

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ
ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БАЛОК
Методические указания

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	2
1. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БАЛОК	3
1.1. Основные понятия и определения	3
1.2. Классификация внешних усилий, действующих на балку	5
1.3. Определение внутренних усилий методом сечений	6
1.4. Определение напряжений в поперечных сечениях балки	8
1.5. Подбор сечений балок и проверка прочности.....	10
2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СЕЧЕНИЙ БАЛОК МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ	14
2.1. Метод начальных параметров	14
2.2. Статические и кинематические граничные условия для определения начальных параметров	17
2.3. Определение перемещений сечений балок и их эпюры.....	18
2.4. Дифференциальные зависимости при изгибе балок	19
3. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЕ УПРАЖНЕНИЕ "РАСЧЕТ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ПРЯМОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ"	20
3.1. Постановка задачи	20
3.2. Пример расчета балки на прочность и жесткость.....	21
3.3. Некоторые образцы задач для самостоятельного решения при защите расчетно-проектировочного задания [6]	35
3.4. Контрольные вопросы.....	36
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	36
ПРИЛОЖЕНИЕ	37

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов представляет собой курс, который можно изучить лишь при интенсивной самостоятельной работе в освоении теории курса, выполнении расчётных индивидуальных заданий, выполнении лабораторных работ и решении задач.

Важнейшим разделом курса сопротивления материалов является изгиб балок. Они часто встречаются в виде элементов сооружений и машин. Балки воспринимают внешние усилия (к которым относятся и реакции опор), а также давления от сопряженных с ними других элементов конструкции и передают их тем элементам конструкций, которые поддерживают балки.

В данных методических указаниях (третье издание) приведены образцы расчетов призматических статически определимых балок на прочность и жесткость при прямом поперечном изгибе, а также задания для самостоятельной работы студентов.

Определение перемещений сечений балок выполнено методом начальных параметров. Расчеты ориентированы на применение ЭВМ.

Приведенные образцы охватывают расчет прочности балок по наибольшим нормальным напряжениям, действующим в крайних волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси опасного поперечного сечения, по наибольшим касательным напряжениям, действующим в сечении, в котором поперечная сила имеет наибольшее значение, и по опасному наклонному сечению с наиболее опасным сочетанием величин изгибающего момента и поперечной силы в точке наиболее неблагоприятного сочетания значений нормального и касательного напряжений.

Выполнен также расчет прочности балок по предельной несущей способности.

1. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БАЛОК

1.1. Основные понятия и определения

Деформация, при которой происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны оси кривого бруса, называется деформацией изгиба. При загрузении бруса внешними усилиями при прямом поперечном изгибе в поперечных сечениях возникают внутренние усилия: изгибающий момент M ($кН\cdot м$) и поперечная сила Q ($кН$), определяемые методом сечений. В частном случае, когда в поперечных сечениях действует лишь изгибающий момент, а поперечная сила равна нулю, изгиб называется чистым [1, 2, 5].

Прямым поперечным изгибом называется вид деформации прямого бруса, возникающий в случае, когда внешние усилия, приложенные к брусу, перпендикулярны к его продольной оси и располагаются в одной плоскости, совпадающей с главной плоскостью инерции бруса или параллельной ей, проходящей через линию центров изгиба. Последняя является геометрическим местом центров изгиба.

Центром изгиба называется точка, находящаяся в плоскости поперечного сечения бруса, в которой приложенная сила не вызывает кручения сечения (эта сила является равнодействующей касательных сил, действующих в плоскости сечения).

Если главная плоскость инерции бруса является плоскостью его симметрии, то линия центров изгиба лежит в этой плоскости, а при наличии у бруса двух или более плоскостей симметрии линия центров изгиба совпадает с продольной осью бруса. Брус, претерпевающий деформацию изгиба, называется балкой. В дальнейшем будем рассматривать балки, имеющие хотя бы одну плоскость симметрии, в которой приложены все внешние усилия, действующие на балку. Возможная форма поперечных сечений балок имеет вид, показанный на рис. 1.1.

Поперечная сила в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, взятых на ось, перпенди-

кулярную к оси балки в месте сечения. Эта ось находится в плоскости сечения и проходит через его центр тяжести. Если поперечная сила стремится отсеченную часть балки сдвигать по ходу часовой стрелки относительно точек внутренней нормали к сечению, то она положительна. В противном случае – отрицательна.

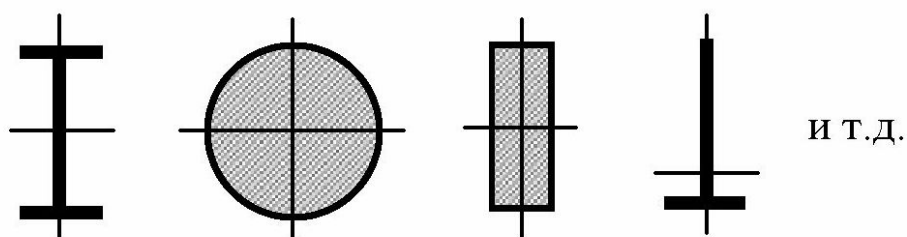


Рис. 1.1

Изгибающий момент в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных к балке по одну сторону от сечения, взятых относительно оси, расположенной в плоскости сечения и проходящей через его центр тяжести (при прямом изгибе за эту ось принимают главную центральную ось инерции, перпендикулярную плоскости изгиба).

Изгибающий момент положителен, если он растягивает нижние, передние или правые волокна балок.

При прямом изгибе балки её первоначально прямолинейная ось искривляется в процессе деформации, являясь плоской кривой, а поперечные сечения поворачиваются, оставаясь перпендикулярными к продольным волокнам балки (это строго выполняется при чистом изгибе, поскольку при нем строго выполняется гипотеза плоских сечений).

Прогибом ν (m) называется величина перемещения центра тяжести сечения по нормали к продольной оси балки в недеформированном состоянии. Углом поворота сечения θ (rad) называется угол между направлениями плоскости поперечного сечения до деформации и в деформированном состоянии. Величины ν , θ и их знаки показаны на рис. 1.2.

Жесткостью поперечного сечения балки является величина EI ($kH \cdot m^2$), где E – модуль упругости первого рода, характеризующий материал, I – момент инерции сечения относительно главной центральной оси инерции (на рис. 1.2 ось Z), характе-

ризующий геометрию сечения [1, 2, 5]. На том же рис. 1.2 показаны принятые направления координатных осей. Начало координат совпадает с центром тяжести сечения.

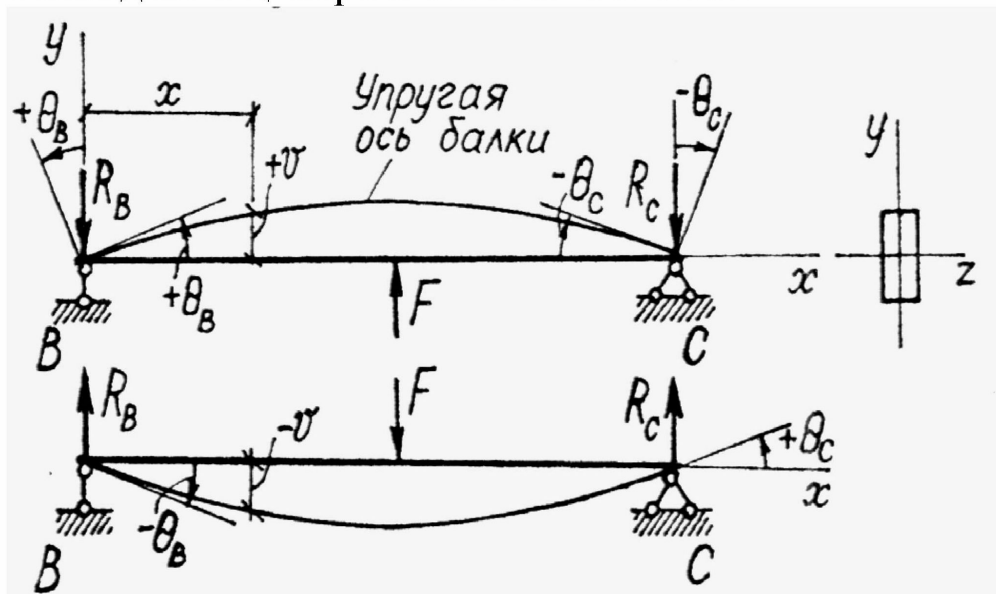


Рис. 1.2

1.2. Классификация внешних усилий, действующих на балку

К внешним усилиям, действующим на балку, относятся активные силы (нагрузки) и реактивные (реакции опор).

Нагрузки могут быть сосредоточенными F (кН); сплошными, распределенными по длине интенсивностью q (кН/м) или по площади (кН/м²); моментными сосредоточенными M (кН·м); моментными распределенными по длине m (кН·м/м) (моментная распределенная нагрузка на практике встречается редко).

Число реакций опор, с определения которых обычно начинается расчет балок, зависит от устройства опор, которые могут быть трех основных типов: шарнирно-подвижная опора, шарнирно-неподвижная опора и жестко-защемляющая опора.

Балки, реакции опор которых могут быть определены из уравнений статики, называются статически определимыми. Балки, у которых общее число реакций опор больше числа уравнений равновесия, называются статически неопределимыми. В данном пособии рассматриваются статически определимые балки.

1.3. Определение внутренних усилий методом сечений

Для определения изгибающих моментов и поперечных сил, действующих в поперечных сечениях балки, применяется метод сечений.

Пусть, например, требуется определить изгибающие моменты и поперечные силы в сечениях балки, изображенной на рис. 1.3,а. Все внешние силы, действующие на балку, будем считать известными.

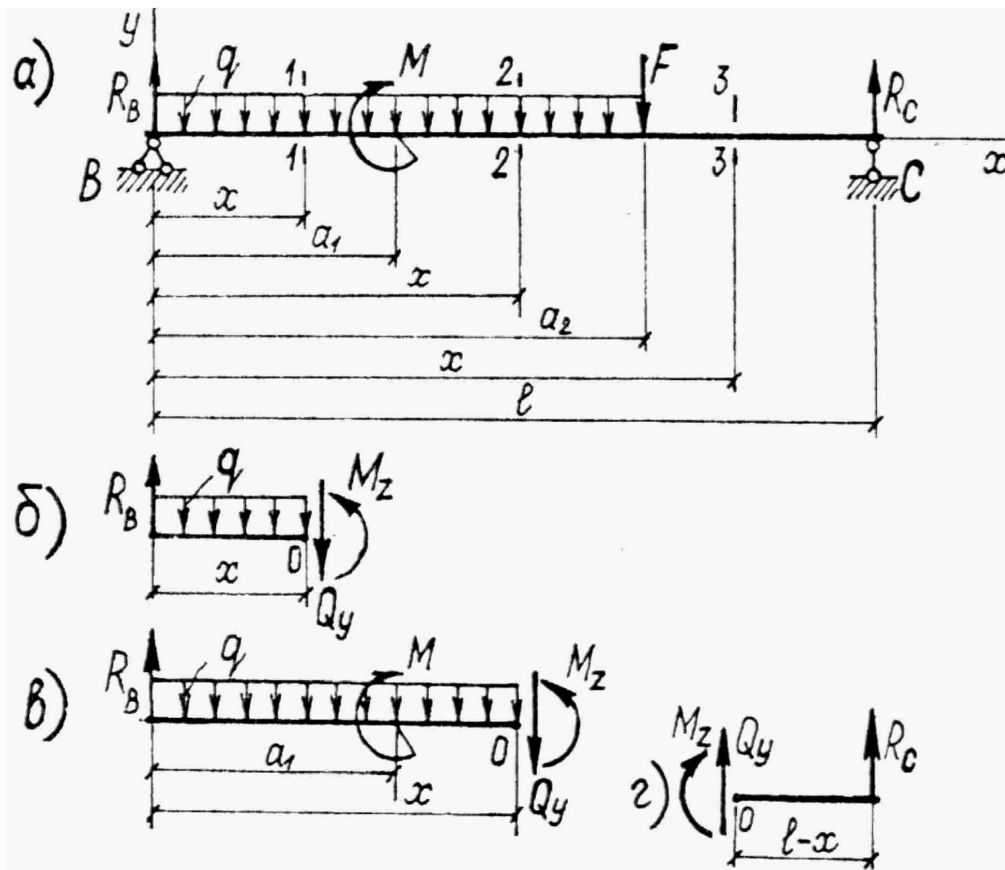


Рис. 1.3

Балка имеет три грузовых участка. Участком называется часть балки, в пределах которой внутренние усилия изменяются по одному закону.

Мысленно разрежем балку сечением 1–1, взятым на расстоянии x от левого конца балки (рис. 1.3,а). Отбросим правую отсеченную часть и рассмотрим оставшуюся. Заменим действие отброшенной части на оставшуюся изгибающим моментом и поперечной силой положительного направления (рис. 1.3,б). Уравнения равновесия для грузового участка балки $0 \leq x \leq a_1$ имеют вид:

$$\sum m_0 = M_z - R_B \cdot x + \frac{q \cdot x^2}{2} = 0; \quad M_z = R_B \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2},$$

$$\sum Y = -Q_y + R_B - q \cdot x = 0; \quad Q_y = R_B - q \cdot x.$$

(индекс 0 в $\sum m_0$ означает центр тяжести рассматриваемого сечения).

В сечении 2–2 второго участка $a_1 \leq x \leq a_2$ (отсеченная часть показана на рис. 1.3,в) из уравнений равновесия находим:

$$M_z = R_B \cdot x + M - \frac{q \cdot x^2}{2}; \quad Q_y = R_B - q \cdot x.$$

Целесообразно рассматривать ту отсеченную часть балки, на которую действует меньше усилий. Так, при определении Q_y и M_z в сечении 3–3 отбросим левую часть и рассмотрим равновесие правой отсеченной части (рис. 1.3,г), для которой $a_2 \leq x \leq l$. Из уравнения равновесия получим:

$$M_z = R_C \cdot (l - x); \quad Q_y = -R_C.$$

Для наглядного представления об изменении M_z и Q_y по длине балки строят эпюры (графики), ординатами которых являются величины изгибающих моментов и поперечных сил в соответствующих сечениях балки (см. раздел 3 и [3]). По этим эпюрам определяют опасные сечения балок.

