

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ**

Методические указания по выполнению контрольных заданий

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Сопrotивление стержня различным видам деформаций зависит не только от его материала и размеров, но и от формы поперечных сечений. Рассмотрим основные геометрические характеристики поперечных сечений.

## 1. СТАТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СЕЧЕНИЯ

Статическим моментом  $S_x$  сечения (фигуры) относительно какой-либо оси  $x$  (рис.1) называется сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на их расстояние  $y$  до данной оси, численно равная интегралу

$$S_x = \int_A y dA . \quad (1)$$

Размерность статического момента — единица длины в третьей степени, обычно  $см^3$ . Он может быть положительным, отрицательным и, в частности, равным нулю. Если отождествить площадь с силой, то интеграл (1) можно рассматривать как сумму моментов сил  $dA$  относительно оси  $x$ . По известной из теоретической механики теореме о моменте равнодействующей можно написать

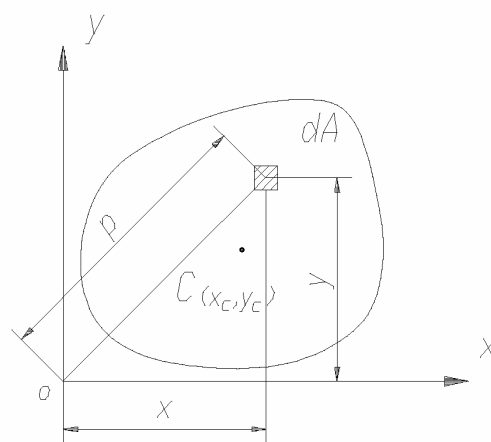


Рис. 1

$$S_x = \int_A y dA = A \cdot y_c , \quad (2)$$

где  $A$  — площадь всей фигуры (равнодействующая);

$y_c$  — расстояние от центра тяжести фигуры до оси  $x$ .

Из формулы (2) следует формула для определения координаты центра тяжести

$$y_c = \frac{S_x}{A} . \quad (3)$$

Аналогично статический момент относительно оси  $y$

$$S_y = \int_A x dA = A \cdot x_c , \quad (4)$$

откуда

$$x_c = \frac{S_y}{A} . \quad (5)$$

Из этих формул следует, что если  $x$  и  $y$  проходят через центр тяжести, фигуры, то статический момент относительно этих осей равен нулю. Такие оси называются *центральными осями*.

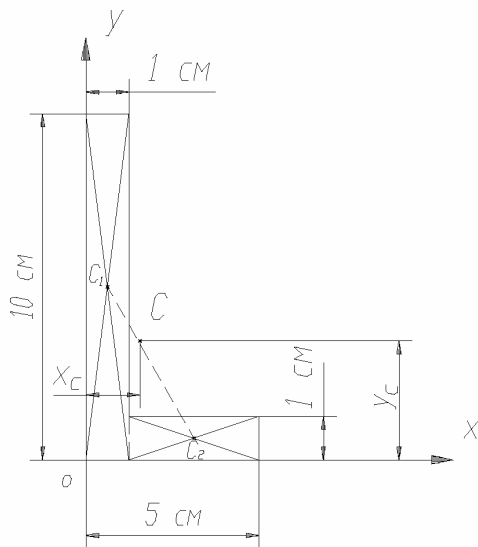


Рис. 2

**Пример 1.** Определить положение центра тяжести сечения (рис.2).

*Решение.* Разбиваем сечение на два прямоугольника. Проводим вспомогательные оси  $x$  и  $y$ .

По формулам (3) и (5) получим:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 0,5 + 4 \cdot 1 \cdot 3}{10 + 4} = 1,21 \text{ см.}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 \cdot 0,5}{10 + 4} = 3,71 \text{ см.}$$

По этим координатам находим точку  $C$  — центр тяжести сечения.

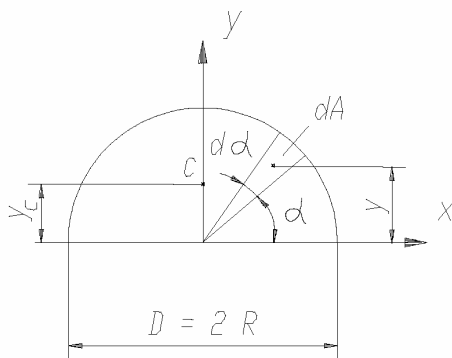


Рис.3

Если сечение можно представить в виде отдельных простых частей (прямоугольников, треугольников и т.д.), для которых известны положения центров тяжести, то в этом случае статический момент всего сечения можно получить как сумму статических моментов этих простых частей. Это непосредственно следует из свойств определенного интеграла.

