

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ ПРОСТЕЙШИХ ФОРМ
Методические указания к решению задач и выполнению
расчетно-графической работы

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Введение	5
1. Площади плоских сечений (фигур)	6
2. Статические моменты площади. Центр тяжести площади	7
Пример 1.	8
Пример 2.	9
Упражнение 1 (для самоконтроля)	10
Ответы и консультации к упражнению 1	12
3. Моменты инерции плоских фигур	12
А. Прямоугольник	13
Б. Круг	13
В. Кольцо	14
Г. Треугольник	14
Д. Эллипс	15
4. Моменты инерции простых составных частей ...	15
Пример 3.	16
Пример 4.	17
Упражнение 2 (для самоконтроля)	17
Ответы и консультации к упражнению 2	21
Библиографический список.....	23

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данные учебно-методические указания по курсу "Сопротивление материалов" предназначены для самостоятельной проработки студентами раздела "Геометрические характеристики плоских простейших симметричных сечений".

В учебно-методические указания включены элементы программированного обучения при сохранении традиционного изложения учебного материала, что позволяет каждому студенту изучать этот материал в приемлемом для него индивидуальном темпе. В конце логически завершенных частей (порций) данного учебно-методического пособия приводятся разобранные примеры, а также упражнения, предназначенные для организации Вашей самостоятельной работы. Выполнение упражнений повышает активность усвоения учебного материала и дает возможность производить самоконтроль по усвоению изучаемого материала по приведенным в пособии упражнениям. Упражнения состоят из вопросов и задач, к которым даны ответы, указания и решения, чтобы оперативно проверить правильность их выполнения. Неправильные ответы анализируются и обсуждаются на приводимых здесь же консультациях.

Для лучшего усвоения порции учебного материала после проработки теоретической части рассмотренных и разобранных примеров рекомендуется выполнить $\approx 2/3$ части вопросов, приводимых в каждом из упражнений. Если Вы ответили правильно более чем на 0.7 из них, можете переходить к изучению следующей порции расположенного далее учебного теоретического материала. Если же правильные ответы составляют менее 0.7, то необходимо еще раз проработать эту же порцию учебного материала, внимательно разобраться в ответах и консультациях к вопросам, на которые Вы неудачно отвечали, а затем ответить на оставшиеся вопросы упражнений для самопроверки. Такой для Вас должна быть методика работы с данным пособием (см. схему I).

Самопроверка - залог успеха!

Она позволит Вам надежно вести процесс обучения и успешнее отвечать на экзаменах.

В заключении проработки учебно-методического пособия производится контроль со стороны преподавателя по изученному материалу.

Желаем успеха!

ВВЕДЕНИЕ

Прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций во многом определяются формой и размерами их поперечных сечений. В расчетной практике используются так называемые геометрические характеристики сечений.

Площадь сечения является одной из геометрических характеристик, используемых, главным образом, в расчетах на растяжение и сжатие. При расчетах на кручение, изгиб, а также на устойчивость используются более сложные геометрические характеристики: статические моменты, моменты инерции, моменты сопротивления и т.д.

Проектирование конструкций с оптимальными формами и размерами сечений является одним из путей снижения веса и стоимости машин и сооружений.

Раздел сопротивления материалов "Геометрические характеристики плоских сечений" является одним из важнейших.

Данное пособие составлено с целью облегчения проработки студентами учебного материала по указанному разделу курса.

В сопротивлении материалов исследование вопросов прочности и жесткости реального объекта начинается с выбора расчетной схемы.

При выборе расчетной схемы вводятся упрощения в геометрию реального объекта. Основным упрощающим приемом является приведение геометрической формы тела к схеме бруса и оболочки.

На основании одной из основных исходных предпосылок сопротивления материалов - гипотезы плоских сечений (гипотезы Бернулли) "сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации" - рассматриваются плоские сечения (сечения плоскостью) различных частей бруса.

Сопротивление бруса различным видам деформации и разрушению в значительной степени зависит от размеров и формы поперечного сечения.

При изложении вопросов геометрических характеристик будем использовать систему координат, показанную на рис. 1.

Геометрическими характеристиками данного сечения являются: площадь F , статические моменты S_z, S_y , моменты инерции I_z, I_y, I_p, I_{zy} , моменты сопротивления W_z, W_y, W_p , радиусы инерции i_z, i_y, i_p .