Между M_z , Q_y и q имеются следующие дифференциальные зависимости (для балок, на которые не действуют распределенные пары сил, вызывающие изгиб) [5 и др.]:

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y; \quad \frac{dQ_y}{dx} = -q; \quad \frac{d^2M_z}{dx^2} = -q. \quad (1.1)$$

Нагрузка q , направленная вниз, – отрицательна. Эти зависимости позволяют сделать ряд заключений о виде эпюр M_z и Q_y , полезных для контроля правильности их построения.

1. Если на каком-либо участке поперечная сила положительна ($(dM_z / dx) > 0$), то изгибающий момент алгебраически возрастает; если поперечная сила отрицательна ($(dM_z / dx) < 0$), то изгибающий момент убывает. Если Q_y пе-

переходит через нуль, меняя знак, то в соответствующем сечении имеется относительный максимум или минимум M_z . На участке, где $Q_y=0$, $M_z = \text{const}$.

2. На участке, где $q = 0$, эпюра поперечных сил очерчивается прямой, параллельной оси абсцисс ($Q_y = \text{const}$), эпюра изгибающих моментов – прямой, наклонной к этой оси.

3. На участке балки, загруженном сплошной равномерно распределенной нагрузкой, эпюра Q_y представляет собой прямую, наклонную к оси абсцисс, эпюра M_z – дугу квадратной параболы, обращенной выпуклостью в сторону направления нагрузки (правило паруса).

1.4. Определение напряжений в поперечных сечениях балки

При прямом поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают нормальные и касательные напряжения. На основании принципа суперпозиции:

$$\sigma_x = f(M_z) ; \quad \tau_{yx} = \varphi(Q_y).$$

Нормальные напряжения σ_x в поперечном сечении балки вычисляются следующим образом [1]:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y, \quad (1.2)$$

где M_z – изгибающий момент; I_z – момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси Z ; y – ордината точки относительно нейтральной оси, в которой определяется нормальное напряжение (M_z и y подставляются в (1.2) с учетом знака).

Нейтральная ось при прямом поперечном изгибе – главная центральная ось инерции, перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента.

Из (1.2) видно, что по высоте поперечного сечения балки нормальные напряжения распределяются по линейному закону. Наибольшие растягивающие и наибольшие по абсолютной величине сжимающие нормальные напряжения действуют в точ-

ках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси Z и определяются по формулам:

$$\sigma_{x,\max} = - \frac{M_{z\frac{\max}{\min}} \cdot y_1}{I_z}; \quad (1.3)$$

$$\sigma_{x,\min} = - \frac{M_{z\frac{\max}{\min}} \cdot y_2}{I_z}, \quad (1.4)$$

где y_1 и y_2 – ординаты точек наиболее удаленных от нейтральной оси, и находящихся, соответственно, в растянутой (y_1) и сжатой (y_2) зонах сечения

Касательные напряжения τ_{yx} (параллельные оси Y при нормали X к сечению), действующие в точке поперечного сечения, определяются по формуле Д.И. Журавского:

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y \cdot |S_z|}{I_z \cdot b}. \quad (1.5)$$

В (1.5) входят следующие величины: Q_y – поперечная сила в том сечении, в точках которого определяются касательные напряжения τ_{yx} ; I_z – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси Z ; $|S_z|$ – статический момент отсеченной части площади поперечного сечения, расположенной выше или ниже уровня, на котором определяются касательные напряжения, взятый относительно нейтральной оси Z ; b – ширина сечения на уровне точки, в которой определяются напряжения τ_{yx} .

Наибольшие по модулю касательные напряжения τ_{yx} будут в тех точках поперечного сечения, где отношение $\frac{|S_z|}{b}$ достигает максимума. В частности, при $b = \text{const}$ наибольшие по модулю касательные напряжения возникают в точках нейтральной оси:

$$\tau_{yx,\max} = \frac{|Q_y|_{\max}}{I_z} \cdot \left| \frac{S_z}{b} \right|_{\max} \quad (1.6)$$

Знак τ_{yx} определяется знаком Q_y .

1.5. Подбор сечений балок и проверка прочности

По эпюрам изгибающих моментов и поперечных сил находят опасные сечения 1–1, 2–2 и 3–3 (рис. 1.4).

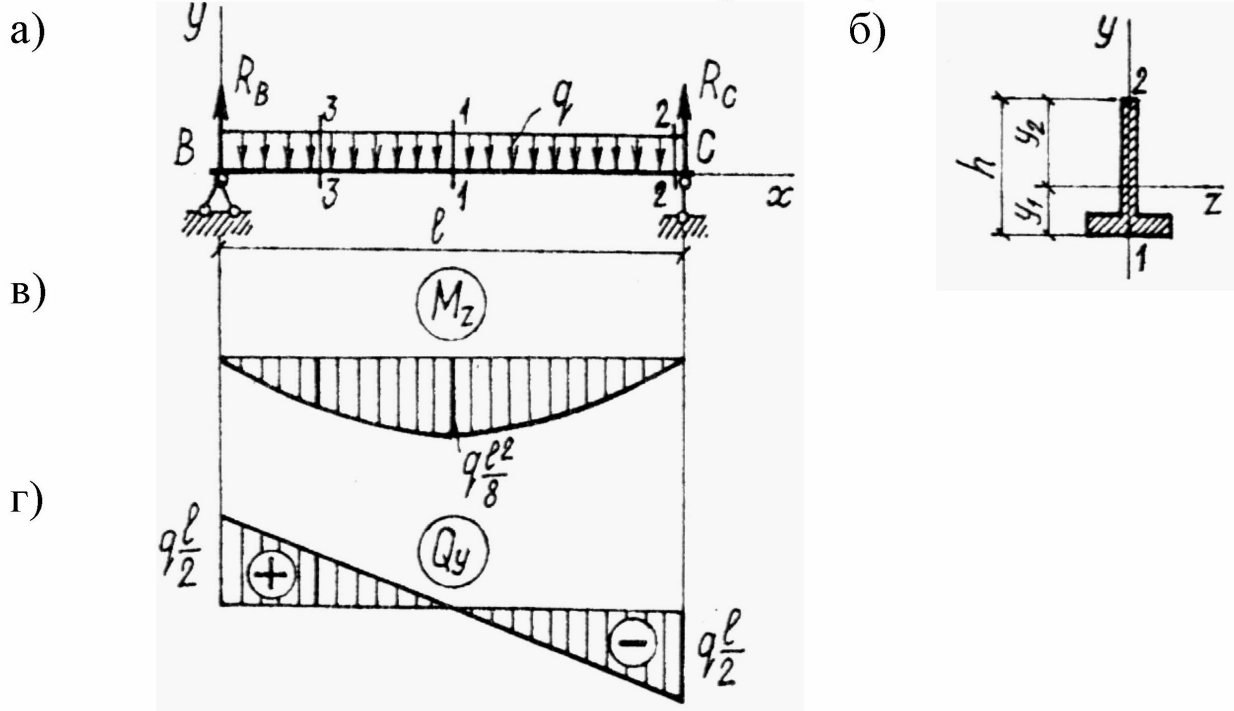


Рис. 1.4

Опасным сечением 1–1 является сечение, в котором действует наибольший по модулю изгибающий момент. Опасным сечением 2–2 будет сечение, в котором действует наибольшая по модулю поперечная сила. Опасным сечением 3–3 является сечение, в котором одновременно изгибающий момент и поперечная сила имеют наиболее неблагоприятное сочетание. В общем случае это сечение находится методом проб. Для балки, показанной на рис. 1.4,а, эпюры M_z и Q_y приведены на рис. 1.4,в,г. Опасное сечение 1–1 находится в середине пролета, опасное сечение 2–2 бесконечно близко к опоре В (или к опоре С), опасное сечение 3–3, как упоминалось, определяется путем проб и располагается между опорой В и сечением 1–1 или между опорой С и сечением 1–1.

Рассмотрим балку с несимметричным сечением относительно нейтральной оси (рис. 1.4, б). В опасном сечении 1–1 опасными точками будут точки 1 и 2 (рис. 1.5,а), в которых имеет место линейное напряженное состояние (рис. 1.6,а,б).

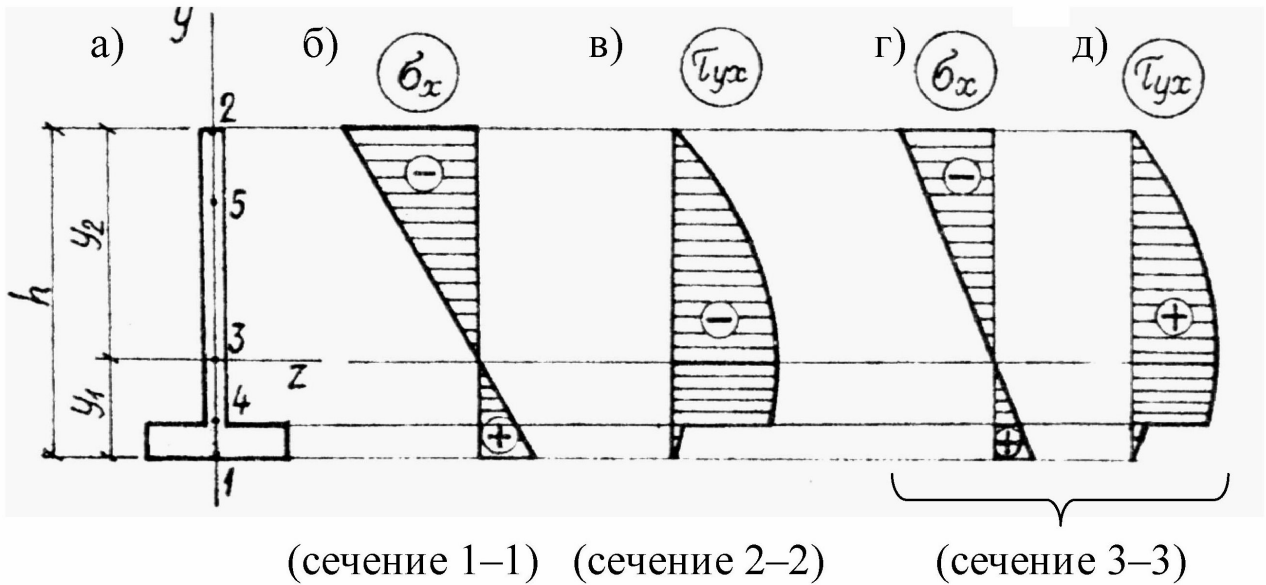


Рис. 1.5

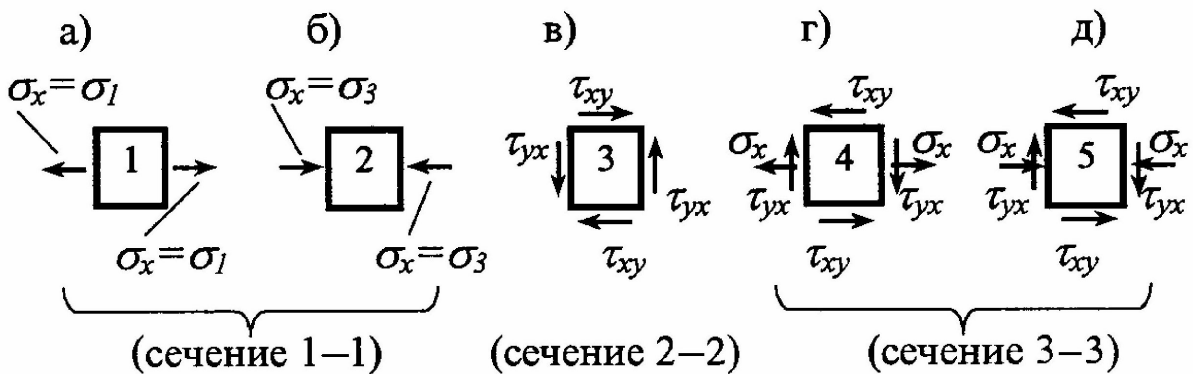


Рис. 1.6

Прочность материала в этих точках будет обеспечена, если выполняются условия прочности (1.7) и (1.8) для хрупкого материала:

$$\sigma_1 = \sigma_{x,\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_{z1}} \leq R_t ; \quad (1.7)$$

$$|\sigma_3| = |\sigma_{x,\min}| = \frac{|M_z|_{\max}}{W_{z2}} \leq R_c, \quad (1.8)$$

где R_t и R_c – расчетные сопротивления материала соответственно на растяжение и сжатие; W_{z1} , W_{z2} – осевые моменты сопротивления материала изгибу (m^3).

$$\text{Для растянутой зоны} \quad W_{z1} = \frac{I_z}{|y_1|}; \quad (1.9)$$

$$\text{для сжатой зоны} \quad W_{z2} = \frac{I_z}{|y_2|} \quad (1.10)$$

Если балка выполнена из пластичного материала, то $R_t = R_c = R$ и опасной точкой в сечении будет та точка, в которой действует наибольшее по модулю нормальное напряжение. В рассматриваемом примере такой точкой является точка 2, условие прочности в которой имеет вид:

$$|\sigma_3| = |\sigma_x|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq R, \quad (1.11)$$

где R – расчетное сопротивление пластичного материала;

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}}. \quad (1.12)$$

В этом случае для балки (см. рис. 1.4) $W_z = \frac{I_z}{y_2}$.

В опасном сечении 2–2 опасной является точка 3 поперечного сечения, лежащая на нейтральной оси, т.к. в этой точке возникают наибольшие по модулю касательные напряжения (рис. 1.5,в). В окрестности точки 3 материал находится в состоянии чистого сдвига (рис. 1.6,в), т.к. σ_x в точках поперечного сечения на нейтральной оси равны нулю, а σ_y равны нулю в силу принятого допущения о ненадавливании продольных волокон в поперечном направлении.