Если сечение имеет ось симметрии, то последняя всегда проходит через центр тяжести, а потому статический момент относительно оси симметрии всегда равен нулю.

**Пример 2.** Определить положение центра тяжести сечения, имеющего форму полукруга (рис.3).

*Решение.* Ось  $y$  является осью симметрии, следовательно, центр тяжести сечения лежит на этой оси. Для определения его положения воспользуемся формулой (3).

Вычислим статический момент полукруга относительно оси  $x$ , выделив элементарный сектор. Его площадь равна площади треугольника с основанием  $Rd\alpha$  и высотой  $R$ :

$$dA = \frac{1}{2} Rd\alpha \cdot R,$$

а ордината центра тяжести  $y = \frac{2}{3}R \sin \alpha$ ;

тогда

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^{\pi} \frac{2}{3}R \sin \alpha \frac{1}{2}R^2 d\alpha = \frac{2}{3}R^3$$

и координата центра тяжести

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{2}{3}R^3}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{4}{3\pi}R \approx 0,424 \cdot R.$$

## 2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

*Осевым моментом инерции* сечения относительно оси  $x$  называется сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на квадрат их расстояний до данной оси, численно равная интегралу

$$J_x = \int_A y^2 dA. \quad (6)$$

Аналогично относительно оси  $y$

$$J_y = \int_A x^2 dA,$$

где  $y$  — расстояние от элементарной площадки  $dA$  до оси  $x$  (см. рис.1),  
 $x$  — расстояние от элементарной площадки  $dA$  до оси  $y$ .

*Полярным моментом инерции* сечения относительно данной точки (полюса) называется сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на квадрат их расстояний до этой точки, определяемая интегралом вида

$$J_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (7)$$

где  $\rho$  — расстояние от площадки  $dA$  до точки (полюса) (см. рис.1), относительно которой вычисляется полярный момент инерции.

Осевой и полярный моменты инерции — величины всегда положительные, так как в формулы (6) и (7) координаты произвольной площадки входят в квадрате.

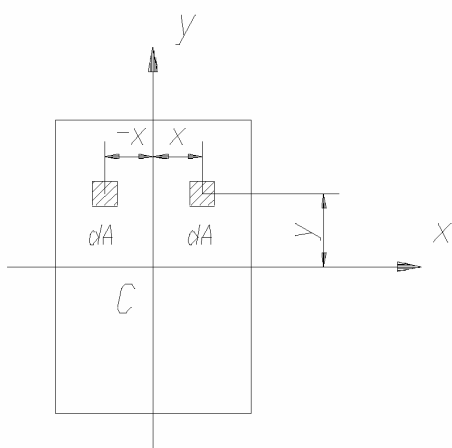
*Центробежным моментом инерции* сечения относительно осей  $x$  и  $y$  называется сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на их расстояния до этих осей, определяемая интегралом вида

$$J_{xy} = \int_A xy dA, \quad (8)$$

где  $x, y$  — расстояния от площадки  $dA$  до осей  $x$  и  $y$ .

Размерность всех моментов инерции — единица длины в четвертой степени (обычно  $см^4$ ).

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и, в частном случае, равным нулю.



Если взаимно перпендикулярные оси  $x$  и  $y$  или одна из них является осями симметрии фигуры, то относительно таких осей центробежный момент инерции равен нулю. Действительно, для симметричной фигуры всегда можно выделить два элемента ее площади (рис.4), которые имеют одинаковые координаты  $y$  и равные, но противоположные по знаку, абсциссы, тогда:

Рис. 4

$$J_{xy} = \int_A xy dA = \int_{A_l} (-x)y dA + \int_{A_n} xy dA = 0.$$

Легко доказать, что полярный момент инерции относительно какой-либо точки равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку.

Из рис.1 видно, что  $\rho^2 = x^2 + y^2$ . Подставив это значение в выражение (7), получим

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA.$$

Следовательно,

$$J_p = J_x + J_y. \quad (9)$$

### 3. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

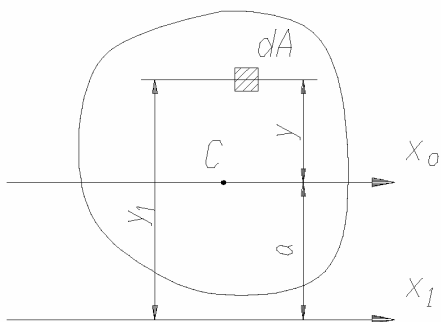


Рис. 5

Определим момент инерции фигуры относительно какой-либо оси  $x_1$  (рис.5).