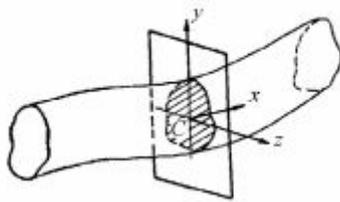


Рисунок. 1 Система координат для поперечного сечения

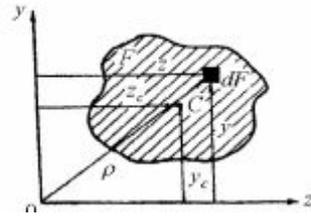


Рисунок. 2 Площадь ограниченная произвольной кривой

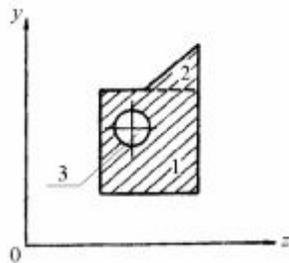


Рисунок. 3 Разбиение сложного поперечного сечения на простейшие части

1. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ (ФИГУР)

Площадь, ограниченная произвольной кривой, есть (рис. 2)

$$F = \int_F dF \quad (1)$$

Для вычисления геометрических характеристик сложных сечений, состоящих из простейших фигур, они разбиваются на конечное число n простейших частей (рис. 3). В этом случае

$$F = \sum_{i=1}^n F_i \quad (2)$$

2. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ СЕЧЕНИЯ

Статическими моментами площади сечения относительно осей z и y , лежащих в плоскости этой фигуры (рис. 2), называются геометрические характеристики, определяемые формулами:

$$S_z = \int_F y dF \quad (3)$$

$$S_y = \int_F z dF \quad (4)$$

Размерность статического момента - единица длины в кубе (в сопротивлении материалов принято - $см^3$).

Если известны положение центра тяжести сечения z_c и y_c (рис. 2) и его площадь F , то статические моменты определяют по формулам:

$$S_z = F \cdot y_c \quad (5)$$

$$S_y = F \cdot z_c \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) следует, что статический момент площади плоской фигуры (сечения) относительно любой центральной оси равен нулю. Обратное положение также справедливо: если статический момент сечения относительно какой-либо оси равен нулю, то эта ось является центральной, т.е. проходит через центр тяжести сечения s .

В зависимости от положения сечения относительно осей координат статический момент может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Из (5) и (6) могут быть определены координаты центра тяжести фигуры

$$Z_c = \frac{S_y}{F} \quad (7)$$

$$y_c = \frac{S_z}{F} \quad (8)$$

Для вычисления статических моментов сложной фигуры ее разбивают на простейшие части (рис. 3), для каждой из которых известны площадь F_i и положение центра тяжести (z_i, y_i) . Статические моменты всей фигуры относительно осей z и y соответственно будут равны:

$$S_z = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + \dots + F_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^n (F_i \cdot y_i) \quad (9)$$

$$S_y = F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2 + \dots + F_n \cdot z_n = \sum_{i=1}^n (F_i \cdot z_i) \quad (10)$$

Координаты центра тяжести сложной фигуры определяются:

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n (F_i \cdot z_i)}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (11)$$

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n (F_i \cdot y_i)}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (12)$$

Если сечение имеет ось симметрии, то центр тяжести находится на этой оси и его положение определяется одной координатой.

Если сечение имеет две и более осей симметрии, то центр тяжести совпадает с точкой пересечения этих осей.

ПРИМЕР 1: Определить статический момент полукруга радиусом R (рис. 4) относительно горизонтальной оси z , совпадающей с диаметром, и координату центра тяжести y_c .

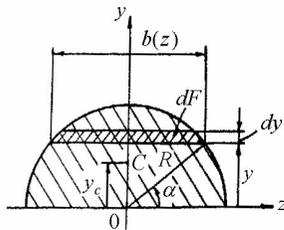


Рисунок. 4 К примеру 1.

Решение: По формуле (4) имеем $S_z = \int_F y dF$. Выделим на рис. 4 на расстоянии y элементарную площадку dF с помощью двух хорд, параллельных оси z , на расстоянии dy друг от друга. Как следует из рис. 4

$$y = R \cdot \sin \alpha, \quad b(z) = 2R \cdot \cos \alpha,$$

тогда

$$dy = (R \cdot \sin \alpha) \cdot d\alpha = R \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \quad \text{и}$$

$$dF = b(z) \cdot dy = 2R^2 \cos^2 \alpha \cdot d\alpha.$$

Подставляя найденные значения y и dF в выражение S_z , получим

$$S_z = \int_F y dF = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot \sin \alpha \cdot 2R^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot d\alpha = 2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha = -2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \cdot d(\cos \alpha) =$$

$$= -\frac{2R^3 \cdot \cos^3 \alpha}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2R^3}{3} (0 - 1) = \frac{2}{3} R^3.$$

Координата центра тяжести сечения y_c определяется по формуле (8):

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.424R.$$

ПРИМЕР 2: Определить положение центра тяжести неравнобокого уголка $160 \times 100 \times 10$ (пренебрегая закруглениями его полук) относительно осей z и y , совпадающих с наружными сторонами контура (рис. 5).