Прочность материала в точке 3 будет обеспечена, если выполнено условие

$$\left| \tau_{yx} \right|_{\max} = \frac{\left| Q_y \right|_{\max}}{I_z} \cdot \left| \frac{S_z}{b} \right|_{\max} \leq R_s, \quad (1.13)$$

где R_s – расчетное сопротивление на сдвиг.

В опасном сечении 3–3 опасными являются точка поперечного сечения стенки 4 или 5. Из них опаснее та точка, в которой имеет место наиболее неблагоприятное сочетание величин нормального и касательного напряжений. Напряжения в опасной точке определяются по формулам (1.2) и (1.5). Материал в окрестности опасной точки находится в условиях плоского (двухосного) напряженного состояния (рис. 1.6, в, г, д).

Необходимо определить главные напряжения, действующие в опасной точке по наклонным площадкам:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2}, \quad \sigma_2 = 0. \quad (1.14)$$

Прочность материала в окрестности опасной точки проверяем, используя для балки, выполненной из пластичного материала, гипотезы прочности – наибольших касательных напряжений или энергетическую. Применив гипотезу наибольших касательных напряжений $\sigma_1 - \sigma_3 \leq R$ и подставив (1.14), получим

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2} \leq R. \quad (1.15)$$

Применяя энергетическую гипотезу прочности в виде выражения

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)} \leq R$$

и подставляя (1.14), получим:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{yx}^2} \leq R. \quad (1.16)$$

Балка считается прочной, если условия (1.15) и (1.16) удовлетворены.

Если материал балки хрупкий (на растяжение работает значительно хуже, чем на сжатие), то условия прочности для опас-

ных точек (рис. 1.6,г,д) запишутся с применением гипотезы наибольших нормальных напряжений в следующем виде:

$$\sigma_1 \leq R_t, \quad |\sigma_3| \leq R_c. \quad (1.17)$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СЕЧЕНИЙ БАЛОК МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

2.1. Метод начальных параметров

Дифференциальное уравнение изогнутой упругой оси балки постоянного сечения составляется для каждого грузового участка и имеет вид:

$$EI_z v'' = M_z. \quad (2.1)$$

Знаки слева и справа уравнения (2.1) совпадают при выбранной системе координат, показанной на рис. 2.1 (ρ – радиус кривизны упругой оси).

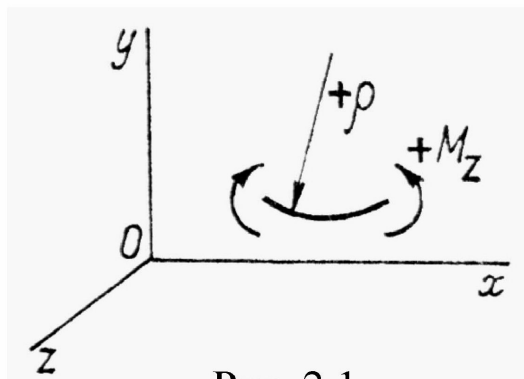


Рис. 2.1

При определённом порядке составления и интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки можно получить сокращение произвольных постоянных до двух (C и D) независимо от числа грузовых участков.

Это достигается следующими приемами:

- 1) отсчет абсцисс сечений всех грузовых участков должен вестись от одного начала координат, которое размещается в крайней левой (или правой) точке оси балки;
- 2) при вычислении изгибающих моментов должна рассматриваться для всех грузовых участков та часть балки, которая содержит начало координат;
- 3) если при обходе по балке встретилась распределенная нагрузка, то она должна доходить до противоположного конца

балки не прерываясь, добавив одновременно той же интенсивности нагрузку другого знака на участке догружения (см. третий и четвертый участки, рис. 2.2);

- 4) сосредоточенный момент вводится в выражение изгибающего момента в виде $M_i(x-a_i)^0$;
- 5) изгибающий момент от сосредоточенной силы должен записываться как $F_i(x-a_i)$. Полином $(x-a_i)$ интегрируется без раскрытия скобок, принимая выражение в скобках за новую переменную величину.

Сначала определяют значения и знаки реакций опор балки. Затем, рассматривая левую (или правую) отсеченную часть балки для последнего грузового участка (рис. 2.2), получают уравнение изогнутой упругой оси в следующем виде:

$$EI_z v'' = M_1 + R_A(x - a_1) - q \frac{(x - a_1)^2}{2} + q \frac{(x - a_2)^2}{2} - (2.2) \\ - M_2(x - a_2)^0 - F(x - a_3) + m(x - a_3),$$

где $M_1 = M_0$ – изгибающий момент в начале координат, x – текущая абсцисса рассматриваемого сечения данного грузового участка, a_i – расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенного усилия или начала действия распределенной нагрузки.

Уравнение (2.2) имеет окончательное выражение в общем виде:

$$EI_z v'' = M_0 + Q_0 x + \sum_1^n M_i(x - a_i)^0 + \sum_1^n F_i(x - a_i) + (2.3) \\ + \sum_1^n m_i(x - a_i) + \sum_1^n q_i \frac{(x - a_i)^2}{2},$$

где Q_0 – поперечная сила в начале координат, n – число усилий одного и того же вида, примененных к балке ($i = 1, 2, \dots, n$).

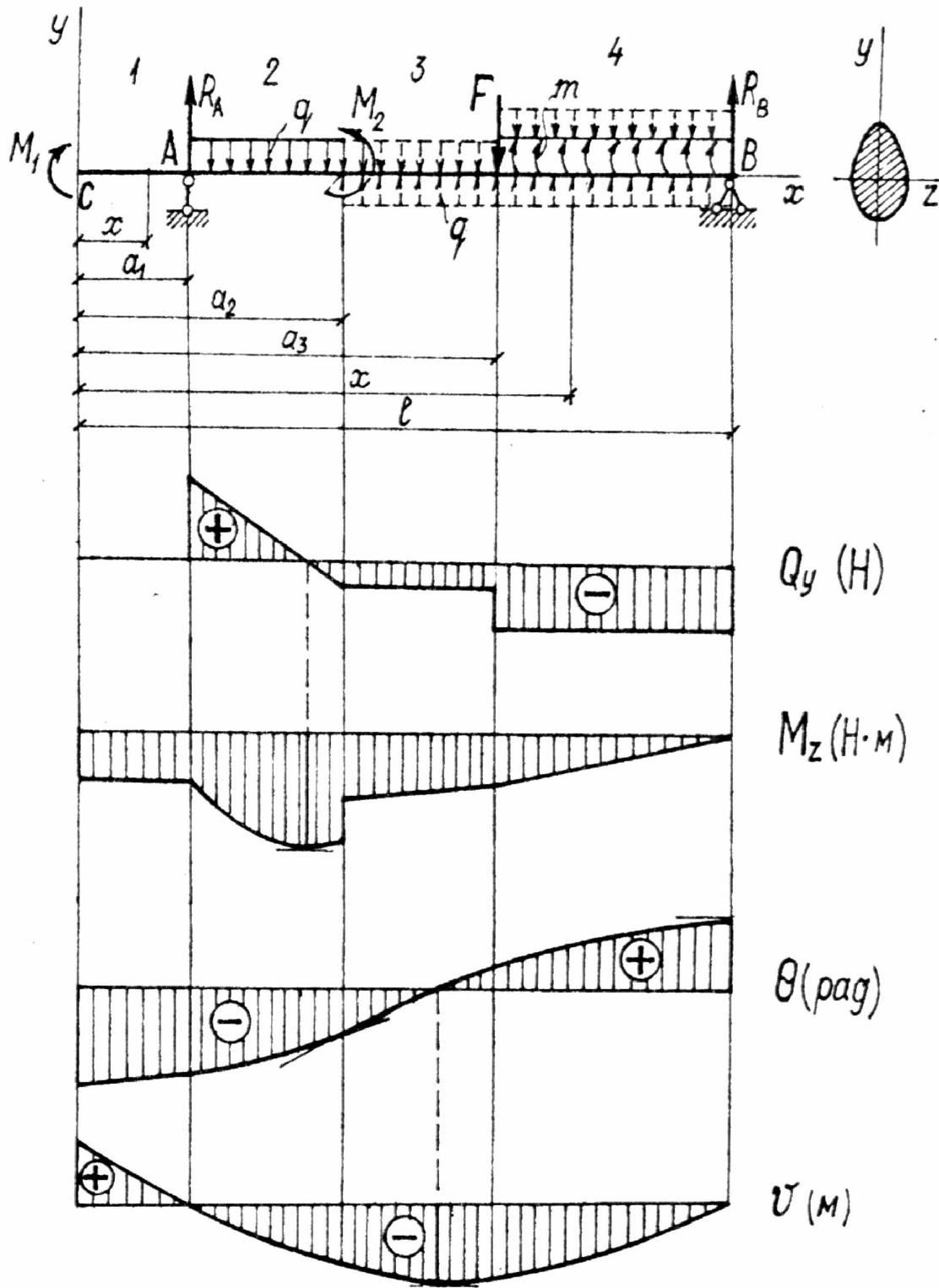


Рис. 2.2

Интегрируя (2.3) два раза, получим две постоянных интегрирования C и D , которые имеют значения:

$$C = EI_z \theta_0 \text{ [кН}\cdot\text{м}^2], \quad D = EI_z \nu_0 \text{ [кН}\cdot\text{м}^3].$$

Отсюда

$$\theta_0 = C/EI_z, \quad \nu_0 = D/EI_z.$$

θ_0 и ν_0 – угол поворота сечения и прогиб в начале координат балки.

Уравнения метода начальных параметров в общем виде имеют выражения:

$$EI_z \nu' = EI_z \theta = EI_z \theta_0 + \frac{M_0 x}{1!} + \frac{Q_0 x^2}{2!} + \sum_1^n M_i \frac{(x - a_i)}{1!} + \sum_1^n F_i \frac{(x - a_i)^2}{2!} + \sum_1^n m_i \frac{(x - a_i)^2}{2!} + \sum_1^n q_i \frac{(x - a_i)^3}{3!}, \quad (2.4)$$

$$EI_z \nu = EI_z \nu_0 + EI_z \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2!} + \frac{Q_0 x^3}{3!} + \sum_1^n M_i \frac{(x - a_i)^2}{2!} + \sum_1^n F_i \frac{(x - a_i)^3}{3!} + \sum_1^n m_i \frac{(x - a_i)^3}{3!} + \sum_1^n q_i \frac{(x - a_i)^4}{4!}, \quad (2.5)$$

где $\theta_0, \nu_0, M_0, Q_0$ – начальные параметры балки.

Для данного грузового участка балки в уравнениях (2.4) и (2.5) исключаются все члены, содержащие в скобках отрицательные значения.

2.2. Статические и кинематические граничные условия для определения начальных параметров

Начальные параметры θ_0 и ν_0 определяются при использовании кинематических граничных условий. Например, для балки, представленной на рис. 2.2, кинематические граничные условия имеют выражения: $x=a_1, \nu=0; x=l, \nu=0$. Записывая (2.5) для первого и последнего грузовых участков и используя эти условия, получим два уравнения, из которых определятся величины θ_0 и ν_0 . Для консольной балки, когда начало коор-

динат находится в заделке, $\theta_0 = 0$, $\nu_0 = 0$. Если на левом конце балки размещена шарнирная опора и начало координат, то $\nu_0 = 0$, $\theta_0 \neq 0$ и для определения θ_0 нужно использовать условие $\nu = 0$ на второй шарнирной опоре.

Начальные параметры Q_0 и M_0 определяются из условий равновесия статически определимой балки (статические условия), за исключением случаев, когда они известны по условию задачи. Для балки (рис. 2.2) известно, что $M_0 = M_1$, $Q_0 = 0$.

2.3. Определение перемещений сечений балок и их эпюры

Для сечений данного грузового участка при определении величин θ и ν в уравнениях (2.4) и (2.5), как упоминалось, опускаются все те члены, которые содержат отрицательные значения в скобках.

Для балки (рис. 2.2) при заданных внешних нагрузках, расчетом определены и построены эпюры M_z и Q_y , представленные на том же рисунке.

Перемещения сечений получим путем решения уравнений (2.4) и (2.5), записанных для сечений каждого грузового участка. Результаты определения величин θ и ν изображены в виде эпюр (рис. 2.2). На рисунке показан качественный вид эпюр, получение же эпюр в числах оставлено для самостоятельной работы студентов.

Для расчета прочности и жесткости балок на прямой поперечный изгиб целесообразно использовать алгоритмы и программы для применения ЭВМ (например, программу "Изгиб" и др.), имеющиеся на кафедре строительной механики НГАСУ [4]. Они позволяют быстро получить искомые величины и построить их эпюры.

2.4. Дифференциальные зависимости при изгибе балок

В вышеизложенном тексте были приведены следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{dQ}{dx} = -q, \quad \frac{dv}{dx} = \theta, \quad EI \frac{d^2v}{dx^2} = M. \quad (2.6)$$

После некоторого преобразования зависимостей (2.6), расположим их последовательно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(EIv) &= EI\theta, \\ \frac{d^2}{dx^2}(EIv) &= \frac{d}{dx}(EI\theta) = M, \\ \frac{d^3}{dx^3}(EIv) &= \frac{d^2}{dx^2}(EI\theta) = \frac{d}{dx}M = Q, \\ \frac{d^4}{dx^4}(EIv) &= \frac{d^3}{dx^3}(EI\theta) = \frac{d^2}{dx^2}M = \frac{d}{dx}Q = -q. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Выражения (2.7) применяют для проверки согласованности эпюр внутренних усилий и перемещений сечений. Например, в сечении, в котором изгибающий момент достигает экстремума, поперечная сила равна нулю. Если прогиб достиг экстремума, то угол поворота сечения равен нулю, (рис. 2.2). Если приращение прогиба $\Delta v > 0$, то угол поворота сечения положителен. При $\Delta v < 0$, $\theta < 0$ и т.д.

Зная нагрузку $q = q(x)$ и устройство опор балки, последовательным интегрированием получают величины Q , M , $EI\theta$, EIv . Зная уравнения изогнутой оси балки, путем последовательного дифференцирования по x из функции EIv получают величины $EI\theta$, M , Q .

3. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЕ УПРАЖНЕНИЕ "РАСЧЕТ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ПРЯМОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ"

3.1. Постановка задачи

Для балок, расчетные схемы которых показаны на рис. 3.2 и приведены данные нагрузок и размеров в табл. 1, требуется:

1. Определить реакции опор. Построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z . Определить положение опасных сечений.
2. Из условия прочности по нормальным напряжениям определить размеры поперечного сечения балки в двух вариантах: "а" и "б" (рис. 3.1). Принять $R=200 \text{ МПа}$.

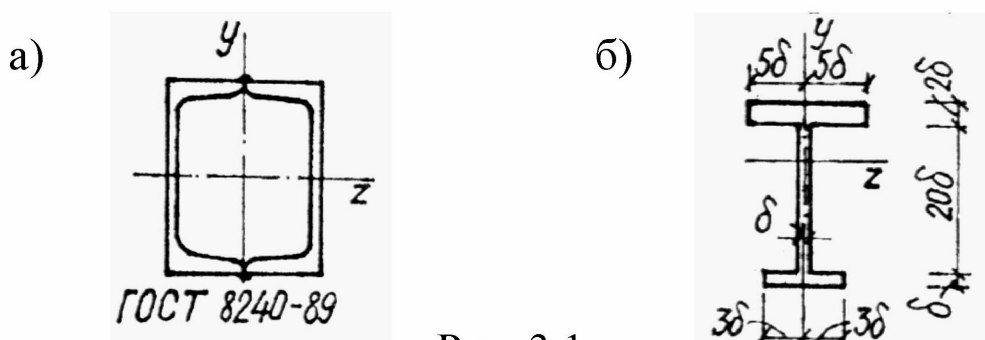


Рис. 3.1

3. Выполнить проверку прочности по касательным напряжениям. Принять $R_s = 120 \text{ МПа}$.
4. Для варианта "б" поперечного сечения сделать проверку прочности материала в точке, в которой имеет место неблагоприятное сочетание нормальных σ_x и касательных τ_{yx} напряжений. Применить гипотезы прочности – наибольших касательных напряжений и энергетическую.
5. Для варианта "б" поперечного сечения определить его размеры из расчета по предельной несущей способности. Принять $\sigma_s = 240 \text{ МПа}$; $k = 1,2$.
6. Для заданной балки записать уравнения прогибов и углов поворота по методу начальных параметров. Определить начальные параметры.

7. Вычислить значение прогиба сечения, находящегося на расстоянии $3a$, и угол поворота сечения, находящегося на расстоянии $6a$ от начала координат.
8. Составить перечень исходных данных для расчета на ЭВМ. Выполнить расчет на ЭВМ. Результаты сравнить с данными, полученными вручную в пункте 7.
9. По результатам расчета на ЭВМ построить эпюры углов поворота θ и прогибов ν сечений балки.
10. Проверить выполнение условия жесткости балки, приняв

$$[\nu] = \frac{1}{400} l, \text{ где } l - \text{ пролет балки.}$$

Таблица 1

Нагрузки и размеры	Варианты нагрузок и размеров														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
q (кН/м)	20	40	60	10	30	50	20	40	60	10	30	50	20	40	60
F (кН)	30	50	70	30	40	60	50	60	40	50	60	30	40	30	80
M (кН·м)	40	20	50	50	50	40	60	80	30	80	40	70	60	70	40
a (м)	0,8	1,0	1,2	0,8	1,0	1,2	0,8	1,0	1,2	0,8	1,0	1,2	0,8	1,0	1,2

3.2. Пример расчета балки на прочность и жесткость

Требуется из расчета на прочность определить размеры поперечного сечения балки (рис. 3.3) в двух вариантах: "а" (рис. 3.4) и "б" (рис. 3.5), а затем проверить балку, имеющую поперечное сечение "а", на жесткость.

Принять:

$$M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 20 \text{ кН/м};$$

$$F = 50 \text{ кН}; R = 200 \text{ МПа}; R_s = 120 \text{ МПа};$$

$$R_s = 240 \text{ МПа}; k = 1,2 \text{ (коэффициент запаса прочности).}$$

Расчетные схемы балок

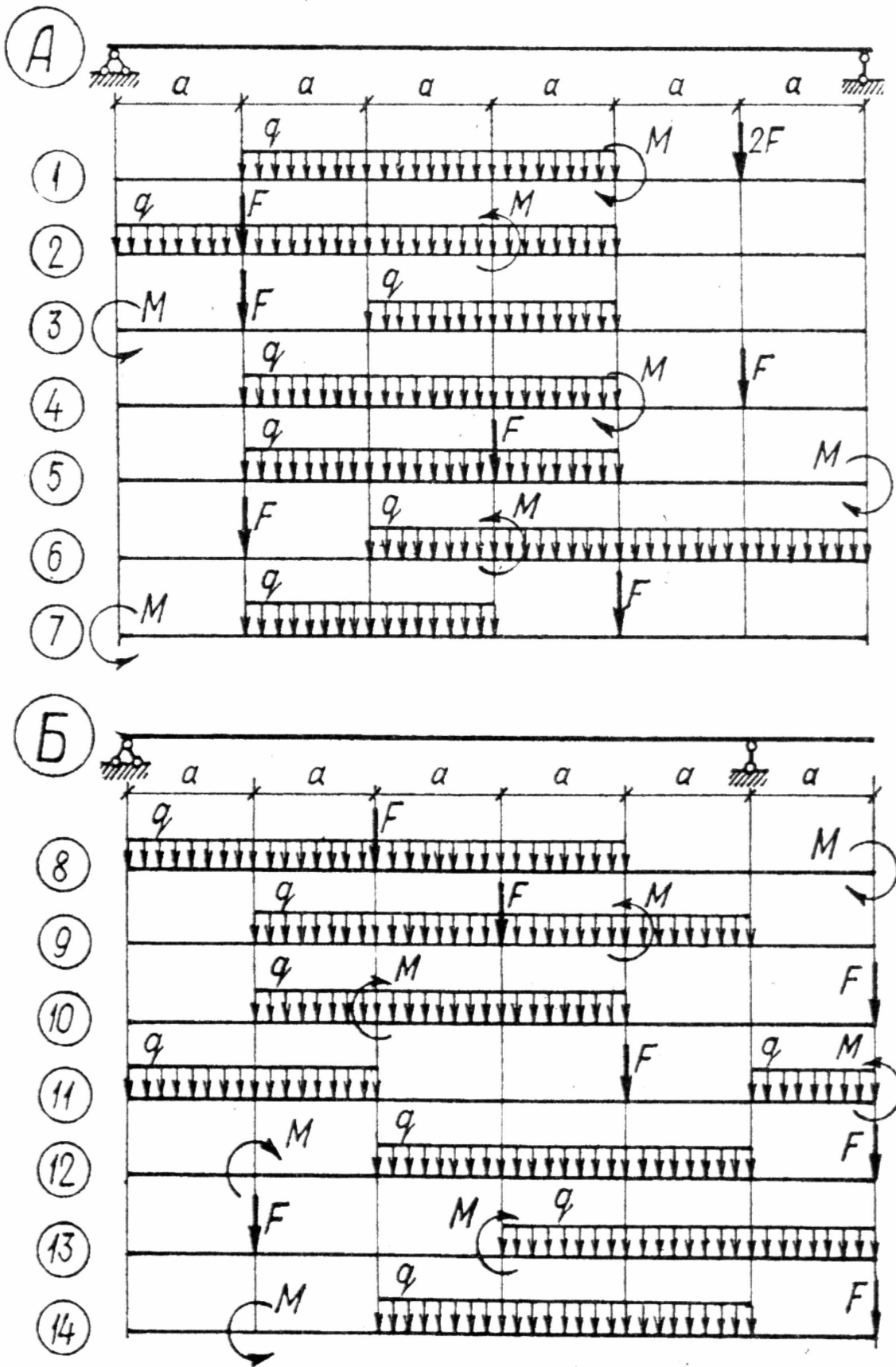
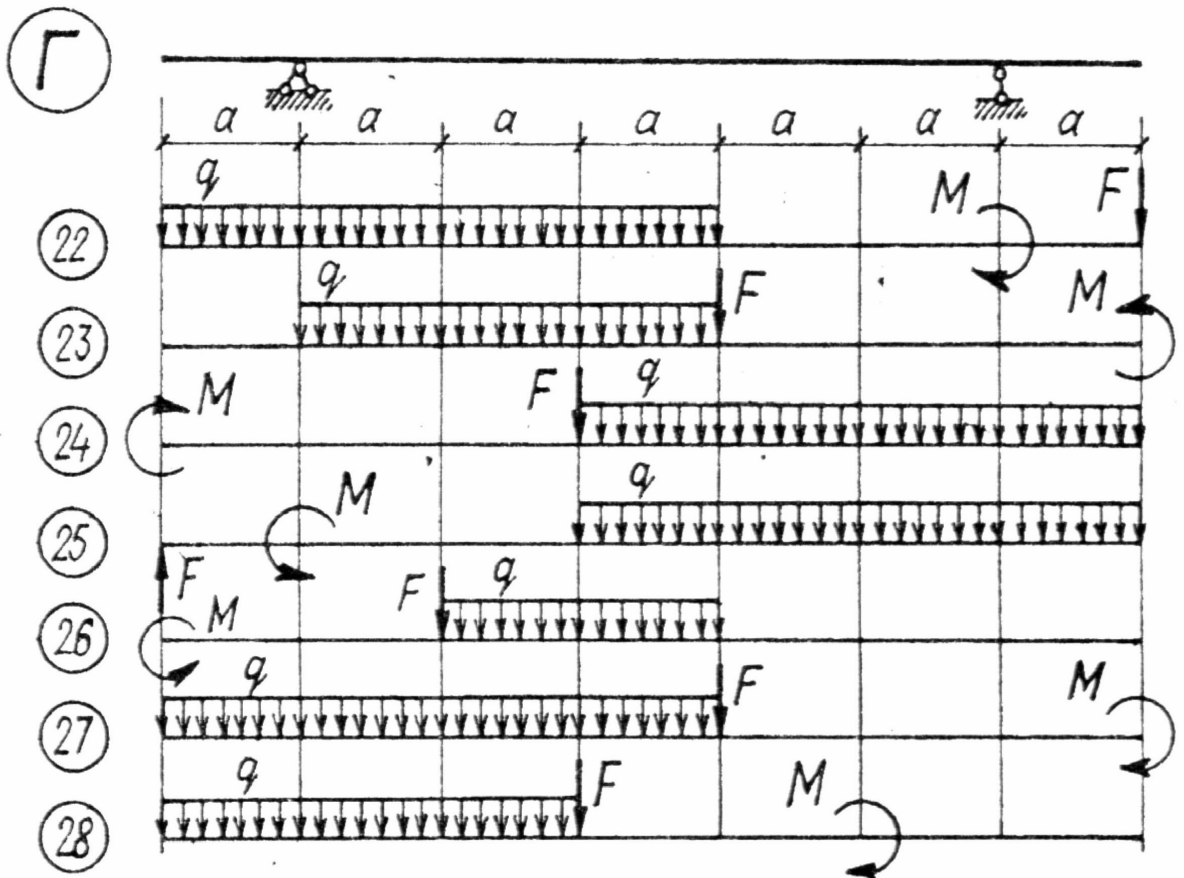
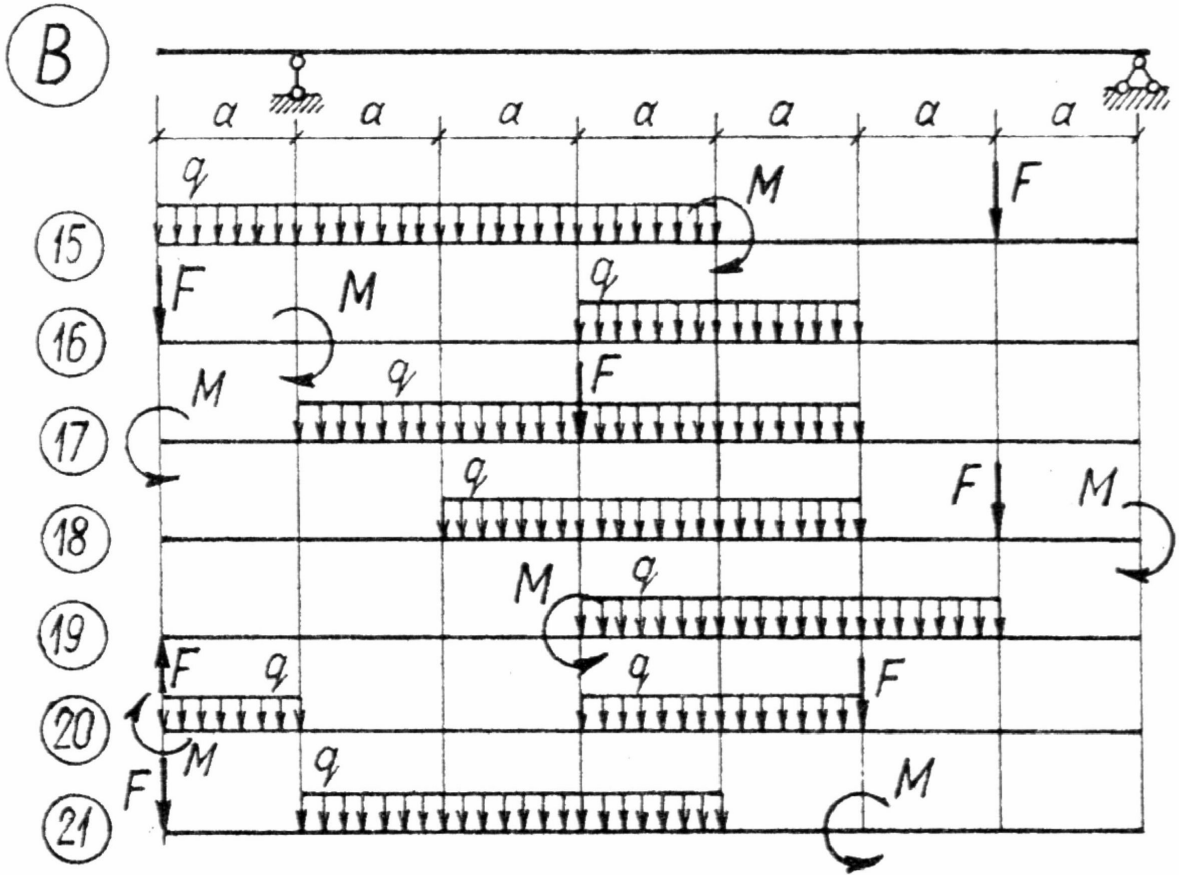


Рис. 3.2



Продолжение рис. 3.2

Расчет балки на прочность.