Пусть  $x_0$  – центральная ось и момент инерции  $J_{x_0}$  известен. Из чертежа видно, что  $y_1 = a + y$ . Следовательно,

$$J_{x_1} = \int_A (a + y)^2 dA = a^2 \int_A dA + 2a \int_A y dA + \int_A y^2 dA .$$

Первый интеграл дает площадь сечения. Второй интеграл, представляющий статический момент относительно центральной оси  $x_o$ , равен нулю. Третий интеграл – это момент инерции  $J_{x_o}$  фигуры относительно оси  $x_o$ . Таким образом,

$$J_{x_1} = J_{x_o} + a^2 A . \quad (10)$$

*Момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.*

Из формулы (10) видно, что момент инерции относительно центральной оси меньше, чем момент инерции относительно любой нецентральной оси, параллельной первой.

Момент инерции относительно центральной оси называется *центральный момент инерции*.

#### 4. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЫХ СЕЧЕНИЙ

**1. Прямоугольник** (рис.6,а). Вычислим момент инерции сечения относительно оси  $x_o$ , проходящей через центр тяжести.

За  $dA$  примем площадь бесконечно тонкого слоя  $dA = b \cdot dy$ . Тогда

$$J_{x_o} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12} . \quad (11)$$

Аналогично,

$$J_{y_o} = \frac{hb^3}{12} . \quad (12)$$

**2. Круг** (рис.6,б). Сначала определим полярный момент инерции относительно центра круга

$$J_p = \int_A \rho^2 dA .$$

За  $dA$  принимаем площадь бесконечно тонкого кольца толщиной  $d\rho$ :

$$dA = 2\pi \rho \cdot d\rho ,$$

тогда

$$J_p = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi \cdot r^4}{2} .$$

Следовательно,

$$J_p = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4 . \quad (13)$$

Теперь найдем  $J_{x_o}$ . Для круга, согласно формуле (9), получаем

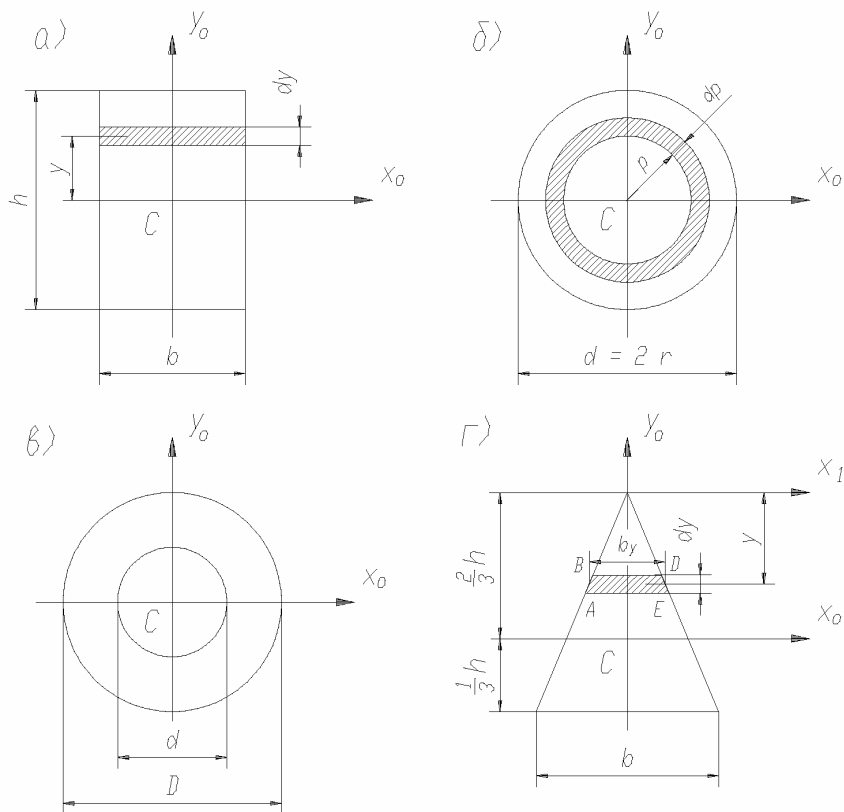


Рис.6

$$J_p = 2 \cdot J_{x_o} = 2 \cdot J_{y_o},$$

откуда

$$J_{x_o} = J_{y_o} = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \approx 0,05 \cdot d^4. \quad (14)$$