Найденные значения координат сравнить с табличными значениями по ГОСТ 8510-57.

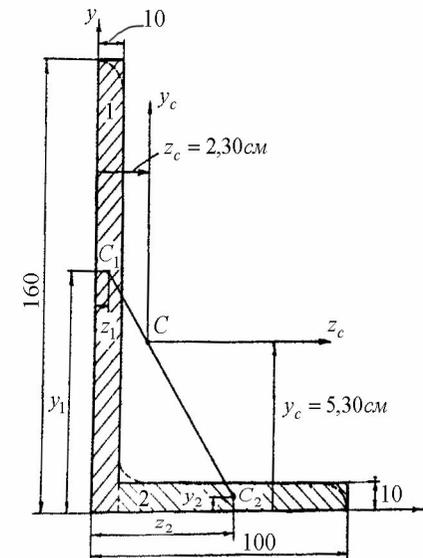


Рисунок. 5 Центр тяжести неравнобокого уголка к примеру 2

Решение: Пренебрегая загрузением полки уголка, разбиваем фигуру на два прямоугольника, как показано на рис. 5. Для первого (1) прямоугольника

$$F_1 = 160 \times 10 = 1600 \text{ мм}^2 = 16 \text{ см}^2,$$

$$y_1 = 80 \text{ мм} = 8 \text{ см},$$

$$z_1 = 5 \text{ мм} = 0,5 \text{ см}.$$

Для второго (2) прямоугольника

$$F_2 = 90 \times 10 = 900 \text{ мм}^2 = 9 \text{ см}^2,$$

$$y_2 = 5 \text{ мм} = 0,5 \text{ см},$$

$$z_2 = 5,5 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести сечения определяем по формулам (11) и (12):

$$z_c = \frac{F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2}{F_1 + F_2} = \frac{16 \cdot 0,5 + 9 \cdot 5,5}{16 + 9} = 2,30 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_1 + F_2} = \frac{16 \cdot 8 + 9 \cdot 0,5}{16 + 9} = 5,30 \text{ см}.$$

По данным сортамента с учетом закруглений координаты центра тяжести равны $z_c = 2,28 \text{ см}$; $y_c = 5,23 \text{ см}$.

Для проверки правильности вычислений определим статические моменты относительно центральных осей, которые должны быть равны нулю:

$$S_z = \frac{F_1(y_1 - y_c) + F_2(-y_c - y_2)}{F_1 + F_2} = \frac{16 \cdot (8 - 5,30) + 9 \cdot (-5,30 - 0,5)}{16 + 9} = \frac{43,2 - 43,2}{25} = 0$$

$$S_{y_c} = \frac{F_1(-z_c - z_1) + F_2(z_2 - z_c)}{F_1 + F_2} = \frac{16 \cdot (-2,30 - 0,5) + 9 \cdot (5,5 - 2,30)}{16 + 9} = \frac{-28,8 + 28,8}{25} = 0.$$

Графическая проверка: точка С должна находиться на отрезке C_1C_2 .

Упражнение 1 (для самоконтроля)

1.1. Вставьте (устно) пропущенное слово:

Статическим моментом площади сложного сечения называется сумма произведений площадей на расстояние от ... до их центров тяжести.

1.2. Зависит ли статический момент сечения от расстояния фигуры до оси, относительно которой он вычисляется?

А - зависит

Б - не зависит.

1.3. Вычислите статические моменты сечения прямоугольника относительно осей z и z_c (рис. 6) при $a = 10 \text{ см}$.

1.4. Чему равен статический момент сечения относительно оси y_c , проходящей через центр тяжести сечения?

А - $S_{y_c} > 0$.

Б - $S_{y_c} = 0$.

В - $S_{y_c} < 0$.

1.5. Определить координаты центра тяжести таврового сечения, размеры которого указаны на рис. 7.

1.6. Какова размерность статического момента?

А - [длина]².

Б - [длина]³.

В - [длина]⁴.

1.7. Может ли статический момент сечения быть отрицательным?

А - может.

Б - не может.

1.8. Вставьте (устно) пропущенные слова:

Координата центра тяжести сечения y_c определяется как отношение суммы ... к сумме (рис.9).

1.9. Вычислите статические моменты круглого сечения относительно осей z и y (рис. 8).

