{\frac{31,25}{42,8}} = 0,09\text{см} \approx 0,1\text{см}$.

5. Двутавровое сечение.

По таблицам сортамента находим двутавровое сечение, имеющее осевой момент сопротивления близкий к требуемому. Наиболее подходящим является двутавр №10, осевой момент сопротивления, которого $W_x = 39,7\text{см}^3$

6. Сечение, состоящее из двух швеллеров.

Главный центральный момент инерции этого составного сечения равен

$$I_x = 2 \cdot I_x^{шв}, \text{ а осевой момент сопротивления}$$

$$W_x = \frac{2I_x^{шв}}{y_{\max}} = 2W_x^{шв}.$$

Требуемый по условию прочности осевой момент сопротивления одного швеллера равен $W_x^{шв} = \frac{31,25}{2} = 15,62\text{см}^3$.

По таблице сортамента принимаем швеллер № 6,5, имеющий осевой момент сопротивления $W_x^{шв} = 15\text{см}^3$.

Превышение напряжений в опасном сечении балки в этом случае будет

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x} = \frac{5 \cdot 10^3}{2 \cdot 15 \cdot 10^{-6}} = 166,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 166,6 \text{ МПа}, \text{ или на}$$

4,1 % больше, что допускается.

4.3. Определение допустимой величины интенсивности равномерно распределенной нагрузки.

Пример. Для стальной балки (рис. 48 а) кольцевого поперечного сечения ($D = 12$ см, $d = 6$ см) построить эпюры Q , M и определить допускаемую величину интенсивности равномерно распределенной нагрузки q при допуске напряжении $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение. Определяем опорные реакции.

$$\sum M_B = 0: V_A \cdot 2l - q \cdot l \cdot 1,5l = 0;$$

$$V_A = 0,75ql;$$

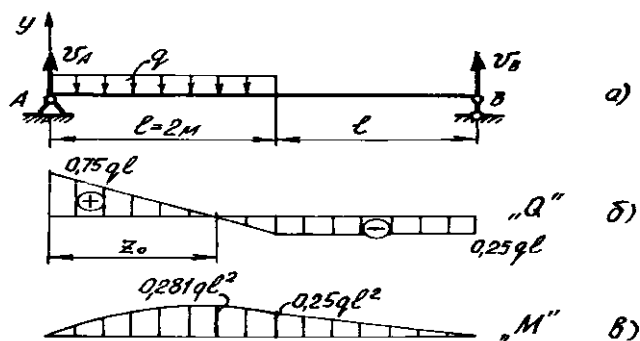


Рис. 49. Схемы расчета допускаемой интен-

$$\sum M_A = 0: V_B \cdot 2l - q \cdot l \cdot 0,5l = 0;$$

$$V_B = 0,25ql.$$

Проверим вычисления, используя уравнение статики:

$$\sum Y = 0: 0,75ql + 0,25ql - ql = 0.$$

Реакции опор определены правильно.

Построив эпюры Q и M (рис. 49 б, в), находим опасное сечение, в котором изгибающий момент максимален по модулю. Величина максимального (расчетного) изгибающего момента равна $0,281ql^2$.

Из условия прочности при изгибе $M_{\max} = W_x \cdot [\sigma]$ и учитывая, что для кольца:

$$W_x = 0,1 \cdot D^3 \left[1 - \left(\frac{D}{d} \right)^4 \right] = 0,1 \cdot (12 \cdot 10^{-2})^3 \left[1 - \left(\frac{60}{120} \right)^4 \right] =$$

$$= 155,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 155,6 \text{ см}^3,$$

имеем:

$$M_{\max} = 155,6 \cdot 10^{-6} \cdot 160 = 0,281 \cdot q \cdot l^2 = 0,281 \cdot q \cdot 2^2 = 1,124q,$$

откуда:

$$q = 22137 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \approx 22,1 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

4.4. Расчет на прочность балки таврового сечения

Пример. Проверить прочность чугунной балки (рис. 51 а) таврового сечения (рис. 50), если $[\sigma]_p = 400 \text{ кг/см}^2$; $[\sigma]_{сж} = 1200 \text{ кг/см}^2$.