**3. Кольцо** (рис.6,в). Осевой момент инерции в этом случае равен разности моментов инерции внешнего и внутреннего кругов

$$J_{x_o} = J_{y_o} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} - \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05 \cdot D^4 \cdot (1 - \alpha^4), \quad (15)$$

где

$$\alpha = \frac{d}{D}.$$

Аналогично полярный момент инерции

$$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} - \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 \cdot D^4 \cdot (1 - \alpha^4). \quad (16)$$

**4. Равнобедренный треугольник** (рис.6,г). Определим момент инерции относительно оси  $x_1$ , параллельной основанию и проходящей через вершину треугольника

$$J_{x_1} = \int_A y^2 dA.$$

За  $dA$  примем площадь бесконечно тонкой трапеции  $ABDE$ , площадь которой можно считать равной площади прямоугольника

$$dA = b_y dy,$$

где  $b_y$  – длина прямоугольника, которую легко получить из подобия треугольников

$$b_y = \frac{y}{h} b,$$

тогда

$$J_{x_1} = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{b \cdot h^3}{4}. \quad (17)$$

Определим момент инерции относительно центральной оси, для чего используем формулу (10):

$$J_{x_o} = J_{x_1} - a^2 A = \frac{b \cdot h^3}{4} - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot h^3}{36}. \quad (18)$$

Аналогичным образом определяя момент инерции относительно центральной оси  $y_o$ , получаем формулу

$$J_{y_o} = \frac{b^3 \cdot h}{48}. \quad (19)$$

## 5. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЛОЖНЫХ ФИГУР

Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции ее составных частей

$$J_x = J_x^I + J_x^{II} + J_x^{III} + \dots \quad (20)$$

Это непосредственно следует из свойств определенного интеграла

$$\int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \dots,$$

где

$$A = A_1 + A_2 + \dots$$

Таким образом, для вычисления момента инерции сложной фигуры надо разбить ее на ряд простых фигур, вычислить моменты инерции этих фигур и затем просуммировать эти моменты инерции.

Данная теорема справедлива также и для центробежного момента инерции.

Моменты инерции прокатных сечений (двутавров, швеллеров, уголков и т.д.) приводятся в таблицах сортамента.

**Пример 3.** Определить положение центра тяжести, вычислить моменты инерции сечения (рис.7) относительно вертикальной и горизонтальной центральных осей.



Решение:

1. Определяем положение центра тяжести.

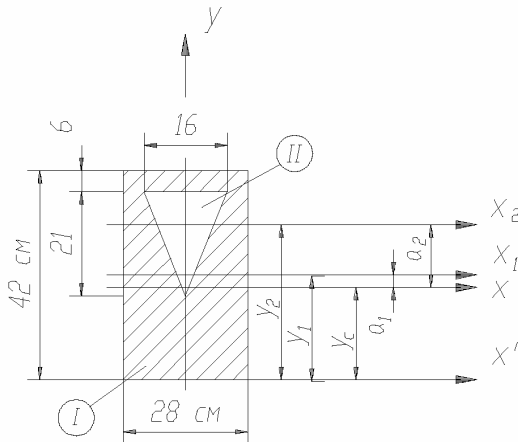


Рис.7

Сечение имеет ось симметрии  $y$ , следовательно, она является центральной осью. Для определения координаты центра тяжести вводим вспомогательную ось  $x'$  и разбиваем сечение на две фигуры: прямоугольник – I и треугольник – II.

Координату центра тяжести определяем по формуле

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A_1 - A_2},$$

где  $A_1$  – площадь первой фигуры (прямоугольника);

$A_2$  – площадь второй фигуры (треугольника);

$y_1$  – расстояние от оси  $x'$  до центра тяжести прямоугольника;

$y_2$  – расстояние от оси  $x'$  до центра тяжести треугольника.

Знак минус в формуле говорит о том, что вторая фигура у нас вырез.