Определение реакций опор.

$$\sum X = 0; H_A = 0. \quad \sum m_A = 0; 4 \cdot M - q \cdot 6 \cdot 3 - M + R_B \cdot 8 - F \cdot 10 = 0;$$

$$80 - 20 \cdot 6 \cdot 3 - 20 + R_B \cdot 8 - 50 \cdot 10 = 0; \quad R_B = 100 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0; R_A - q \cdot 6 + R_B - F = 0; R_A - 20 \cdot 6 + 100 - 50 = 0; R_A = 70 \text{ кН.}$$

Проверка:

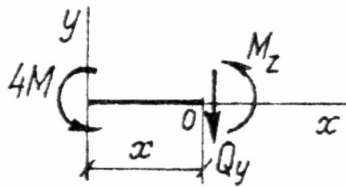
$$\sum m_B = 0; 80 - 70 \cdot 8 + 20 \cdot 6 \cdot 5 - 20 - 50 \cdot 2 = 0; \quad 0 = 0.$$

(Верно)

Построение эюр Q_y, M_z .

Балка имеет четыре грузовых участка.

1 грузовой участок: $0 \leq x \leq 2 \text{ м}$.

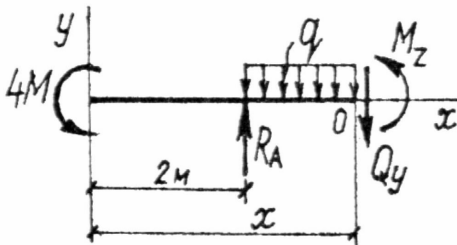


$$\sum Y = 0; \quad Q_y = 0.$$

$$\sum m_O = 0; \quad 4 \cdot M + M_z = 0;$$

$$M_z = -4 \cdot M = -80 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

2 грузовой участок: $2 \text{ м} \leq x \leq 8 \text{ м}$.



$$\sum Y = 0;$$

$$R_A - q \cdot (x - 2) - Q_y = 0;$$

$$Q_y = R_A - q \cdot (x - 2) = 70 - 20 \cdot (x - 2);$$

$$x = 2 \text{ м}, \quad Q_y = 70 \text{ кН};$$

$$x = 8 \text{ м}, \quad Q_y = -50 \text{ кН}$$

(т.к. Q_y на участке меняет знак, то M_z — имеет экстремум)

$$\sum m_O = 0; \quad 4 \cdot M - R_A \cdot (x - 2) + q \cdot \frac{(x - 2)^2}{2} + M_z = 0.$$

$$M_z = -4 \cdot M + R_A \cdot (x - 2) - q \cdot \frac{(x - 2)^2}{2} =$$

$$= -80 + 70 \cdot (x - 2) - \frac{20 \cdot (x - 2)^2}{2}.$$

Найдём положение экстремума.

$$dM_z / dx = 70 - 20 \cdot (x - 2) = 0, \quad x = 5,5 \text{ м.}$$

$$\begin{aligned}
 x = 2 \text{ м}, & \quad M_z = -80 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 x = 5,5 \text{ м}, & \quad M_z = 42,5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 x = 8 \text{ м}, & \quad M_z = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}.
 \end{aligned}$$

Для грузовых участков 3 и 4 вычисление M_z и Q_y выполняются аналогично, рассматривая правую отсеченную часть балки. Эпюры Q_y и M_z показаны на рис. 3.3.

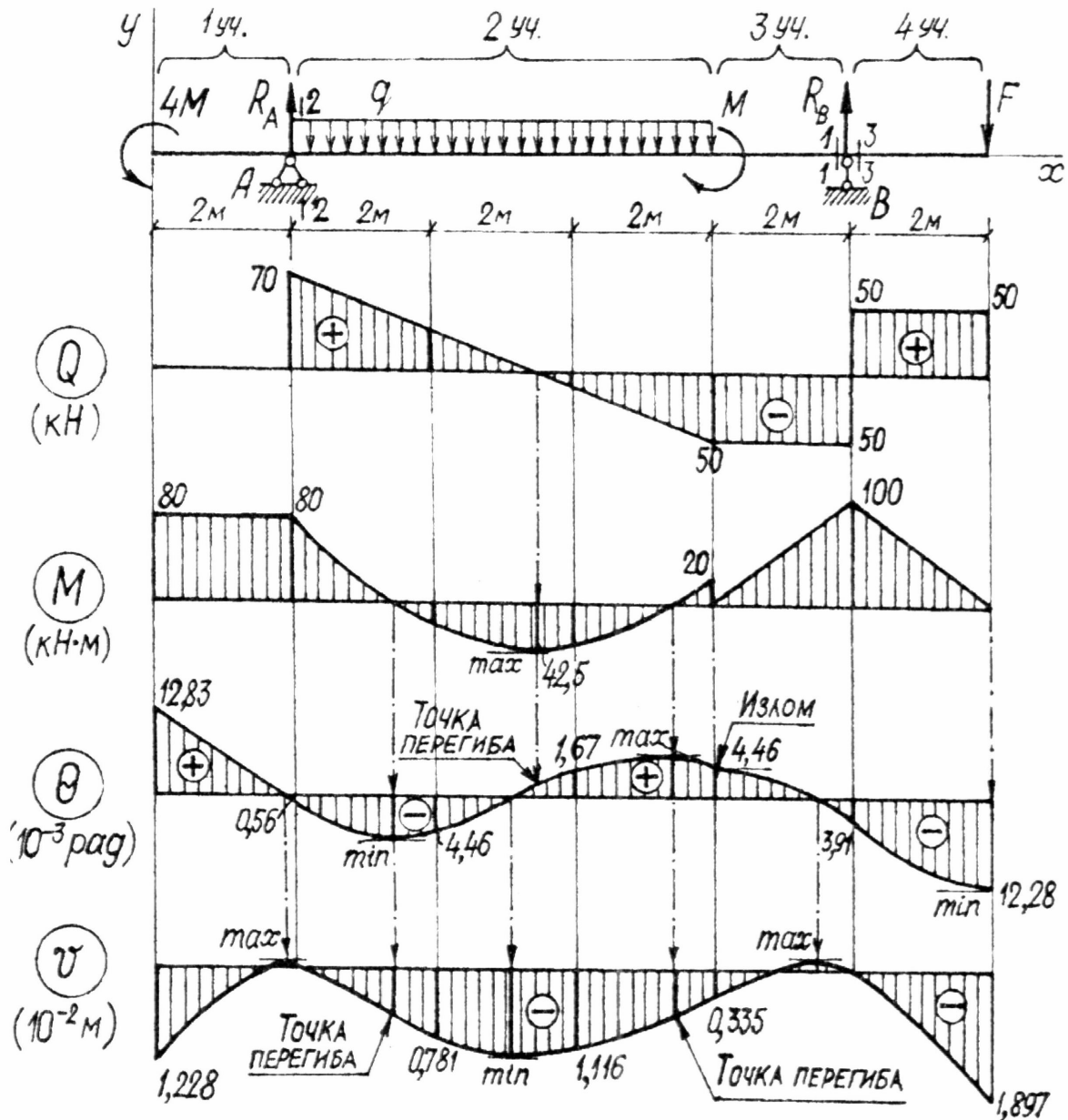


Рис. 3.3

Определение положения опасных сечений.

1-е опасное сечение: $|M_z|_{\max} = 100 \text{ кН}\cdot\text{м};$

2-е опасное сечение: $|Q_y|_{\max} = 70 \text{ кН};$

3-е опасное сечение: $M_z = -100 \text{ кН}\cdot\text{м}; Q_y = 50 \text{ кН}.$

Определение размеров поперечных сечений балки.

Из условия прочности по нормальным напряжениям в опасных точках D (рис. 3.4, 3.5) 1-го опасного сечения определим требуемый момент сопротивления:

$$W_z = \frac{|M_z|_{\max}}{R} = \frac{100}{200 \cdot 10^3} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 500 \text{ см}^3, \quad W_z = 500 \text{ см}^3.$$

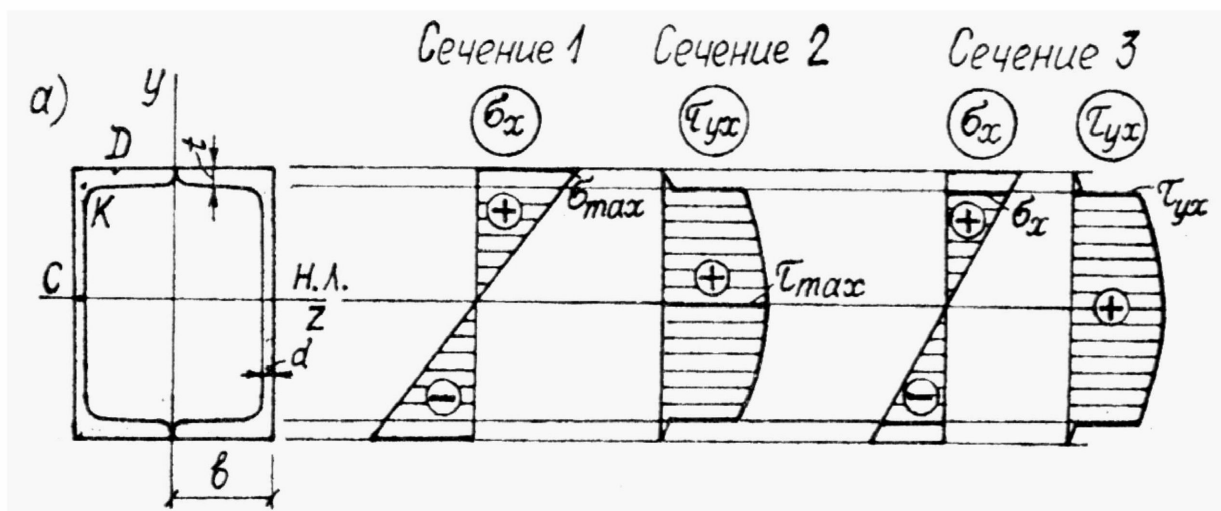


Рис. 3.4

Поперечное сечение варианта "а" (рис. 3.1), состоит из двух швеллеров. Для одного швеллера $W_z = \frac{500}{2} = 250 \text{ см}^3.$

По ГОСТ 8240-89 находим: [N 24, $W_z = 242 \text{ см}^3$;
2 [N 24, $W_z = 484 \text{ см}^3$.

Проверяем прочность принятого сечения по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{242 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 206,6 \text{ МПа} > R = 200 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение

$$\frac{\sigma_{\max} - R}{R} \cdot 100 \% = \frac{206,6 - 200}{200} \cdot 100 \% = 3,3\% < 5 \%,$$

что допустимо.

Проверка прочности по касательным напряжениям в опасной точке С (рис. 3.4) 2-го опасного сечения (чистый сдвиг):

$$\tau_{yx, \max} = \frac{|Q_y|_{\max}}{I_z} \cdot \left| \frac{S_z}{b} \right|_{\max} \leq R_s,$$

$$\tau_{yx, \max} = \frac{70 \cdot 10^{-3} \cdot 139 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2900 \cdot 2 \cdot 10^{-8} \cdot 0,56 \cdot 10^{-2}} = 30 \text{ МПа} < 120 \text{ МПа}.$$

Значение S_z для точки С, расположенной на нейтральной оси, берем из того же ГОСТа 8240-89.

Проверка прочности в опасной точке К (рис. 3.4) 3-го опасного сечения, где имеет место плоское напряжённое состояние:

$$\sigma_x = -\frac{M_z \cdot y}{I_z} = \frac{-100 \cdot 10^{-3} \cdot 11 \cdot 10^{-2}}{2900 \cdot 2 \cdot 10^{-8}} = 189,7 \text{ МПа};$$

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y \cdot |S_z|}{I_z \cdot b} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot |9 \cdot 11,5 \cdot 2 \cdot 10^{-6}|}{2900 \cdot 2 \cdot 10^{-8} \cdot 0,56 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 15,9 \text{ МПа}.$$

По гипотезе прочности наибольших касательных напряжений имеем: $\sigma_1 - \sigma_3 \leq R$. Для балки при прямом поперечном изгибе

получим:
$$\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2} \leq R;$$

$$\sqrt{(189,7)^2 + 4 \cdot (15,9)^2} = 192,4 \text{ МПа} < 200 \text{ МПа}.$$

По энергетической гипотезе прочности имеем:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{yx}^2} \leq R;$$

$$\sqrt{(189,7)^2 + 3 \cdot (15,9)^2} = 191,7 \text{ МПа} < 200 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность материала балки во всех точках обеспечена.

Рассмотрим расчет сварной балки – вариант "б" (рис. 3.1) с поперечным сечением, показанным на рис. 3.5.