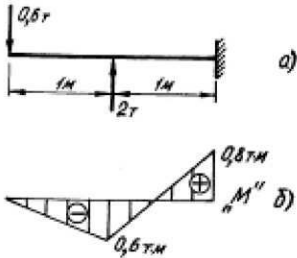


Рис. 50.
Схема балки и эпюра «М».

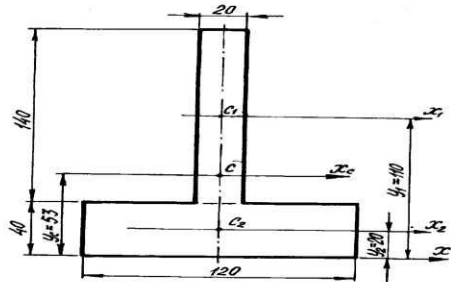


Рис. 51.
Тавровое сечение балки.

Решение. На рис. 50 б показана эпюра M , по которой находим величину наибольшего (по модулю) изгибающего момента $M_{\max} = 0,8 \text{ тм}$.

Вычисляем геометрические характеристики заданного сечения, разбивая тавровое сечение на два прямоугольника. Ордината его центра тяжести y_c , отсчитываемая от оси x , проходящей через основание сечения:

$$y_c = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_1 + F_2} = \frac{2 \cdot 14 \cdot 11 + 12 \cdot 4 \cdot 2}{2 \cdot 14 + 12 \cdot 4} = 5,3 \text{ см}.$$

Ординаты точек сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси, определяются по чертежу:

$y_p = 18 - 5,3 = 12,7 \text{ см}$, $y_{сж} = 5,3 \text{ см}$, расстояние между осями x_1 , x_c равно $11 - 5,3 = 5,7 \text{ см}$, между осями x_2 , x_c равно $5,3 - 2 = 3,3 \text{ см}$.

Осевой момент инерции относительно нейтральной оси:

$$\begin{aligned} I_x &= \left[\frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + (a_1)^2 \cdot F_1 \right] + \left[\frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + (a_2)^2 \cdot F_2 \right] = \\ &= \left[\frac{2 \cdot 14^3}{12} + (5,7)^2 \cdot 28 \right] + \left[\frac{12 \cdot 4^3}{12} + (3,3)^2 \cdot 48 \right] = 1954 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

В сечении C растянутые волокна балки находятся снизу, ординаты опасных точек для растянутых волокон $y_p = 5,3 \text{ см}$, сжатые волокна располагаются сверху, для сжатых волокон $y_{сж} = 18 - 5,3 = 12,7 \text{ см}$.

Вычисляем наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в опасных точках сечения C :

$$\sigma^h = \frac{1^x}{\sqrt{A}} \cdot h^h = \frac{1024}{0,8 \cdot 10^2} \cdot 2,3 = 314 \text{ кс} \setminus \text{см}^2 < 400 \text{ кс} \setminus \text{см}^2;$$

$$\sigma_{\text{сж}} = \frac{M}{I_x} \cdot y_c = \frac{0,8 \cdot 10^5}{1954} \cdot 12,7 = 520 \text{ кг} / \text{см}^2 < 1200 \text{ кг} / \text{см}^2.$$

В сечении, где действует изгибающий момент $M = 0,6$ тм, растянутые волокна расположены сверху, поэтому следует балку, изготовленную из хрупкого материала, проверить на прочность по растягивающим напряжениям. Нормальные максимальные напряжения σ_p^* в растянутых волокнах, расположенных на расстоянии $y_p^* = 12,7$ см от нейтральной оси равны:

$$\sigma_p^* = \frac{M}{I_x} \cdot y_p^* = \frac{0,6 \cdot 10^5}{1954} \cdot 12,7 = 390 \text{ кг} / \text{см}^2 < 400 \text{ кг} / \text{см}^2,$$

следовательно, прочность балки обеспечена.