Тогда:

$$A_1 = 42 \cdot 28 = 1176 \text{ см}^2, \quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 21 = 168 \text{ см}^2,$$

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot 42 = 21 \text{ см}, \quad y_2 = 42 - 6 - \frac{1}{3} \cdot 21 = 29 \text{ см}.$$

$$y_c = \frac{1176 \cdot 21 - 168 \cdot 29}{1176 - 168} = 19,67 \text{ см}.$$

2. Вычисляем моменты инерции относительно центральных осей  $x$  и  $y$ :

$$J_x = J_x^I - J_x^{II},$$

$$J_y = J_y^I - J_y^{II}.$$

Для вычисления момента инерции прямоугольника  $J_x^I$  относительно оси  $x$  используем формулу (10)

$$J_x^I = J_{x_1}^I + a_1^2 \cdot A_1,$$

где  $J_{x_1}^I$  – момент инерции прямоугольника относительно собственной центральной оси  $x_1$ ;

$a_1$  – расстояние от оси  $x$  до центра тяжести прямоугольника.

Тогда по формуле (11)

$$J_{x_1}^I = \frac{28 \cdot 42^3}{12} = 172872 \text{ см}^4,$$

$$a_1 = 21 - 19,67 = 1,33 \text{ см},$$

$$J_x^I = 172872 + 1,33^2 \cdot 1176 = 174952 \text{ см}^4.$$

Аналогично вычисляем момент инерции треугольника относительно оси  $x$

$$J_x^{II} = J_{x_2}^{II} + a_2^2 \cdot A_2.$$

По формуле (18):  $J_{x_2}^{II} = \frac{16 \cdot 21^3}{36} = 4116 \text{ см}^4,$

$$a_2 = 29 - 19,67 = 9,33 \text{ см},$$

$$J_x^{II} = 4116 + 9,33^2 \cdot 168 = 18740 \text{ см}^4.$$

Суммарный момент инерции относительно оси  $x$

$$J_x = 174952 - 18740 = 156212 \text{ см}^4.$$

Для вычисления момента инерции относительно оси  $y$  используем формулы (12) и (19):

$$J_y = \frac{42 \cdot 28^3}{12} - \frac{16^3 \cdot 21}{48} = 76832 - 1792 = 75040 \text{ см}^4.$$

## 6. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Найдем зависимость между моментами инерции относительно осей  $x, y$  и моментами инерции относительно осей  $x_1, y_1$ , повернутых на угол  $\alpha$  (рис.8). Пусть  $J_x > J_y$  и положительный угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $x$  против часовой стрелки.

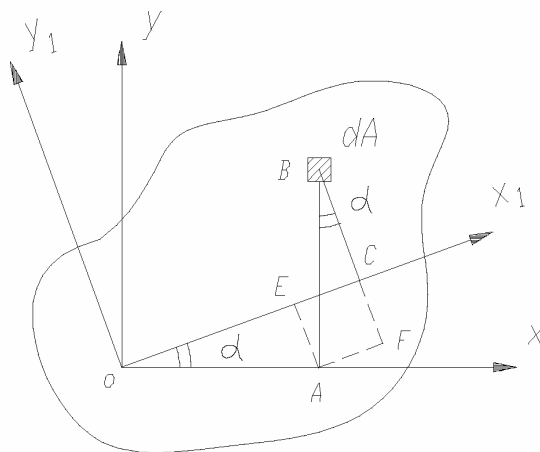


Рис.8

Для решения поставленной задачи найдем зависимость между координатами площадки  $dA$  в исходных и повернутых осях. Из чертежа следует

$$x_1 = \overline{OC} = \overline{OE} + \overline{EC} = \overline{OE} + \overline{AF} = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha, \quad (21)$$

$$y_1 = \overline{BC} = \overline{BF} - \overline{AE} = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha. \quad (22)$$

Теперь определим моменты инерции относительно осей  $x_1$  и  $y_1$ :

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \int_A y^2 \cos^2 \alpha \cdot dA - 2 \int_A xy \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot dA + \int_A x^2 \sin^2 \alpha \cdot dA, \end{aligned}$$

или

$$J_{x_1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \quad (23)$$

аналогично

$$\begin{aligned} J_{y_1} &= \int_A (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 dA = \\ &= J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} J_{x_1 y_1} &= \int_A (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)(y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha) dA = \\ &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (25)$$

Складывая (23) и (24), получаем

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_p. \quad (26)$$

Вычитая (24) из (23), получаем

$$J_{x_1} - J_{y_1} = (J_x - J_y) \cos 2\alpha - 2J_{xy} \sin 2\alpha. \quad (27)$$

Формула (26) показывает, что сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей не меняется при их повороте.