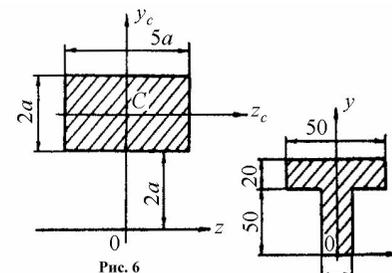


Рис. 6

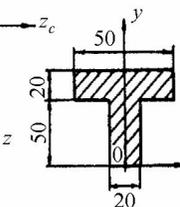


Рис. 7

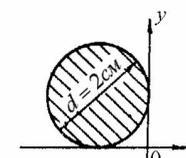


Рис. 8

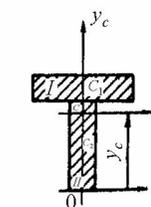


Рис. 9

Ответы и консультации к упражнению 1

- 1.1. ... оси ...
- 1.2. А - правильно.
- 1.2. Б - неправильно. Статический момент равен произведению площади на расстояние от оси до центра тяжести; следовательно, величина и знак статического момента зависят от расположения оси относительно сечения.
- 1.3. $S_z = F \cdot y_c = 2a \cdot 5a \cdot (2a+2) = 30a^3 = 3 \cdot 10^4 \text{ см}^3$;
 $S_{z_c} = 0$.
- 1.4. А - неправильно. Если ось проходит через центр тяжести, то сумма произведений площадок на расстояния их от оси до центра тяжести равна нулю. Это вытекает из определения центра тяжести.
- 1.4. Б - правильно.
- 1.4. В - неправильно. Если ось проходит через центр тяжести, то сумма произведений площадок на расстояния их от оси до центра тяжести равна нулю. Это вытекает из определения центра тяжести.
- 1.5. $z_c = 0$, т.к. ось y_c является осью симметрии тавра (рис. 9),
 $y_c = 4,25 \text{ см}$,
 $y_c = \frac{S_z^I + S_z^{II}}{F_I + F_{II}} = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_I + F_{II}} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 2,5}{5 \cdot 2 + 2 \cdot 5} = 4,25 \text{ см}$.
- 1.6. А - неправильно. $S_y = F \cdot z_c$, т.е. [длина]²·[длина]=[длина]³.
- 1.6. Б - правильно.
- 1.6. В - неправильно. $S_y = F \cdot z_c$, т.е. [длина]²·[длина]=[длина]³.
- 1.7. А - правильно.
- 1.7. Б - неправильно. Поскольку знак статического момента зависит от положения сечений относительно оси координат (см. формулы (5) и (6)).
- 1.8. ... статических моментов, относительно оси z , ... площадей.
- 1.9. $S_z = 3,14 \text{ см}^3$; $S_z = F \cdot y_c = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \left(+\frac{d}{2}\right) = \frac{\pi d^3}{8} = \pi = 3,14 \text{ см}^3$.
 $S_y = -3,14 \text{ см}^3$; $S_y = F \cdot z_c = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \left(-\frac{d}{2}\right) = -\frac{\pi d^3}{8} = -\pi = -3,14 \text{ см}^3$.

3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Осевые моменты инерции площади поперечного сечения бруса относительно осей z и y (рис. 2) определяются формулами:

$$I_z = \int_F y^2 dF \quad (13)$$

$$I_y = \int_F z^2 dF \quad (14)$$

Полярный момент инерции площади поперечного сечения бруса относительно начала координат (полюса) (рис. 2) равен:

$$I_p = \int_F \rho^2 dF \quad (15)$$

Если через полюс проведена система взаимно перпендикулярных осей z , y , то $\rho^2 = z^2 + y^2$ (рис. 2) и из (13)-(15) будем иметь:

$$I_p = I_z + I_y \quad (16)$$

Центробежный момент инерции площади поперечного сечения бруса относительно осей z и y (рис. 2) равен:

$$I_{zy} = \int_F zy dF \quad (17)$$

Все моменты инерций измеряются единицами длины в четвертой степени (в сопротивлении материалов принято - см^4). Осевые и полярные моменты инерций всегда положительны, а центробежный в зависимости от положения сечения относительно осей координат может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Центробежный момент инерции симметричной фигуры относительно осей, включающих хотя бы одну ось симметрии, равен нулю.

Пользуясь формулами (13)-(17) можно определить моменты инерции для простейших фигур.