5. Примеры решения типовых задач по расчету касательных напряжений при изгибе

5.1. Расчет прочности деревянной балки по касательным напряжениям

Пример. Для деревянной балки, показанной на рис.52 а, построить эпюры Q и M , подобрать круглое поперечное сечение из условия прочности по нормальным напряжениям ($[\sigma] = 80 \text{ кг} / \text{см}^2$) и проверить ее прочность по касательным напряжениям, приняв $[\tau] = 25 \text{ кг} / \text{см}^2$.

Решение. Построив эпюры Q и M (рис. 52 б, в), находим сечение, в котором изгибающий момент максимален по модулю (сечение В) и запишем условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\frac{M}{W_x} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{W_x} = 80,$$

тогда требуемое значение осевого момента сопротивления равно $W_x = \frac{3 \cdot 10^5}{80} = 3750 \text{ см}^3$.

Учитывая, что для круга $W_x \approx 0,1 \cdot d^3$, имеем:

$D = \sqrt[3]{37500} = 33,5 \text{ см} \approx 34 \text{ см}$, его осевой момент инерции равен:

$$I_x \approx 0,05 \cdot d^4 = 0,05 \cdot 34^4 = 66817 \text{ см}^4.$$

Для проверки прочности балки по касательным напряжениям воспользуемся формулой Журавского:

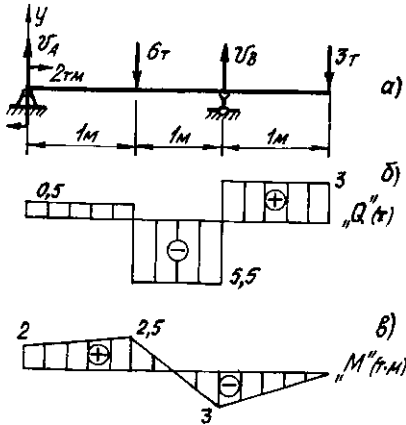


Рис. 52. Построение эпюр внешних нагрузок.

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b(y)}$$

В случае кругового сечения максимальные касательные напряжения действуют в нейтральном слое, совпадающим с горизонтальным диаметром круга (**рис. 53**).

Статический момент заштрихованной части сечения относительно нейтральной оси $S_x^{omc} = F_{omc} \cdot y_c$ или же, используя полученную формулу, имеем:

$$S_x = \frac{2}{3} r^3 = \frac{2}{3} \cdot 17^3 = 3275,3 \text{ см}^3.$$

Подставив в формулу Журавского $b=d = 34 \text{ см}$, $S_x = 3275,3 \text{ см}^3$,

$Q = 5,5 \text{ т}$, получим для сечения, в котором поперечная сила максимальна:

$$\tau_{\max} = \frac{5,5 \cdot 10^3 \cdot 3275,3}{66817 \cdot 34} \approx 8 \text{ кг/см}^2 < 25 \text{ кг/см}^2,$$

прочность балки по касательным напряжениям обеспечена.

5.2. Расчет касательных напряжений для балки прямоугольного поперечного сечения

Пример. Для балки прямоугольного поперечного сечения, показанной на **рис. 54 а**, вычислить касательные напряжения в точке *A* и определить максимальные касательные напряжения.

Решение. Вычислив опорные реакции ($V_A = 7 \text{ кН}$, $V_B = 8 \text{ кН}$) и построив эпюру Q (**рис. 54 б**), видим, что величина максимальной поперечной силы равна 8 кН .

Статический момент части сечения, расположенного выше точки *A* (**рис. 54 в**), равен:

$$S_x^{omc} = F_{omc} \cdot y_c = (6 \cdot 2) \cdot 8 = 96 \text{ см}^3 = 96 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

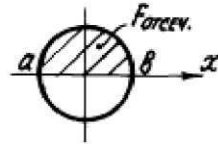


Рис. 53. Сечение балки.

осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси:

$$I_x = \frac{6 \cdot 18^3}{12} = 2916 \text{ см}^4 = 2916 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

После подстановки числовых значений в формулу Журавского, получим:

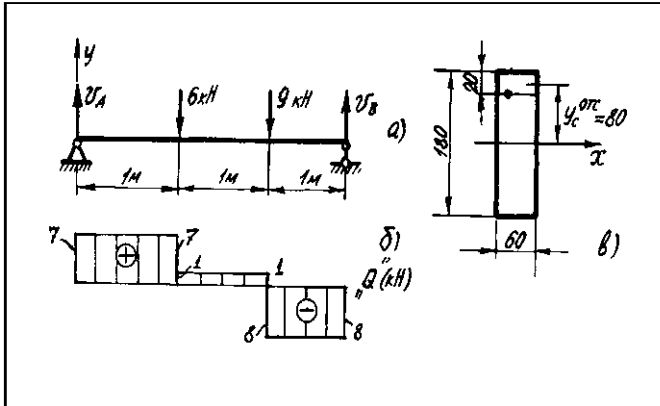


Рис. 54. Схемы расчета касательных напряжений

$$\tau_A = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 96 \cdot 10^6}{2916 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} = 4,39 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,439 \text{ МПа}.$$

Максимальные касательные напряжения в точках нейтральной оси вычисляем аналогично.

Статический момент части сечения, расположенного выше нейтральной оси:

$$S_x^{onc} = F_{onc} \cdot y_c = (6 \cdot 9) \cdot 4,5 = 243 \text{ см}^3 = 243 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

Максимальные касательные напряжения:

$$\tau_{max} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 243 \cdot 10^6}{2916 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} = 1,109 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,109 \text{ МПа}.$$

6. Примеры решения типовых задач определения перемещений при изгибе

6.1. Определение прогиба и угла поворота балки на конце консоли

Пример. Для стальной балки (рис. 55), изготовленной из двутавра № 20а ($I_x = 2030 \text{ см}^4$, $I' = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$), подсчитать прогиб и угол поворота на конце консоли.

Решение. Начало координат выбираем в заделке, ось z направляем слева направо, ось y - вверх. Записываем уравнения равновесия и определяем опорные реакции:

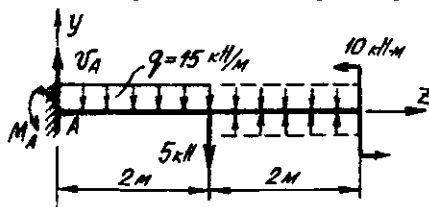


Рис. 55. Расчетная схема балки

$$\sum Y = 0; V_A - 15 \cdot 2 - 5 = 0; V_A = 35 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; M_A + 10 - 5 \cdot 2 - 15 \cdot 2 \cdot 1 = 0; M_A = 30 \text{ кНм}.$$

Распределенную нагрузку продолжаем до конца консоли и на этом участке прикладываем компенсирующую нагрузку, направленную в противоположную сторону. В заделке прогиб y_0 и угол поворота θ_0 равны нулю. Тогда уравнение упругой линии имеет вид:

$$EI_x y = -\frac{30 \cdot (z-0)^2}{2} + \frac{35 \cdot (z-0)^3}{6} - \frac{5 \cdot (z-2)^3}{6} - \frac{15 \cdot (z-0)^4}{24} + \frac{15 \cdot (z-2)^4}{24}.$$

Для вычисления прогиба на конце консоли подставим в уравнение упругой линии $z = 4 \text{ м}$:

$$EI_x y_C = -\frac{30 \cdot (4-0)^2}{2} + \frac{35 \cdot (4-0)^3}{6} - \frac{5 \cdot (4-2)^3}{6} - \frac{15 \cdot (4-0)^4}{24} + \frac{15 \cdot (4-2)^4}{24} = -\frac{70}{3};$$

$$y_C = -\frac{70}{3EI_x} = -\frac{70 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2030 \cdot 10^8} = -5,48 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -5,48 \text{ мм}.$$