Формула (27) может служить для вычисления центробежного момента инерции относительно осей  $x$ ,  $y$  по известным осевым моментам инерции относительно осей  $x_1$ ,  $y_1$ .

## 7. ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

При изменении угла величины  $J_{x_1}$ ,  $J_{y_1}$  и  $J_{x_1 y_1}$  изменяются. Найдем значение угла, при котором  $J_{x_1}$  и  $J_{y_1}$  имеют экстремальные значения, для чего возьмем от  $J_{x_1}$  и  $J_{y_1}$  первую производную по  $\alpha$  и приравняем ее нулю:

$$\frac{dJ_{x_1}}{d\alpha} = -2J_x \cos \alpha_o \cdot \sin \alpha_o + 2J_y \sin \alpha_o \cdot \cos \alpha_o - 2J_{xy} \cos 2\alpha_o = 0,$$

или

$$-(J_x - J_y) \sin 2\alpha_o - 2J_{xy} \cos 2\alpha_o = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_o = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}. \quad (28)$$

Эта формула определяет положение двух осей, относительно одной из которых осевой момент инерции максимален, а относительно другой – минимален.

Такие оси называются *главными*. Моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*.

Величину главных моментов инерции найдем из формул (23) и (24), подставив в них значение  $\alpha_o$  из формулы (28), при этом используем известные формулы тригонометрии для функций двойных углов.

После преобразований получим следующую формулу для определения главных моментов инерции:

$$J_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}. \quad (29)$$

Исследуя вторую производную  $\frac{d^2 J_{x_l}}{d\alpha^2}$ , можно установить, что для данного случая ( $J_x > J_y$ ) максимальный момент инерции  $J_{\max}$  имеет место относительно главной оси, повернутой на угол  $\alpha_o$  по отношению к оси  $x$ , а минимальный момент инерции – относительно другой перпендикулярной оси. В большинстве случаев в этом исследовании нет необходимости, так как по конфигурации сечений видно, какая из главных осей соответствует максимуму момента инерции. Кроме формулы (29), для определения главных моментов инерции можно пользоваться также формулами (23) и (24). При этом сам собой решается вопрос: относительно какой главной оси получается максимальный момент инерции и относительно какой оси минимальный.

Покажем теперь, что относительно главных осей центробежный момент инерции равен нулю.

Действительно, приравнявая  $J_{x_l y_l}$  по формуле (25) нулю, получаем

$$\frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha_o + J_{xy} \cos 2\alpha_o = 0,$$

откуда для  $\operatorname{tg} 2\alpha_o$  вновь получается формула (28).

Таким образом, главными осями инерции называются оси, обладающие следующими свойствами:

1. Центробежный момент инерции относительно этих осей равен нулю.
2. Моменты инерции относительно главных осей имеют экстремальные значения (относительно одной – максимум, относительно другой – минимум).

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *главными центральными осями инерции*.

Во многих случаях удается сразу определить положение главных центральных осей. Если фигура имеет ось симметрии, то она является одной из главных центральных осей, вторая проходит через центр тяжести сечения

перпендикулярно первой. Сказанное следует из того обстоятельства, что относительно оси симметрии и любой оси, ей перпендикулярной, центробежный момент инерции равен нулю.

Используя формулы (23) – (25), можно показать, что в случае, если два главных центральных момента инерции сечения равны между собой, то у этого сечения любая центральная ось является главной, и все главные центральные моменты инерции одинаковы (круг, квадрат, шестиугольник, равносторонний треугольник).

Действительно, предположим, что для какого-то сечения оси  $x$  и  $y$  – главные центральные оси и, кроме того,  $J_x = J_y$ . Тогда из формул (23) и (24) получим, что  $J_x = J_y = J_{x_1} = J_{y_1}$ , а по формуле (25) убедимся, что  $J_{x_1 y_1} = 0$ , т.е. любые оси  $x_1$  и  $y_1$  являются главными центральными осями инерции такой фигуры.

## 8. ПОНЯТИЕ О РАДИУСЕ И ЭЛЛИПСЕ ИНЕРЦИИ

Познакомимся еще с одной геометрической характеристикой – радиусом инерции сечения.