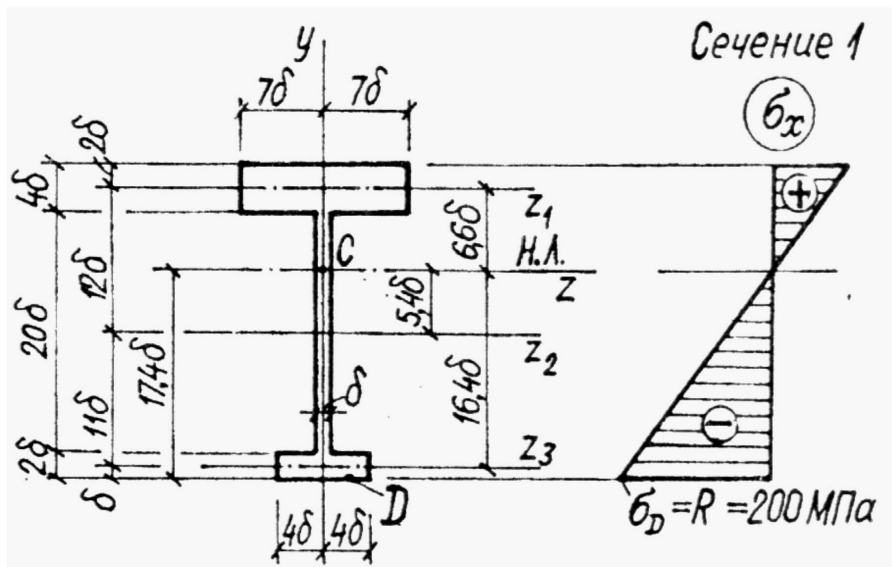


Рис. 3.5

Определим положение центра тяжести сечения:

$$y_c = \frac{\sum S_{z_2}}{\sum A} = \frac{14\delta \cdot 4\delta \cdot 12\delta + 8\delta \cdot 2\delta \cdot (-11\delta)}{14\delta \cdot 4\delta + \delta \cdot 20\delta + 8\delta \cdot 2\delta} = 5,39\delta.$$

Вычислим момент инерции:

$$I_z = \frac{14\delta(4\delta)^3}{12} + 14\delta \cdot 4\delta(6,6\delta)^2 + \frac{\delta(20\delta)^3}{12} + \delta \cdot 20\delta(5,4\delta)^2 + \frac{8\delta(2\delta)^3}{12} + 8\delta \cdot 2\delta(16,4\delta)^2 = 8072,6\delta^4.$$

$$\text{Момент сопротивления } W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}} = \frac{8072,6\delta^4}{17,4\delta} = 464,2\delta^3.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям в опасной точке D (рис. 3.5) 1-го опасного сечения получим:

$$464,2\delta^3 = 500 \text{ (см. с. 26)}. \text{ Отсюда } \delta = 1,0253 \text{ см.}$$

В соответствии с найденной величиной δ принимаем размеры поперечного сечения с округлением до 1 мм (рис. 3.6). Пересчитав характеристики сечения, получим: $I_z = 9017,6 \text{ см}^4$. $W_z = 503,8 \text{ см}^3$. Напряжение $\sigma_{\max} = 198,5 \text{ МПа} < R. = 200 \text{ МПа}$.

Проверка прочности по касательным напряжениям в опасной точке С (рис. 3.6) 2-го опасного сечения:

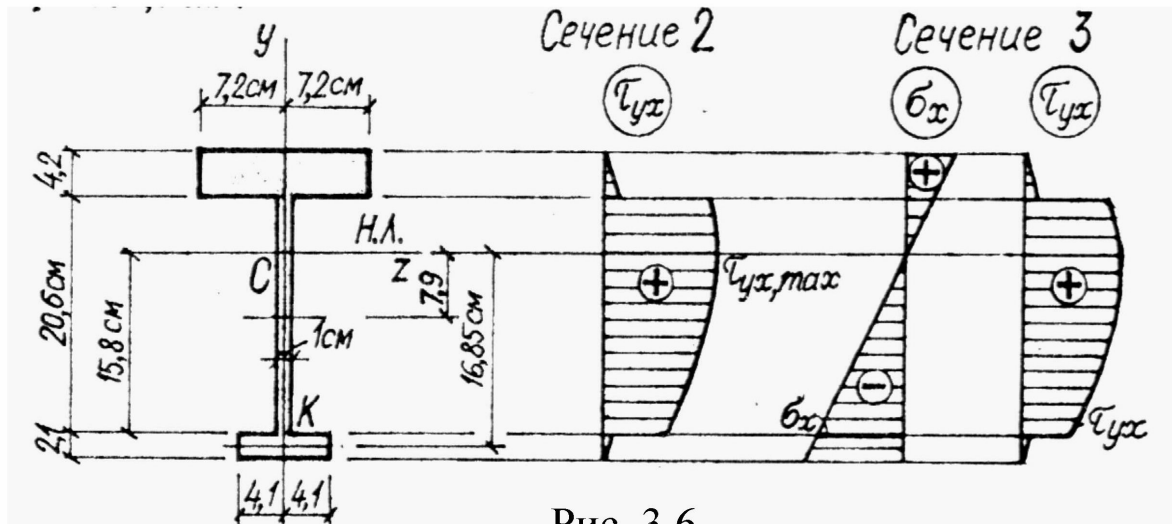


Рис. 3.6

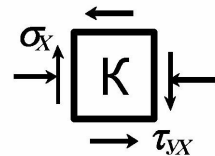
$$|\tau_{yx}|_{\max} = \frac{Q_y|_{\max}}{I_z} \left| \frac{S_z}{b} \right|_{\max} \leq R_s.$$

$$|S_z| = |8,2 \cdot 2,1 \cdot (-16,85) + 15,8 \cdot 1 \cdot (-7,9)| = 415 \text{ см}^3; \quad b = 1,0 \text{ см}.$$

$$\tau_{yx, \max} = \frac{70 \cdot 10^{-3} \cdot 415 \cdot 10^{-6}}{9017,6 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 32,2 \text{ МПа} < 120 \text{ МПа}, \text{ т.е.}$$

условие прочности в точке С выполнено.

Проверка прочности в опасной точке К (рис. 3.6) 3-го опасного сечения, где имеет место плоское напряженное состояние:



$$\sigma_x = -\frac{M_z \cdot y}{I_z} = -\frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot (-15,8 \cdot 10^{-2})}{9017,6 \cdot 10^{-8}} = -175,2 \text{ МПа},$$

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y \cdot |S_z|}{I_z \cdot b} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot |8,2 \cdot 2,1 \cdot (-16,85) \cdot 10^{-6}|}{9017,6 \cdot 10^{-8} \cdot 1,1 \cdot 10^{-2}} = 16,1 \text{ МПа}.$$

По гипотезе прочности наибольших касательных напряжений

$$\text{имеем:} \quad \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2} \leq R;$$

$$\sqrt{(175,2)^2 + 4 \cdot (16,1)^2} = 178,1 \text{ МПа} < 200 \text{ МПа}.$$

По энергетической теории прочности получим:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{yx}^2} \leq R;$$

$$\sqrt{(175,2)^2 + 3 \cdot (16,1)^2} = 177,4 \text{ МПа} < 200 \text{ МПа}.$$

Условие прочности в точке К выполнено.

Расчет по предельной несущей способности (поперечное сечение приведено на рис. 3.7).

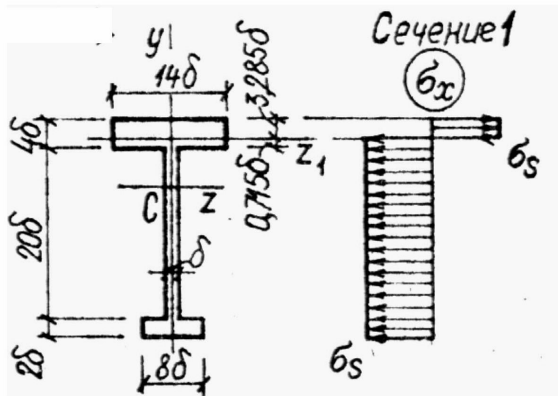


Рис. 3.7

Дано: $\sigma_s = 240 \text{ МПа}$; $k=1,2$.

Определить размер δ .

Площадь поперечного сечения равна

$$A = 14\delta \cdot 4\delta + \delta \cdot 20\delta + 8\delta \cdot 2\delta = 92\delta^2.$$

Нейтральная ось Z_1 не проходит через центр тяжести сечения и делит площадь поперечного сечения A на две

равновеликие площади:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} = \frac{92\delta^2}{2} = 46\delta^2.$$

Предельный момент в пластическом шарнире имеет выражение:

$$M_{np} = \sigma_s \cdot W_s.$$

Пластический момент сопротивления

$$W_s = S_1 + S_2 = 14\delta \cdot 3,285\delta \cdot \frac{3,285\delta}{2} + 14\delta \cdot 0,715\delta \cdot \frac{0,715\delta}{2} + \delta \cdot 20\delta \cdot 10,715\delta + 8\delta \cdot 2\delta \cdot 21,715\delta = 640,86\delta^3; W_s = 640,86\delta^3.$$

Из условия прочности

$$|M_z|_{\max} \cdot k = \sigma_s \cdot W_s; 100 \cdot 1,2 = 240 \cdot 10^3 \cdot 640,86\delta^3;$$

$$\delta^3 = 0,780 \text{ см}^3; \delta = 0,920 \text{ см}.$$

Сопоставив результаты расчетов методами расчетного сопротивления ($\delta = 1,025 \text{ см}$) и предельной несущей способности ($\delta = 0,920 \text{ см}$), видим, что более экономичное сечение получается при расчете методом предельного равновесия.

Расчет балки на жесткость методом начальных параметров

Рассчитывается балка (рис. 3.3), выполненная из двух швеллеров №24 по ГОСТ 8240-89. Жесткость сечения балки при изгибе

$$EI_z = 2,06 \cdot 10^8 \cdot 2900 \cdot 2 \cdot 10^{-8} = 11948 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

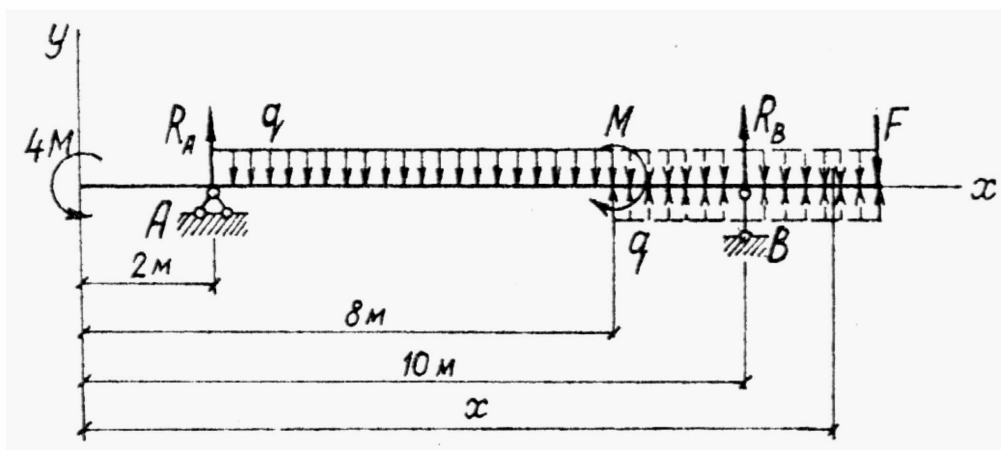


Рис. 3.8

Уравнения метода начальных параметров (2.4) и (2.5) для заданной балки (рис. 3.8) имеют вид:

$$EI_z v = EI_z v_0 + \frac{EI_z \theta_0 x}{1!} + \frac{M_0 x^2}{2!} + \frac{Q_0 x^3}{3!} + \frac{M(x-8)^2}{2!} + \frac{R_A(x-2)^3}{3!} + \frac{R_B(x-10)^3}{3!} - \frac{q(x-2)^4}{4!} + \frac{q(x-8)^4}{4!};$$

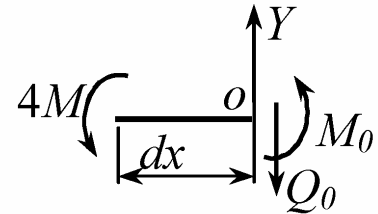
$$EI_z \theta = EI_z \theta_0 + \frac{M_0 x}{1!} + \frac{Q_0 x^2}{2!} + \frac{M(x-8)}{1!} + \frac{R_A(x-2)^2}{2!} +$$

$$+ \frac{R_B(x-10)^2}{2!} - \frac{q(x-2)^3}{3!} + \frac{q(x-8)^3}{3!}.$$

Определение начальных параметров.

Из условия равновесия элемента на левом конце балки находим:

$$M_0 = -4 \cdot M; \quad Q_0 = 0.$$



Кинематические граничные условия имеют вид:

$$1) x = 2 \text{ м}, \nu = 0; \quad 2) x = 10 \text{ м}, \nu = 0.$$

Используя первое условие, получим

$$EI_z \nu_0 + EI_z \theta_0 \cdot 2 - \frac{4M \cdot 2^2}{2} = 0.$$

Используя второе условие, будем иметь:

$$EI_z \nu_0 + EI_z \theta_0 \cdot 10 - \frac{4M \cdot 10^2}{2} + \frac{R_A(10-2)^3}{6} - \frac{q(10-2)^4}{24} +$$

$$+ \frac{M(10-8)^2}{2} + \frac{q(10-8)^4}{24} = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$EI_z \nu_0 = -146,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^3, \quad \nu_0 = -0,01228 \text{ м};$$

$$EI_z \theta_0 = 153,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad \theta_0 = 0,01283 \text{ рад}.$$

Определим прогиб сечения на расстоянии $x = 3a = 6 \text{ м}$

$$\nu(6) = \frac{1}{EI_z} \left(EI_z \nu_0 + EI_z \theta_0 \cdot 6 - \frac{4M \cdot 6^2}{2!} + \frac{R_A(6-2)^3}{3!} - \frac{q(6-2)^4}{4!} \right) =$$

$$= \frac{1}{11948} \cdot \left(-146,7 + 153,3 \cdot 6 - \frac{80 \cdot 6^2}{2!} + \frac{70(6-2)^3}{6} - \frac{20(6-2)^4}{24} \right) =$$

$$= -0,011 \text{ м},$$

и угол поворота сечения на расстоянии $x = 6a = 12 \text{ м}$ от начала координат

$$\theta(12) = \frac{1}{EI_z} \left(EI_z \theta_0 - \frac{4M \cdot 12}{1!} + \frac{R_A(12-2)^2}{2!} - \frac{q(12-2)^3}{3!} + \frac{M(12-6)}{1!} + \frac{q(12-8)^3}{3!} + \frac{R_B(12-10)^2}{2!} \right) = \frac{1}{11948} \cdot \left(1533 - \frac{80 \cdot 12}{1} + \frac{70 \cdot 10^2}{2} - \frac{20 \cdot 10^3}{6} + \frac{20 \cdot 4}{1} + \frac{20 \cdot 4^3}{6} + \frac{100 \cdot 2^3}{2} \right) = -0,01228 \text{ рад.}$$

Аналогично можно найти прогибы и углы поворота других сечений и по полученным данным построить эпюры ν и θ . Дальнейшие расчеты выполняются с применением ЭВМ.