Для вычисления угла поворота конца консоли продифференцируем уравнение упругой линии по z :

$$EI_x y' = -30 \cdot (z-0) + \frac{35 \cdot (z-0)^2}{2} - \frac{5 \cdot (z-2)^2}{2} - \frac{15 \cdot (z-0)^3}{6} + \frac{15 \cdot (z-2)^3}{6}.$$

Подставив в последнее уравнение $z = 4$ м, вычисляем угол поворота сечения на конце консоли:

$$EI_x y' = -30 \cdot (4-0) + \frac{35 \cdot (4-0)^2}{2} - \frac{5 \cdot (4-2)^2}{2} - \frac{15 \cdot (4-0)^3}{6} + \frac{15 \cdot (4-2)^3}{6} = 10;$$

$$y' = \frac{10}{EI_x} = \frac{10 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 2,46 \cdot 10^{-3} \text{ радиан}.$$

6.2. Определение прогиба и угла поворота в среднем сечении балки

Пример. Для стальной балки (рис. 56), изготовленной из двутавра № 16, при $q = 20$ кН/м, $l = 2$ м подсчитать прогиб и угол поворота сечения посередине пролета.

Решение. Определяем опорные реакции.

Начало координат выбираем на левом конце балки, ось z направляем слева направо, ось y - вверх. При таком выборе системы координат начальные параметры $y_0 = 0, \theta_0 \neq 0$.

Распределенную нагрузку продолжаем до конца балки и на этом участке прикладываем компенсирующую нагрузку, направленную вверх. Записываем уравнения равновесия и вычисляем опорные реакции:

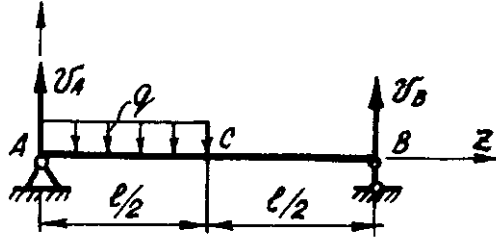


Рис. 56. Расчетная схема балки.

$$\sum M_B = 0: V_A \cdot l - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{3}{4} l = 0; V_A = \frac{3}{8} q \cdot l;$$

$$\sum M_A = 0: V_B \cdot l - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0; V_B = \frac{1}{8} q \cdot l.$$

Проверим вычисления, используя уравнение статики:

$$\sum Y = 0: -q \cdot \frac{l}{2} + \frac{3}{8} q \cdot l + \frac{1}{8} q \cdot l = 0.$$

Универсальное уравнение упругой линии имеет вид:

$$EI_x y = EI_x \theta_0 \cdot z + \frac{3ql}{8} \cdot (z-0)^3 - \frac{q \cdot (z-0)^4}{24} + \frac{q \cdot \left(z - \frac{l}{2}\right)^4}{24}.$$

Из условия закрепления правого конца балки ($y|_{z=l} = y_B = 0$) находим значение угла поворота сечения в начале координат θ_0 :

$$EI_x y|_{z=l} = EI_x \theta_0 \cdot l + \frac{3ql}{8} \cdot l^3 - \frac{q \cdot l^4}{24} + \frac{q \cdot \left(l - \frac{l}{2}\right)^4}{24}; EI_x \theta_0 = -\frac{9ql^3}{384}.$$

Тогда универсальное уравнение упругой линии принимает вид:

$$EI_x y = -\frac{9ql^3}{384} z + \frac{q \cdot l \cdot z^3}{16} - \frac{q \cdot z^4}{24} + \frac{q \cdot \left(z - \frac{l}{2}\right)^4}{24}.$$