А) Прямоугольник (рис. 10)

$$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad (18)$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad (19)$$

$$I_{zy} = 0$$

Б) Круг (рис. 11)

$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}, \quad (20)$$

$$I_z = I_y \approx 0,05 d^4, \quad (20^a)$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \quad (21)$$

$$I_p \approx 0,1 d^4. \quad (21^a)$$

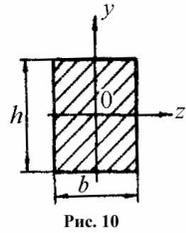


Рис. 10

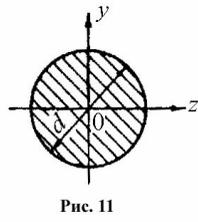


Рис. 11

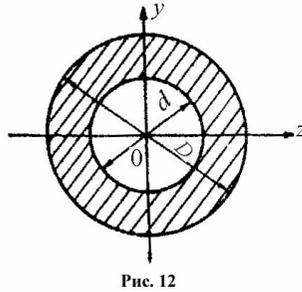


Рис. 12

В) Кольцо (рис. 12)

$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \approx 0,05 (D^4 - d^4), \quad (22)$$

$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4), \quad (22^a)$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \approx 0,1 (D^4 - d^4), \quad (23)$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4), \quad (23^a)$$

где $c = \frac{d}{D}$.

Г) Треугольник

а) равнобедренный (рис. 13)

$$I_{z_c} = \frac{bh^3}{36}; \quad (24)$$

$$I_{y_c} = \frac{hb^3}{48}; \quad (25)$$

б) прямоугольный (рис. 14)

$$I_{z_c} = \frac{bh^3}{36}; \quad (26)$$

$$I_{y_c} = \frac{hb^3}{36}. \quad (27)$$

Д) Эллипс (рис. 15)

$$I_z = \frac{\pi a^3 b}{4}, \quad (28)$$

$$I_y = \frac{\pi ab^3}{4}, \quad (29)$$

$$I_p = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2). \quad (30)$$

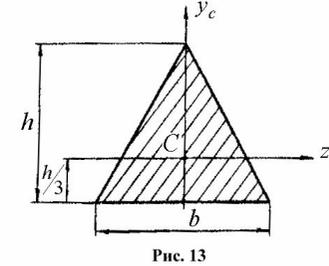


Рис. 13

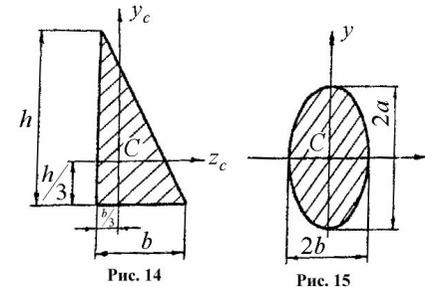


Рис. 14

Рис. 15

4. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИЙ ПРОСТЫХ СОСТАВНЫХ СЕЧЕНИЙ

Сложные сечения для вычисления моментов инерций обычно разбиваются на отдельные простые элементы, моменты инерций которых известны или могут быть вычислены по формулам (18)-(30).

Момент инерции сложного сечения равен алгебраической сумме моментов инерций составляющих его частей:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \sum_{i=1}^n I_i \quad (31)$$

Зависимость справедлива для всех моментов инерций (осевых, полярных, центробежных).

ПРИМЕР 3: Определить момент инерции сечения, показанного на рис. 16, относительно оси симметрии, $a=10$ см.

Решение: Разбиваем заданное сечение на простейшие элементы: I - равнобедренный треугольник, II - прямоугольник, III - круг.

Момент инерции сложной фигуры относительно оси z согласно формуле (31):

$$I_z = \sum_{i=1}^3 (I_z)_i = I_z^I + I_z^{II} - I_z^{III}.$$

Определяем моменты инерции слагаемых простейших элементов: для равнобедренного треугольника согласно формуле (25):

$$I_z^I = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{48} = \frac{3a \cdot (4a)^3}{48} = 4,00a^4;$$

для прямоугольника согласно формуле (18): $I_z^{II} = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} = \frac{2a \cdot (4a)^3}{12} = 10,67a^4;$

для круга согласно формуле (20): $I_z^{III} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi a^4}{64} = 0,0491a^4.$

Окончательно получим:

$$I_z = 4,00a^4 + 10,67a^4 - 0,0491a^4 = 14,62a^4 = 14,6 \cdot 10^4 = 1,46 \cdot 10^5 \text{ см}^4.$$

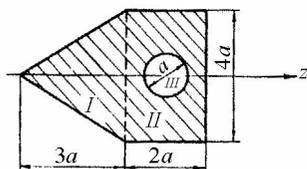


Рис. 16

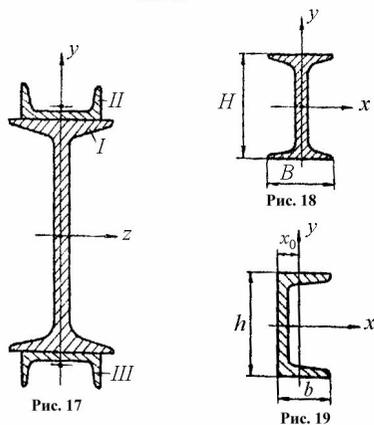


Рис. 17

Рис. 18

Рис. 19

ПРИМЕР 4: Определить момент инерции симметричного сечения, показанного на рис. 17, относительно вертикальной оси симметрии y . Двутавр №10 (ГОСТ 8239-56).