*Радиусом инерции* сечения относительно некоторой оси, например,  $x$ , называется величина  $i_x$ , определяемая из равенства

$$J_x = A \cdot i_x^2.$$

Из определения следует, что радиус инерции равен расстоянию от оси  $x$  до той точки, в которой следует сосредоточить (условно) площадь сечения  $A$ , чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего сечения. Зная момент инерции сечения и его площадь, можно найти радиус инерции относительно оси  $x$

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}. \quad (30)$$

Радиусы инерции, соответствующие главным осям, называются *главными радиусами инерции* и определяются по формулам:

$$i_{max} = \sqrt{\frac{J_{max}}{A}}, \quad i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}. \quad (31)$$

Построим на главных центральных осях инерции эллипс с полуосями, равными главным радиусам инерции, причем вдоль оси  $u$  отложим отрезки  $i_v$ , а вдоль оси  $v$  – отрезки  $i_u$  (рис. 9). Такой эллипс, имеющий уравнение

$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1 \quad (32)$$

и называемый *эллипсом инерции*, обладает следующим свойством. Радиус инерции относительно любой центральной оси  $z$  определяется как

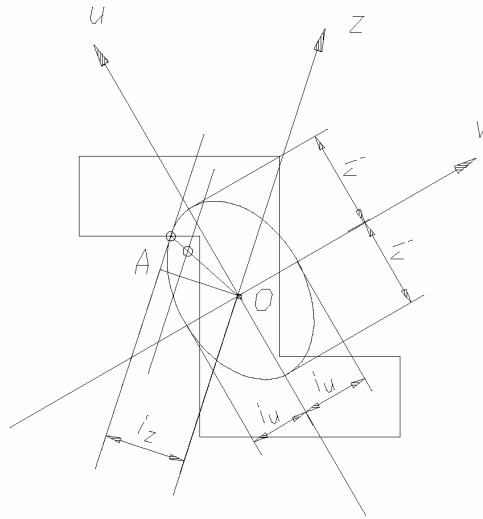


Рис. 9

перпендикуляр  $OA$ , проведенный из центра эллипса на касательную, параллельную данной оси. Для получения же точки касания достаточно провести параллельно данной оси  $z$  любую хорду. Точка пересечения эллипса с прямой, соединяющей центр  $O$  и середину хорды, и есть точка касания. Измерив затем отрезок  $OA = i_z$ , находим момент инерции

$$J_z = A \cdot i_z^2.$$

### 9. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ЦЕНТРОБЕЖНЫМИ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ДВУХ СИСТЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

Пусть оси  $x_o$  и  $y_o$  – центральные оси (рис.10) и момент инерции  $J_{x_o y_o}$  задан. Найдем центробежный момент инерции относительно осей  $x_l, y_l$ . Из чертежа видно, что

$$x_l = x_o + b,$$

$$y_l = y_o + a.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_{x_l y_l} &= \int_A x_l y_l dA = \int_A (x_o + b)(y_o + a) \cdot dA = \\ &= \int_A x_o y_o dA + b \int_A y_o dA + a \int_A x_o dA + ab \int_A dA, \end{aligned}$$

или

$$J_{x_l y_l} = J_{x_o y_o} + ab \cdot A. \quad (33)$$

Второй и третий интегралы в правой части равенства (33), представляющие статические моменты относительно центральных осей, равны нулю.

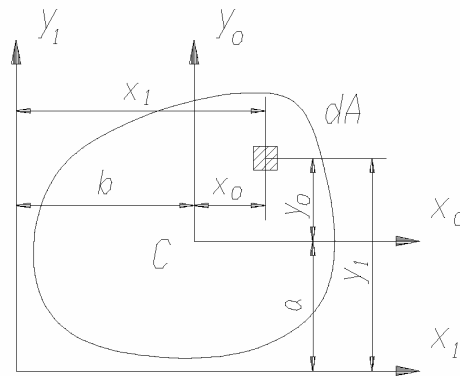


Рис.10

Итак, центробежный момент инерции относительно системы взаимно перпендикулярных осей, параллельных центральным, равен центробежному моменту инерции относительно этих центральных осей плюс произведение площади фигуры на координаты ее центра тяжести относительно новых осей.

Если оси  $x_0, y_0$  являются главными осями, то относительно этих осей  $J_{x_0 y_0} = 0$ , и формула (33) упрощается

$$J_{x_1 y_1} = a \cdot b \cdot A. \quad (34)$$

Для сложной фигуры, состоящей из  $n$  простых фигур,

$$J_{x_1 y_1} = \sum_1^n a_i b_i A_i \quad (35)$$

(при условии, что собственные центральные оси каждой фигуры являются главными осями).

**Пример 4.** Вычислить центробежный момент инерции уголка  $140 \times 90 \times 10$  относительно центральных осей  $x$  и  $y$  (рис.11).