Исходные данные для расчета на ЭВМ по программе "IZGIB"

SH	312	– номер группы и варианта нагрузки;
L	12	– длина балки (м);
EI_z	11948	– жесткость сечения балки ($кН \cdot м^2$);
N	6	– число равных отрезков, на которые разбита балка;
NO	2	– число опор;
ПО	0	– условие закрепления балки в начале координат: 0 – свободный конец, 1 – шарнирная опора, 2 – защемление;
ПН	0	– условие закрепления балки на конце, противоположном началу координат;
L(i), D(i)	2, 0 10, 0	– первая цифра – расстояние от начала координат до опоры, вторая – податливость опоры;
F_x	0	– продольная сила;
NM	2	– количество сосредоточенных моментов;
NF	1	– количество сосредоточенных сил, не считая реакций опор;
NQ	2	– количество равномерно распределенных нагрузок, учитывая разгружающие нагрузки;
AM, M	0, -80 8, +20	– расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенного момента, знак и величина момента. $M > 0$, если растягивает нижние волокна;

AF, F 12, -50 – расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенной силы, знак и величина сосредоточенной силы. $F > 0$, если создает момент, растягивающий нижние волокна;

AQ, Q 2, -20 – расстояние от начала координат до распределенной нагрузки, знак и величина распределенной нагрузки; интенсивность $q > 0$, если создает момент, растягивающий нижние волокна.

OM 1 – расчет на прямой поперечный изгиб.

ШИФР 312

Результаты расчета по программе "IZGIB"

Начальные параметры

$$v_0 = -.01228 \text{ м}, \quad \theta_0 = .01283 \text{ рад};$$

$$M_0 = -80.00 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad Q_0 = .00 \text{ кН}.$$

Реакции опор (кН)

$$R(1) = 70.00$$

$$R(2) = 100.00$$

Таблица 2

№ сечений	Координаты сечений x (м)	Прогибы v (м)	Углы поворота сечений θ (рад)	Изгибающие моменты M (кН · м)	Поперечные силы Q (кН)
0	0.000	-.01228	.01283	-80.00	.00
1	2.000	.00000	-.00056	-80.00	.00
2	2.000	.00000	-.00056	-80.00	70.00
3	4.000	-.00781	-.00446	20.00	30.00
4	6.000	-.01116	.00167	40.00	-10.00
5	8.000	-.00335	.00446	-20.00	-50.00
6	8.000	-.00335	.00446	.00	-50.00
7	10.000	.00000	-.00391	-100.00	-50.00
8	10.000	.00000	-.00391	-100.00	50.00
9	12.000	-.01897	-.01228	.00	50.00

По результатам расчета на ЭВМ, приведенным в табл. 2, построены эпюры прогибов v и углов поворота θ (рис. 3.3).

Проверим выполнение условия жесткости $|v|_{\max} \leq [v]$, где допускаемый прогиб $[v] = (1/400)l = 8/400 = 0,020$ м.

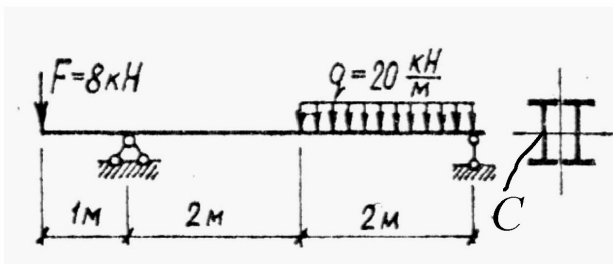
Максимальный по модулю прогиб определяем по эпюре прогибов (рис. 3.3):

$$|v|_{\max} = 0,01897 \text{ м.}$$

Условие жесткости $0,01897 \text{ м} < 0,020 \text{ м}$ выполняется.

3.3. Некоторые образцы задач для самостоятельного решения при защите расчетно-проектировочного задания [6]

1.

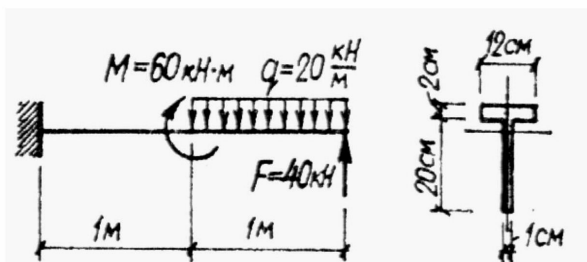


Требуется:

построить эпюры Q, M ;
подобрать поперечное сечение балки из двух двутавров по ГОСТ 8239 – 89;
проверить прочность в точке С.
Принять

$$R = 200 \text{ МПа}, R_s = 120 \text{ МПа.}$$

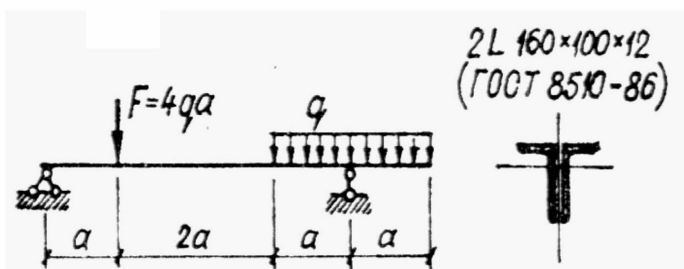
2.



Требуется:

построить эпюры Q, M ;
определить наибольшие напряжения σ_x и τ_{yx} .

3.



Требуется:

построить эпюры Q, M ;
определить допускаемую величину нагрузки q .

Принять

$$a = 1 \text{ м}, R = 200 \text{ МПа.}$$

3.4. Контрольные вопросы

1. Какие моменты инерции поперечного сечения используются при расчете балки на прочность и жесткость и как они определяются?
2. В чем заключается метод сечений?
3. Что называется грузовым участком?
4. Чему равны изгибающий момент и поперечная сила в сечении балки и их знаки?
5. Каковы особенности эпюр Q и M ?
6. Определить опасные сечения балки.
7. Как расположена нейтральная ось при прямом поперечном изгибе в упругой стадии?
8. По каким формулам определяются напряжения в точках поперечного сечения балки при прямом изгибе?
9. Проверить прочность сечения по главным и касательным напряжениям.
10. Как определить положение нейтральной оси при расчете балки по методу предельной несущей способности?
11. Дать определение пластическому моменту сопротивления.
12. Определить величину предельного изгибающего момента.
13. Объясните условие прочности балки, отвечающее предельной несущей способности.
14. Какие дифференциальные зависимости при изгибе вы знаете?
15. Напишите уравнения метода начальных параметров.
16. Из каких условий определяются начальные параметры?

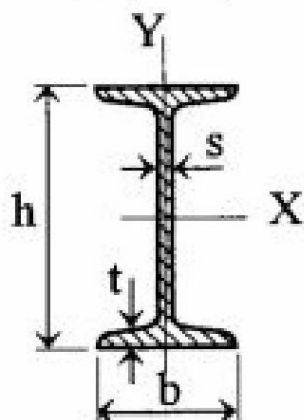
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гастев В.А. Краткий курс сопротивления материалов: Учеб. / В.А. Гастев. – М., 1977. – 452 с.
2. Панарин Н.Я. Сопротивление материалов: Учеб. / Н.Я. Панарин, И.И. Тарасенко. – М., Л., 1962. – 528 с.
3. Крамаренко А.А. Построение эпюр внутренних усилий: Метод. указания по сопротивлению материалов / А.А. Крамаренко. – Новосибирск: НГАС, 1992. – 48 с.
4. Себешев В.Г. Применение ЭВМ в расчетах брусьев при прямом поперечном и продольно-поперечном изгибе / В.Г. Себешев. – Новосибирск, 1981. – 89 с.
5. Смирнов А.Ф. Сопротивление материалов: Учеб. / А.Ф. Смирнов. – М., 1975. – 480 с.
6. Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. В.К. Качурина. – М., Л., 1972. – 429 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СОРТАМЕНТ СТАЛЬНОГО ПРОКАТА
(Для учебных целей)

Двутавры стальные горячекатаные по ГОСТ 8239-89

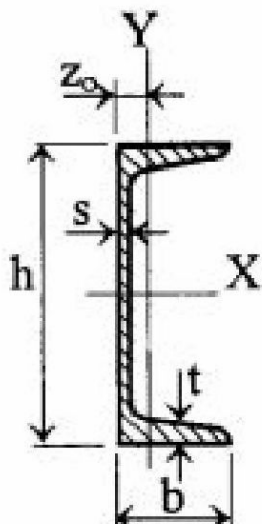


h – высота двутавра; b – ширина полки;
 s – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки
 A – площадь поперечного сечения;
 I – момент инерции
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент полусечения;
 i – радиус инерции

Таблица П.1

Но- мер дву- тав- ра	Масса I м, кг	Размеры, мм				A , см ²	I_x , см ⁴	W_{x_0} , см ³	i_x , см	S_{x_0} , см ³	I_y , см ⁴	W_{y_0} , см ³	i_y , см
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57,0	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108,0	600	190	12	17	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Швеллеры стальные горячекатаные по ГОСТ 8240-89

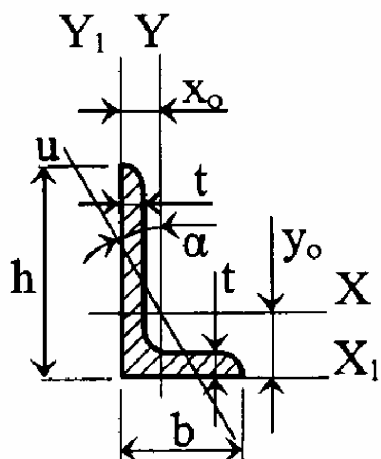


h – высота швеллера; b – ширина полки;
 s – толщина стенки; t – средняя толщина полки;
 A – площадь поперечного сечения;
 S – статический момент полусечения;
 I – момент инерции;
 i – радиус инерции; W – момент сопротивления;
 z_0 – расстояние от оси Y до наружной грани стенки

Таблица П.2

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A , см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	z_0 , см
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,64	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11,0	1,7	1,67
16	14,2	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,0
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Уголки стальные горячекатаные неравнополочные (по ГОСТ 8510-86)



B – ширина большей полки;
 b – ширина меньшей полки;
 t – толщина полки; u – ось \min ;
 A – площадь поперечного сечения;
 I – момент инерции; i – радиус инерции;
 α – угол наклона главной центральной оси;
 I_{xy} – центробежный момент инерции;
 x_0, y_0 – расстояния от центра тяжести до наружных граней полок

Таблица П.3

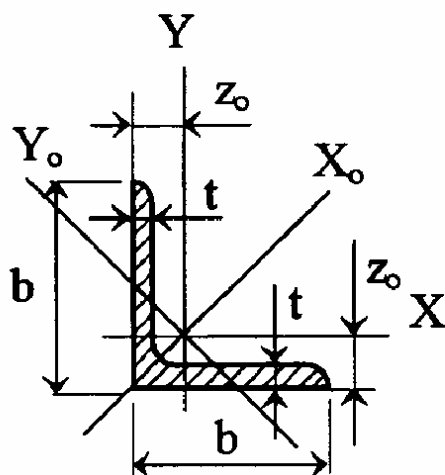
Номер уголка	Масса 1 м , кг	Размеры, мм			A , см^2	I_{x_0} , см^4	i_{x_0} , см	I_{y_0} , см^4	i_{y_0} , см	I_{u_0} , (\min) см^4	i_{u_0} , (\min) см	$\text{tg}\alpha$	I_{xy_0} , см^4	x_{0_0} , см	y_{0_0} , см
		B	b	t											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2,5/ 1,6	0,9	25	16	3	1,16	0,7	0,78	0,2	0,44	0,13	0,34	0,392	0,22	0,42	0,86
3/2*	1,1	30	20	3	1,43	1,3	0,94	0,4	0,56	0,26	0,43	0,427	0,43	0,51	1,00
	1,5			4	1,86	1,6	0,93	0,6	0,55	0,34	0,43	0,421	0,54	0,54	1,04
3,2/2	1,2	32	20	3	1,49	1,5	1,01	0,5	0,55	0,28	0,43	0,382	0,47	0,49	1,08
	1,5			4	1,94	1,9	1,00	0,6	0,54	0,35	0,43	0,374	0,59	0,53	1,12
4/2,5	1,5	40	25	3	1,89	3,1	1,27	0,9	0,70	0,56	0,54	0,385	0,96	0,59	1,32
	1,9			4	2,47	3,9	1,26	1,2	0,69	0,71	0,54	0,381	1,22	0,63	1,37
	2,4			5	3,03	4,7	1,25	1,4	0,68	0,86	0,53	0,374	1,44	0,66	1,41
4/3	2,1	40	30	4	2,67	4,2	1,25	2,0	0,87	1,09	0,64	0,544	1,68	0,78	1,28
	2,6			5	3,28	5,0	1,24	2,4	0,86	1,33	9,64	0,539	2,00	0,82	1,32
4,5/ 2,8	1,7	45	28	3	2,14	4,4	1,43	1,3	0,79	0,79	0,61	0,382	1,38	0,64	1,47
	2,2			4	2,80	5,7	1,42	1,7	0,78	1,02	0,60	0,379	1,77	0,68	1,51
5/3,2	1,9	50	32	3	2,42	6,2	1,60	2,0	0,91	1,18	0,70	0,403	2,01	0,72	1,60
	2,5			4	3,17	8,0	1,59	2,6	0,90	1,52	0,69	0,401	2,59	0,76	1,65
5,6/ 3,6	2,8	56	36	4	3,58	11,4	1,78	3,7	1,02	2,19	0,78	0,406	3,74	0,84	1,82
	3,5			5	4,41	13,8	1,77	4,5	1,01	2,65	0,78	0,404	4,50	0,88	1,87