Для того, чтобы получить уравнение, позволяющее вычислить угол поворота любого сечения балки, продифференцируем последнее уравнение по аргументу z :

$$EI_x y' = -\frac{9ql^3}{384} + \frac{3ql \cdot z^2}{16} - \frac{q \cdot z^3}{6} + \frac{q \cdot \left(z - \frac{l}{2}\right)^3}{6}.$$

Подставляя в последние два уравнения $z = \frac{l}{2}$, находим искомый прогиб и угол поворота сечения посередине пролета:

$$EI_x y|_{z=\frac{l}{2}} = -\frac{5 \cdot ql^4}{768}; \quad EI_x y'|_{z=\frac{l}{2}} = \frac{ql^3}{384}.$$

Для стального двутавра №16

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}, I_x = 873 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Подставляя в полученные формулы численные значения $l = 2 \text{ м}$, $z = \frac{l}{2} = 1 \text{ м}$, $q = 20 \text{ кН/м}$, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $I_x = 873 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, вычисляем соответственно прогиб и угол поворота сечения посередине пролета:

$$y|_{z=\frac{l}{2}} = -\frac{5 \cdot ql^4}{768 \cdot EI_x} = -\frac{5 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 2^4}{768 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = -1,19 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -1,19 \text{ мм}$$

$$y'|_{z=\frac{l}{2}} = \frac{ql^3}{384 \cdot EI_x} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{384 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 0,24 \cdot 10^{-3} \text{ радиан}$$

6.3. Определение прогиба в различных точках балки

Пример. Для балки (рис. 57) постоянной жесткости EI_x определить прогиб посередине пролета и на конце консоли.

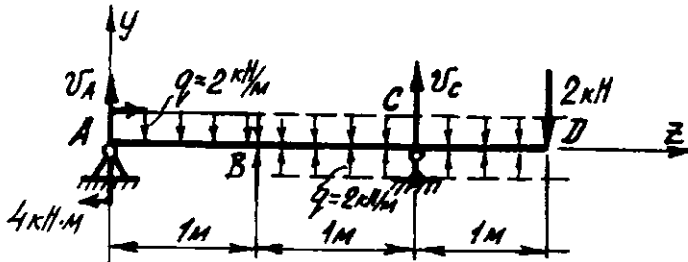


Рис. 57. Схема расчета прогиба балки.

Решение. Начало координат совмещаем с левым сечением балки, ось z направляем слева направо, ось y - вверх. Записываем уравнения равновесия:

$$\sum M_C = 0; V_A \cdot 2 + 4 - 2 \cdot 1 \cdot 1,5 + 2 \cdot 1 = 0; V_A = -1,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; V_C \cdot 2 - 4 - 2 \cdot 1 \cdot 0,5 - 2 \cdot 3 = 0; V_C = 5,5 \text{ кН}.$$

Проверим вычисления, используя уравнение статики:

$$\sum Y = 0; -1,5 + 5,5 - 2 \cdot 1 - 2 = 0.$$

Реакции опор определены правильно.

Распределенную нагрузку продолжаем до конца балки, прикладывая на участке BD точно такую же нагрузку, направленную вверх. Начальные параметры $y_0 = 0, \theta_0 \neq 0$.

Универсальное уравнение упругой линии имеет вид:

$$EI_x y = EI_x \theta_0 z + \frac{4(z-0)^2}{2} - \frac{1,5(z-0)^3}{6} + \frac{5,5(z-2)^3}{6} - \frac{2(z-0)^4}{24} + \frac{2(z-1)^4}{24}.$$

Подставив в уравнение $z = 2 \text{ м}$, находим из условия равенства нулю прогиба на правой опоре значение θ_0 - угла поворота сечения в начале координат:

$$EI_x y_C = EI_x \theta_0 \cdot 2 + \frac{4(2-0)^2}{2} - \frac{1,5(2-0)^3}{6} - \frac{2(2-0)^4}{24} + \frac{2(2-1)^4}{24} = 0$$

$$EI_x \theta_0 = -2,37.$$

Учитывая полученный результат, имеем:

$$EI_x y = -2,37 z + \frac{4(z-0)^2}{2} - \frac{1,5(z-0)^3}{6} - \frac{5,5(z-2)^3}{6} - \frac{2(z-0)^4}{24} - \frac{2(z-1)^4}{24}.$$