Швеллер №5 (ГОСТ 8240-56).

Решение: Разбиваем исходное сечение на простейшие элементы, моменты инерций которых приводятся в справочниках: I - двутавр, II и III - швеллеры.

По сортаменту на стандартные прокатные профили имеем:

1) Для двутавра №10 (ГОСТ 8239-56) (рис. 18):

$$H=10 \text{ см}, B=7 \text{ см}, F=14,2 \text{ см}^2, I_x=244 \text{ см}^4, I_y=35,3 \text{ см}^4.$$

2) Для швеллера №5 (ГОСТ 8240-56) (рис. 19):

$$h=5 \text{ см}, b=3,7 \text{ см}, F=6,90 \text{ см}^2, I_x=26,1 \text{ см}^4, I_y=8,41 \text{ см}^4, x_0=1,35 \text{ см}.$$

Момент инерции сечения относительно оси y согласно (31)

$$I_y = \sum_{i=1}^3 I_{y_i} = I_y^I + I_y^{II} + I_y^{III} = I_y^I + 2I_y^{II},$$

т.к. оба швеллера расположены идентично относительно оси y . Для двутавра $I_y^I = (I_y^I)_{\text{сортам.}} = 35,3 \text{ см}^4.$

Для швеллера $I_y^{II} = (I_y^C)_{\text{сортам.}} = 26,1 \text{ см}^4.$

Окончательно имеем: $I_y = 35,3 + 2 \cdot 26,1 = 87,5 \text{ см}^4.$

Упражнение 2 (для самоконтроля)

2.1. Вставьте (устно) пропущенные слова:

Осевым моментом инерции площади поперечного сечения называется взятый по всей площади сечения F интеграл от произведения элементарных площадок на ... их расстояния от ... до этих площадок.

2.2. Какова размерность моментов инерции сечения?

А - [длина]².

Б - [длина]³.

В - [длина]⁴.

2.3. Какие значения может приобретать осевой момент инерции I_z ?

А - $I_z = 0$.

Б - $I_z > 0$.

В - $I_z < 0$.

2.4. Какой из моментов инерции сечения может быть отрицательным?

А - I_z .

Б - I_y .

В - I_{zy} .

Г - I_p .

2.5. Вычислить осевой момент инерции I_z прямоугольного сечения с размерами 12×10 см (рис. 20).

2.6. Чему равно отношение осевых моментов инерции для прямоугольного сечения со сторонами a и $2a$ (рис. 21)?

2.7. Вычислить момент инерции сплошного круглого сечения диаметром $d=4$ см относительно центральной оси

2.8. Вычислите полярный момент инерции поперечного сечения трубы (рис. 22).

2.9. Определить, на сколько (в %) уменьшится площадь и полярный момент инерции кольцевого сечения по сравнению со сплошным круглым, если наружный диаметр кольца D равен диаметру круга d . Отношение внутреннего диаметра кольца d к наружному D равно $0,5$.

2.10. Как изменится осевой момент инерции круга, если его диаметр увеличить в два раза?

А- увеличится в 2 раза; Б- увеличится в 4 раза; В- увеличится в 16 раз.

2.11. Во сколько раз изменится осевой момент инерции I_{zc} сечения бруса, если он от круглого сечения был обработан до квадратного? (рис. 23).

2.12. Во сколько раз изменятся моменты относительно осей симметрии, если крестовидное сечение (рис. 24а), переместив материал (рис. 24б), сделать прямоугольным (рис. 24в)?

2.13. Изменится ли значение момента инерции квадратного сечения относительно горизонтальной оси (рис. 25а), если, перегруппировав материал (рис. 25б), сделать его в виде параллелограмма (рис. 25в)?

А- увеличится; Б- не изменится; В- уменьшится.

2.14. Вычислить момент инерции сечения (рис. 26) относительно вертикальной оси симметрии.

2.15. Как изменится осевой момент инерции I_{zc} сечения, состоящего из двух швеллеров (рис. 27), если их из положения (а) перевести в положение (б)?

2.16. Как изменится момент инерции относительно горизонтальной оси симметрии двутаврового сечения I №30 (рис. 28), если его из вертикального положения (а) перевести в горизонтальное положение (б)?