Примечание. Уголки, отмеченные звездочкой (*) изготавливают по требованию потребителя

Продолжение табл. П.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
6,5/5*	4,4	65	50	5	5,56	23,4	2,05	12,1	1,47	6,41	1,07	0,576	9,77	1,26	2,00
	5,2			6	6,60	27,5	2,04	14,1	1,46	7,52	1,07	0,575	11,5	1,30	2,04
	6,0			7	7,62	31,3	2,03	16,1	1,45	8,60	1,06	0,571	12,9	1,34	2,08
	6,8			8	8,62	35,0	2,02	18,9	1,44	9,65	1,06	0,570	13,6	1,37	2,12
7/4,5	4,4	70	45	5	5,59	27,8	2,23	9,1	1,27	5,34	0,98	0,406	9,1	1,05	2,28
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	12,00	1,17	2,39
	5,7			6	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	0,435	14,1	1,21	2,44
	6,6			7*	8,37	46,8	2,36	16,6	1,41	9,69	1,08	0,435	16,2	1,25	2,48
	7,4			8*	9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	10,9	1,07	0,430	17,8	1,29	2,52
8/5	5,0	80	50	5	6,3	41,6	2,56	12,7	1,41	7,57	1,09	0,387	13,2	1,13	2,60
	5,9			6	7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	8,88	1,08	0,386	15,5	1,17	2,65
8/6*	6,4	80	60	6	8,15	52,1	2,53	25,2	1,76	13,6	1,29	0,547	21,0	1,49	2,47
	7,4			7	9,42	59,6	2,52	28,7	1,75	15,6	1,29	0,546	24,0	1,53	2,52
	8,4			8	10,7	66,9	2,50	32,2	1,74	17,5	1,28	0,544	26,8	1,57	2,56
9/5,6	6,2	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	0,384	20,5	1,2	2,92
	6,7			6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	22,5	1,28	2,95
10/ 6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,3	3,2	30,6	1,78	18,2	1,38	0,393	31,5	1,42	3,23
	8,7			7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	36,1	1,46	3,28
	9,87			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	40,5	1,50	3,32
	12,1			10	15,5	153	3,15	47,2	1,75	28,3	1,35	0,387	48,6	1,58	3,40
10/ 6,5*	8,81	100	65	7	11,2	114	3,19	38,3	1,85	22,8	1,41	0,415	38,0	1,52	3,24
	9,99			8	12,7	138	3,18	43,0	1,84	25,2	1,41	0,414	42,6	1,56	3,28
	12,3			10	15,7	155	3,15	51,7	1,82	30,6	1,40	0,410	51,2	1,64	3,37
11/7	9,0	110	70	6,5	11,4	142	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	0,402	46,8	1,58	3,55
	10,9			8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,400	55,9	1,64	3,61
12,5/ 8	11,0	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	74,7	1,8	4,01
	12,6			8	16,0	256	4,00	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	84,1	1,84	4,05
	15,5			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	102,0	1,92	4,14
	18,3			12	23,4	365	3,95	116	2,24	68,5	1,72	0,400	118,0	2,00	4,22
14/9	14,1	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	121,0	2,03	4,49
	17,5			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	147,0	2,12	4,58
16/10	18,0	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110,0	2,20	0,391	194,0	2,24	5,19
	19,8			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121,0	2,19	0,390	213,0	2,28	5,23
	23,6			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142,0	2,18	0,388	249,0	2,36	5,32
	27,3			14	34,7	897	5,08	271	2,80	162,0	2,16	0,385	282,0	2,43	5,40
20/ 12,5	27,4	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264,0	2,75	0,392	465,0	2,79	6,50
	29,7			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285,0	2,74	0,392	503,0	2,83	6,54
	34,4			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327,0	2,73	0,390	573,0	2,91	6,62
	39,1			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367,0	2,72	0,388	643,0	2,99	6,71

Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509-86)



b – ширина полки; t – толщина полки;
 A – площадь поперечного сечения;
 I – момент инерции;
 I_{xy} – центробежный момент инерции;
 i – радиус инерции;
 z_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки.

Таблица П.4

Но- мер угол- ка	Масса l м, кг	Размеры, мм		A , cm^2	I_x , cm^4	i_x , см	I_{x0} , (max) cm^4	i_{x0} , (max) см	I_{y0} , (min) cm^4	i_{y0} , (min) см	I_{xy} , cm^4	z_0 , см
		b	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	0,89	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,60
	1,15		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64
2,5	1,12	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	0,47	0,73
	1,46		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	0,59	0,76
	1,78		5*	2,27	1,22	0,73	1,91	0,92	0,53	0,48	0,69	0,80
2,8	1,27	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	0,68	0,80
3	1,36	30	3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59	0,85	0,85
	1,78		4	2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89
	2,18		5*	2,78	2,20	0,89	3,97	1,12	0,94	0,58	1,27	0,93
3,2	1,46	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	1,03	0,89
	1,91		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	1,32	0,94
3,5	1,60	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69	1,37	0,97
	2,10		4	2,17	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68	1,75	1,01
	2,58		5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68	2,10	1,05
4	1,85	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09
	2,42		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	2,68	1,13
	2,98		5	3,79	5,53	1,21	8,57	1,52	2,30	0,78	3,22	1,17
	3,52		6*	4,48	6,41	1,2	10,13	1,50	2,70	0,78	3,72	1,21

Примечание. Уголки, отмеченные звездочкой (*) изготавливают по требованию потребителя

Продолжение табл. П.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	2,32	50	3	2,96	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	4,16	1,33
	3,05		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,8	11,20	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
	4,47		6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46
	5,15		7*	6,56	14,84	1,50	23,47	1,89	6,21	0,97	8,63	1,50
	5,82		8*	7,41	16,51	1,49	26,03	1,87	6,98	0,97	9,52	1,53
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,1	9,41	1,57
6*	3,71	60	4	4,72	16,21	1,85	25,69	2,33	6,72	1,19	9,48	1,62
	4,68		5	5,33	19,79	1,84	31,40	2,32	8,18	1,18	11,61	1,66
	5,43		6	6,92	23,21	1,83	36,81	2,31	9,60	1,18	13,60	1,70
	7,10		8	9,04	29,55	1,81	46,77	2,27	12,34	1,17	17,22	1,78
	8,70		10	11,09	35,32	1,79	55,64	2,24	15,00	1,16	20,32	1,85
6,3	3,90	63	4	4,96	18,9	1,95	20,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
6,5	5,91	65	6	7,52	29,85	1,99	47,38	2,51	12,32	1,28	17,53	1,83
	7,73		8	9,84	38,13	1,97	60,42	2,48	15,85	2,48	22,29	1,90
7	4,87	70	4,5	6,2	29,04	2,16	46,03	2,72	12,04	1,39	17,00	1,88
	5,38		5	6,86	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,70	1,90
	6,39		6	8,15	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,10	1,94
	7,39		7	9,42	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,20	1,99
	8,37		8	10,67	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,20	2,02
	10,29		10*	13,11	57,90	2,10	91,52	2,64	24,27	1,36	33,60	2,10
7,5	5,80	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,1
	9,02		8	11,50	59,84	2,28	94,89	2,87	24,80	1,47	35,00	2,15
	10,08		9	12,83	66,10	2,27	104,79	2,86	27,48	1,46	38,00	2,18
8	6,78	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	38,3	2,23
	9,65		8	12,30	73,36	2,44	116,39	3,08	30,32	1,57	43,00	2,27
	11,88		10*	15,14	88,58	2,42	140,31	3,04	36,85	1,56	56,70	2,35
	14,05		12*	17,90	102,74	2,40	162,39	3,01	43,21	1,55	59,50	2,42

Продолжение табл. П.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
10	10,06	100	6,5	12,82	122,10	3,09	193,46	3,89	50,73	1,99	71,40	2,68
	10,79		7	13,75	130,59	3,08	207,01	3,88	54,16	1,98	76,40	2,71
	12,25		8	15,60	147,19	3,07	233,46	3,87	60,92	1,98	86,30	2,75
	15,10		10	19,24	178,95	3,05	283,83	3,84	74,08	1,96	110,0	2,83
	17,90		12	22,80	208,90	3,03	330,95	3,81	86,84	1,95	122,0	2,91
	20,63		14	26,28	237,15	2,99	374,98	3,78	99,32	1,94	138,0	2,99
	21,97		15*	27,99	250,68	2,98	395,87	3,76	105,48	1,94	145,0	3,03
	23,30		16	29,68	263,82	3,40	416,04	3,74	111,61	1,94	152,0	3,06
11	11,89	110	7	15,2	175,61	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,50		8	17,2	198,17	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3
12*	14,76	120	8	18,80	259,75	3,72	412,45	4,68	107,04	2,39	153,0	3m,25
	18,24		10	23,24	317,16	3,69	503,79	4,66	130,54	2,37	187,0	3,33
	21,67		12	27,60	371,80	3,67	590,28	4,62	153,33	2,36	218,0	3,44
	26,68		15	33,99	448,90	3,63	711,32	4,57	186,48	2,34	262,0	3,52
12,5	15,46	125	8	19,69	294,36	3,87	466,76	4,87	121,96	2,49	172,0	3,36
	17,30		9	22,00	327,48	3,86	520,0	4,86	135,88	2,48	192,0	3,4
	19,10		10	24,33	359,82	3,85	571,04	4,84	148,59	2,47	211,0	3,45
	22,68		12	28,89	422,23	3,82	670,02	4,82	174,43	2,46	248,0	3,53
	26,20		14	33,37	481,76	3,80	763,90	4,78	199,62	2,45	282,0	3,61
	29,65		16	37,77	538,56	3,78	852,84	4,75	224,29	2,44	315,0	3,68
14	19,41	140	9	24,72	466,0	4,34	739,42	5,47	192,0	2,79	274,0	3,78
	21,45		10	27,33	512,0	4,33	813,62	5,46	211,0	2,78	301,0	3,82
	25,50		12	32,49	602,0	4,31	956,98	5,43	248,0	2,76	354,0	3,9
15*	23,02	150	10	29,33	634,76	4,65	1008,56	5,86	260,97	2,98	374,0	4,07
	27,39		12	34,89	747,48	4,63	1187,86	5,83	307,09	2,97	440,0	4,15
	33,82		15	43,08	908,38	4,59	1442,60	5,79	374,17	2,95	534,0	4,27
	40,11		18	51,09	1060,1	4,56	1680,92	5,74	439,24	2,93	621,0	4,38
16	24,67	160	10	31,43	774,2	4,96	1229,0	6,25	319,4	3,19	455,0	4,3
	27,02		11	34,42	844,2	4,95	1340,7	6,24	347,8	3,18	496,0	4,35
	29,35		12	37,39	912,9	4,94	1450,0	6,23	375,8	3,17	537,0	4,39
	33,97		14	43,57	1046,5	4,92	1662,0	6,20	431,8	3,16	615,0	4,47
	38,52		16	49,07	1175,2	4,89	1865,7	6,17	484,6	3,14	690,0	4,55
	43,01		18	54,79	1290,2	4,87	2061,0	6,13	537,5	3,13	771,0	4,63
	47,44		20	60,40	1418,8	4,85	2248,3	6,10	589,4	3,12	830,0	4,70

Окончание табл. П.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
18	30,47	180	11	38,80	1216,4	5,60	1933,1	7,06	499,8	3,59	716,0	4,85
	33,12		12	42,19	1316,6	5,59	2092,8	7,04	540,5	3,58	776,0	4,89
	40,96		15*	52,18	1607,4	5,55	2555,0	7,00	659,7	3,56	948,0	5,01
	48,66		18*	61,99	1884,1	5,51	2992,7	6,95	775,4	3,54	1108,0	5,13
	53,72		20*	68,43	2061,1	5,49	3271,3	6,91	850,9	3,53	1210,0	5,20
20	36,97	200	12	47,10	1822,8	6,22	2806,2	7,84	749,4	3,99	1073,0	5,37
	39,92		13	50,85	1960,8	6,21	3116,2	7,83	805,4	3,98	1156,0	5,42
	42,80		14	54,60	2097,0	6,20	3333,0	7,81	861,6	3,97	1236,0	5,46
	48,65		16	61,98	2362,6	6,17	3755,4	7,78	980,7	3,96	1393,0	5,54
	54,40		18*	69,30	2620,6	6,15	4164,5	7,75	1076,7	3,94	1544,0	5,62
	60,08		20	76,54	2871,5	6,12	4560,4	7,72	1181,9	3,93	1689,0	5,70
	71,26		24*	90,78	3350,7	6,08	5313,6	7,65	1387,7	3,91	1936,0	5,85
	74,02		25	94,29	3466,2	6,06	5494,0	7,63	1438,4	3,91	2028,0	5,89
	87,56		30	111,5	4019,6	6,00	6351,1	7,55	1698,2	3,87	2332,0	6,07
22	47,40	220	14	60,38	2814,4	6,83	4470,2	8,60	1158,6	4,38	1655,0	5,91
	53,83		16	68,58	3175,4	6,80	5045,4	8,58	1305,0	4,36	1862,0	6,02
25	61,55	250	16	78,40	4717,1	7,76	7492,1	9,78	1942,1	4,98	2775,0	6,75
	68,56		18	87,72	5247,2	7,73	8336,7	9,75	2157,8	4,96	3089,0	6,83
	76,11		20	96,96	5764,9	7,71	9159,7	9,72	2370,0	4,94	3395,0	6,91
	87,31		22	106,10	6270,3	7,69	9961,6	9,69	2579,0	4,93	3691,0	7,00
	93,97		25	119,70	7006,4	7,65	1125,5	9,64	2887,3	4,91	4119,0	7,11
	104,50		28	133,10	7716,9	7,61	12243,8	9,59	3189,9	4,90	4527,0	7,23
	11,40		30	142,00	8176,5	7,59	12964,7	9,56	3389,0	4,89	4788,0	7,31
	128,50		35	163,70	9281,0	7,53	14682,7	9,47	3879,4	4,87	5402,0	7,49