Прогиб посередине пролета получим, подставив в универсальное уравнение упругой линии $z = 1 \text{ м}$:

$$EI_x y_3 = -2,37 \cdot 1 + \frac{4(1-0)^2}{2} - \frac{1,5(1-0)^3}{6} - \frac{2(1-0)^4}{24} = -0,70;$$

$$y_3 = -\frac{0,70}{EI_x}.$$

Подставив в универсальное уравнение упругой линии $z = 3 \text{ м}$, вычислим прогиб на конце консоли:

$$EI_x y_D = -2.37 \cdot 3 + \frac{4(3-0)^2}{2} - \frac{1.5(3-0)^3}{6} + \frac{5.5(3-2)^3}{6} - \frac{2(3-0)^1}{24} + \frac{2(3-1)^1}{24} = -0.36; y_D = -\frac{0.36}{EI_x}$$

6.4. Расчет прогиба и жесткости балки с помощью универсального уравнения упругой линии

Пример. Используя универсальное уравнение упругой линии, определить прогиб посередине пролета и проверить жесткость стальной балки, показанной на рис. 58.

При расчетах принять $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $EI_x = 1000 \cdot 10^{-8}$ м⁴.

Решение.

Начало координат совмещаем с левым сечением балки, ось z направляем слева направо, ось y - вверх. Определяем опорные реакции, для чего записываем уравнения равновесия:

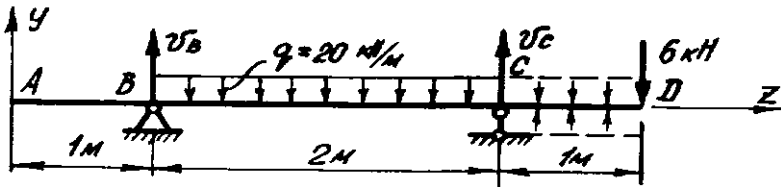


Рис. 58. Расчетная схема балки.

$$\sum M_C = 0; V_B \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 0; V_B = 17 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; V_C \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 - 6 \cdot 3 = 0; V_C = 29 \text{ кН}.$$

Проверим вычисления, используя уравнение статики:

$$\sum Y = 0; 17 + 29 - 20 \cdot 2 - 6 = 0.$$

Реакции опор определены правильно.

Распределенная нагрузка не доходит до конца балки, поэтому ее продолжаем до конца, прикладывая точно такую же распределенную нагрузку, направленную вверх.

Записываем универсальное уравнение упругой линии:

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z + \frac{17(z-1)^3}{6} + \frac{29(z-3)^3}{6} - \frac{6(z-4)^3}{6} - \frac{20(z-1)^4}{24} + \frac{20(z-3)^4}{24}.$$

Очевидно, что оба начальных параметра не равны нулю. Их величины определяем из условий равенства нулю прогибов на опорах B и C .

Прогиб на опоре B ($z = 1$ м)

$$M_{\max} = 155,6 \cdot 10^{-6} \cdot 160 = 0,281 \cdot q \cdot l^2 = 0,281 \cdot q \cdot 2^2 = 1,124q$$

Прогиб на опоре C ($z = 3$ м)

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 3 + \frac{17(3-1)^3}{6} - \frac{20(3-1)^4}{24} = 0.$$

Решая систему двух уравнений с двумя неизвестными, определяем величины искомых параметров y_0, θ_0 :

$$EI_x y_0 = 4,7 EI_x \theta_0 = -4,7.$$

Подставив найденные значения y_0, θ_0 в универсальное уравнение упругой линии и полагая $z = 2$ м, вычисляем прогиб посередине пролета:

$$EI_x y|_{z=2} = 4,7 - 4,7 \cdot 2 + \frac{17(2-1)^3}{6} - \frac{20(2-1)^4}{24} = -2,73; \quad \text{Допускае-}$$

$$y|_{z=2} = \frac{2,73}{EI_x} = \frac{2,73 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1000 \cdot 10^{-8}} = 1,365 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,365 \text{ мм}.$$

мая величина прогиба обычно составляет $\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{500}\right)$ от вели-

чины пролета балки l .