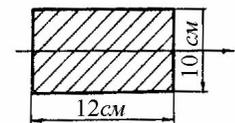


Рис. 20

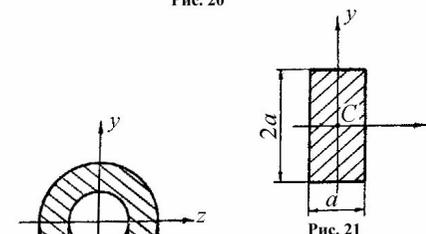


Рис. 21

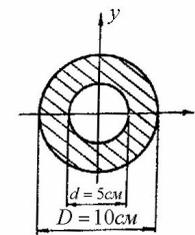


Рис. 22

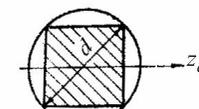


Рис. 23

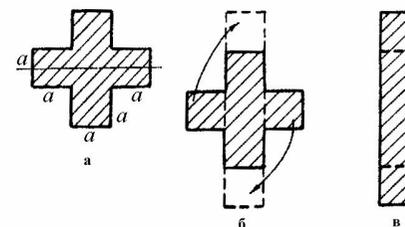


Рис. 24

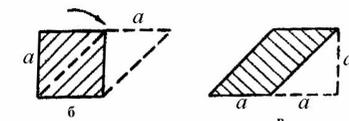
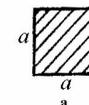


Рис. 25

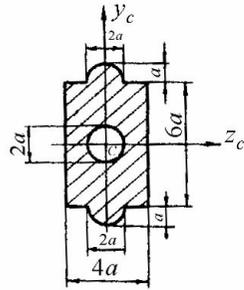


Рис. 26

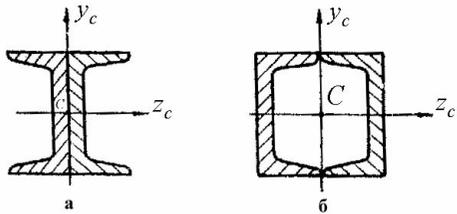


Рис. 27

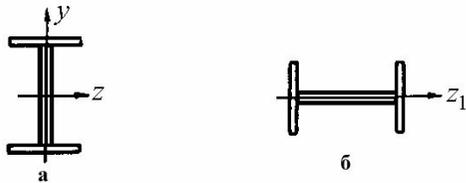


Рис. 28

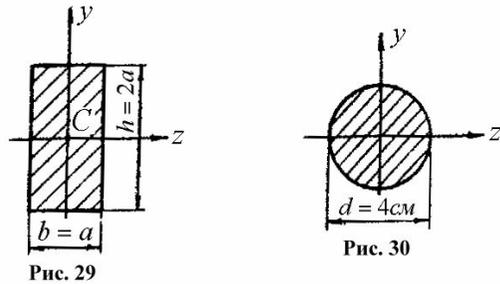


Рис. 29

Рис. 30

Ответы и консультации к упражнению 2

2.1. ... квадраты оси ...

2.2. А- неправильно. $I_z = \int_F y^2 dF$, т.е. [длина]²×[длина]²=[длина]⁴.

2.2. Б-неправильно. $I_{zy} = \int_F zy dF$, т.е. [длина]×[длина]×[длина]²=[длина]⁴.

2.2. В- правильно.

2.3. А- неправильно. Согласно $I_z = \int_F y^2 dF$ всегда $I_z > 0$.

2.3. Б- правильно.

2.3. В- неправильно. Согласно условию симметрии функции $I_z = \int_F y^2 dF$ всегда $I_z > 0$.

2.4. А- неправильно. Согласно $I_z = \int_F y^2 dF$ всегда $I_z > 0$.

2.4. Б- неправильно. Согласно $I_z = \int_F y^2 dF$ всегда $I_z > 0$.

2.4. В - правильно.

2.4. Г - неправильно. Согласно $I_p = \int_F \rho^2 dF$ всегда $I_p > 0$.

2.5. $I_z = 1000 \text{ см}^4$; $I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot (10)^3}{12} = 10^3 \text{ см}^4$.

2.6. $\frac{I_z}{I_y} = 4$ (см. рис. 29); $I_z = \frac{bh^3}{12}$; $I_y = \frac{hb^3}{12}$; $\frac{I_z}{I_y} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{hb^3}{12}} = \frac{h^2}{b^2} = \frac{(2a)^2}{a^2} = 4$.

2.7. $I_{oc} = 12,6 \text{ см}^4$ (см. рис. 30); $I_{oc} = I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(4)^4}{64} = 4\pi = 12,6 \text{ см}^4$.