При $l = 200$ см можно принять $f = \frac{1}{250} \cdot l = \frac{200}{250} = 0,8 \text{ см} = 8 \text{ мм}$, сле-

довательно, прогиб посередине пролета оказался меньше, и балка удовлетворяет условию жесткости.

Заключение.

В учебном пособии «Изгиб» включены основные положения теории по данному разделу. В примерах решения типовых задач изложен методический подход, позволяющий студентам самостоятельно решать задачи по разделу «Изгиб». По мнению авторов учебного пособия при внимательном и добросовестном его изучении, студенты

получат навыки, которые помогут при изучении и работе с учебными пособиями по следующим разделам курса.

Библиографический список

1. Беляев П.М. Сборник задач по сопротивлению материалов. -Л.: Наука, 1967. – 352 с.
2. Фсодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.:Наука, 1986.–512с.
3. Дарков А.В., Шширо Г.С. Сопротивление материалов.-М.: Паука, 1975.– 624 с.
4. Сопротивление материалов / Под ред. А.Ф.Смирнова М.: Высш. школа, 1975.– 480 с.
5. Рудиица М.Н. и др. Справочное пособие по сопротивлению материалов. Минск: Высш.школа, 1970. —410 с.
6. Миролубов И.П. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. М.: Высш.пкола, 1985.– 399 с.
7. Бсаяев Н.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1976. - 608 с.
8. Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. В.К. Качурина. М.: Наука, 1984. – 432 с.
9. Додин Ю.С., Лысюк А.Я., Сумснков А.Л. Сборник индивидуальных задач по сопротивлению материалов. Растяжение – сжатие /Новомосковск, ПИ РХТУ, 1991.– 86 с.
10. Додин Ю.С., Лысюк А.Я., Сумснков А.Л. Сборник индивидуальных задач по сопротивлению материалов. Кручение/ Новомосковск, ПИ РХТУ, 1991. –37 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Введение.....	4
1.Основные теоретические сведения и расчетные формулы изгиба прямого бруса.....	5
2.Примеры решения типовых задач на построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе.....	17
2.1.Построение эпюр для балки, защемленной одним концом.....	17
2.2.Построение эпюр при действии на свободный конец балки сосредоточенного момента.....	18
2.3. Построение эпюр при действии на свободный конец балки сосредоточенной силы.....	19
2.4.Построение эпюр для шарнирно- опертой балки.....	21
2.5.Построение эпюр для балки с нагруженной консолью.....	22
2.6.Построение эпюр для балки с вросленным промежуточным шарниром.....	23
2.7.Определение по эпюрам «Q» и «M» нагрузки, действующей на балку.....	24

2.8. Расчет нагрузки на балку по заданным эпюрам.....	25
2.9. Расчет максимальных значений «Q» и «M» при действии сплошной нагрузки, распределенной по заданному закону.....	27
3. Примеры построения эпюр для статически неопределимых рам.....	29
3.1. Построение эпюр «Q», «M» и «N» для рамы с зашемленным концом.....	29
3.2. Построение эпюр для шарнирно -опертой рамы.....	31
3.3. Построение эпюр от действия внешних нагрузок.....	33
3.4. Построение эпюр для рамы с промежуточным шарниром.....	35
3.5. Определение нагрузок и построение эпюр для рамы с наклонным стержнем.....	37
4. Примеры решения типовых задач расчета балок на прочность.....	39
5. Примеры решения типовых задач по расчету касательных на- пряжений при изгибе.....	46
6. Примеры решения типовых задач определения перемещений при изгибе.....	49