2.8. $I_p = 920 \text{ см}^4$, $c = \frac{d}{D} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$,

$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4) = \frac{\pi \cdot 10^4}{32} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) = 920 \text{ см}^4$

2.9. 6,25%; $I_p^{\text{круг.}} = \frac{\pi D^4}{32}$; $I_p^{\text{кольц.}} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}$;

$\frac{I_p^{\text{круг.}} - I_p^{\text{кольц.}}}{I_p^{\text{круг.}}} \cdot 100\% = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{\pi D^4}{32}} \cdot 100\% = \left(\frac{d}{D}\right)^4 \cdot 100\% = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 100\% = 6,25\%$.

- 2.10. А - неправильно } $(I_{oc})_1 = \frac{\pi d_0^4}{64}; (I_{oc})_2 = \frac{\pi(2d_0)^4}{64} = 16 \frac{\pi d_0^4}{64}$.
 2.10. Б - неправильно }
 2.10. В - правильно.

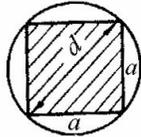


Рис. 31

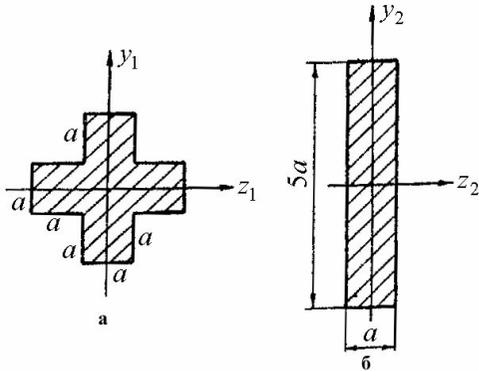


Рис. 32

- 2.11. Уменьшится в 2,36 раза (рис. 31); $(I_{oc})_{кр.уг.} = \frac{\pi d^4}{64}$;
 $(I_{oc})_{квадр.} = \frac{bh^3}{12} = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{12} = \frac{d^4}{(\sqrt{2})^4 \cdot 12} = \frac{d^4}{48}$; $\frac{(I_{oc})_{кр.уг.}}{(I_{oc})_{квадр.}} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d^4}{48}} = \frac{\pi \cdot 48}{64} = 2,36$.

- 2.12. I_z увеличивается в 4,31 раза; I_y уменьшается в 5,8 раза
 (см. рис. 32а, 32б); $I_{z_1} = I_{y_1} = \frac{a \cdot (3a)^3}{12} + 2 \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{29}{12} a^4$;
 $I_{z_2} = \frac{a \cdot (5a)^3}{12} = \frac{125}{12} a^4$; $I_{y_2} = \frac{5a \cdot a^3}{12} = \frac{5}{12} a^4$;

$$\frac{I_{z_1}}{I_{z_2}} = \frac{\frac{125}{12} a^4}{\frac{29}{12} a^4} = 4,31; \quad \frac{I_{y_1}}{I_{y_2}} = \frac{\frac{29}{12} a^4}{\frac{5}{12} a^4} = 5,8$$

- 2.13. А - неправильно. Формула $I_z = \frac{bh^3}{12}$ справедлива и для параллелограмма, т.е. I_z зависит от основания b и высоты h и не зависит от угла наклона сторон;

2.13. Б - правильно.

- 2.13. В - неправильно. Формула $I_z = \frac{bh^3}{12}$ справедлива и для параллелограмма, т.е. I_z зависит от основания b и высоты h и не зависит от угла наклона сторон; т.е. I_z квадрата = I_z параллелограма (рис. 25).

- 2.14. $I_{y_c} = I_{y_c}$ прямоугольника = $32a^4$,

$$I_{y_c} = I_{y_c}^{прямоуг.} + \underbrace{2I_{y_c}^{полукруга} - I_{y_c}^{круга}}_0 = I_{y_c}^{прямоуг.} = \frac{Rb^2}{12} = \frac{6a(4a)^3}{12} = 32a^4.$$

2.15. Не изменится.

- 2.16. Уменьшится в 21 раз (см. рис. 28а, 28б). По сортаменту

$$I_z = (I_x)_{сортам.} = 7080 \text{ см}^4, \quad I_y = (I_y)_{сортам.} = 337 \text{ см}^4,$$

$$\frac{I_z}{I_y} = \frac{I_z}{I_y} = \frac{7080}{337} = 21,0.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. В.И. Феодосьев, "Сопротивление материалов", М.: Наука, 1974.
2. А.В. Дарков, Г.С. Шпиро, "Сопротивление материалов", М.: Высшая школа, 1975.
3. "Сборник задач по сопротивлению материалов", Под. ред. А.А. Уманского, М.: Наука, 1973.
4. Н.М. Беляев, "Сборник задач по сопротивлению материалов", М.: Наука, 1966.