*Решение.* Для определения центробежного момента инерции воспользуемся формулой (25), при этом за исходные оси примем главные центральные оси  $u$  и  $v$ , относительно которых центробежный момент инерции  $J_{uv}$  равен нулю.

Из таблиц сортамента определяем:

$$\begin{aligned} J_x &= 146 \text{ см}^4, \\ J_y &= 444 \text{ см}^4, \\ J_u &= 85,5 \text{ см}^4, \\ \operatorname{tg} \alpha &= 0,409. \end{aligned}$$

Зная  $\operatorname{tg} \alpha$ , находим угол  $\alpha = 22,24^\circ$ .

По формуле (26) вычисляем момент инерции относительно второй

главной центральной оси  $v$ :

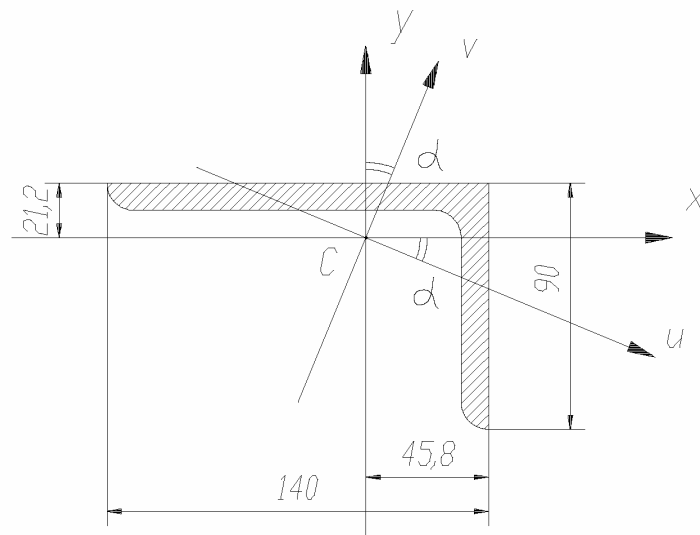


Рис.11

$$J_v = J_x + J_y - J_u = 146 + 444 - 85,5 = 504,5 \text{ см}^4.$$

По формуле (25):

$$J_{xy} = \frac{J_u - J_v}{2} \sin 2\alpha + J_{uv} \cos 2\alpha.$$

$$J_{xy} = \frac{85,5 - 504,5}{2} \sin(2 \cdot 22,24^\circ) = -146,8 \text{ см}^4.$$

**Пример 5.** Вычислить главные центральные моменты инерции и главные радиусы инерции сечения (рис.12).

*Решение.* Определяем координаты центра тяжести, для чего проводим вспомогательные оси  $x'$  и  $y'$  и разбиваем сечение на две фигуры: швеллер (I) и уголок (II), для которых все необходимые данные находим в таблицах сортамента.

Фигура	Площадь сечения, $A, \text{ см}^2$	Положение центра тяжести		Моменты инерции относительно собственных центральных осей, $\text{см}^4$	
		$x_o, \text{ см}$	$y_o, \text{ см}$	горизонтальной	вертикальной
Швеллер № 20а	25,2	2,28	–	1670	139
Уголок 140×90×10	22,2	4,58	2,12	146	444



Координаты центра тяжести сечения определяем по формулам:

$$x_c = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2};$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2},$$

где  $A_1$  – площадь первой фигуры (швеллера);

$A_2$  – площадь второй фигуры (уголка);

$x_1$  – расстояние от оси  $y'$  до центра тяжести швеллера;

$x_2$  – расстояние от оси  $y'$  до центра тяжести уголка;

$y_1$  – расстояние от оси  $x'$  до центра тяжести швеллера;

$y_2$  – расстояние от оси  $x'$  до центра тяжести уголка.

$$x_1 = 14 + 2,28 = 16,28 \text{ см},$$

$$x_2 = 14 - 4,58 = 9,42 \text{ см},$$

$$y_1 = 10 \text{ см},$$

$$y_2 = 20 - 2,12 = 17,88 \text{ см},$$

$$x_c = \frac{25,2 \cdot 16,28 + 22,2 \cdot 9,42}{25,2 + 22,2} = 13,07 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{25,2 \cdot 10 + 22,2 \cdot 17,88}{25,2 + 22,2} = 13,69 \text{ см}.$$

По этим данным наносим точку  $C$  — центр тяжести сечения и проводим вертикальную и горизонтальную центральные оси  $x_c$  и  $y_c$ .

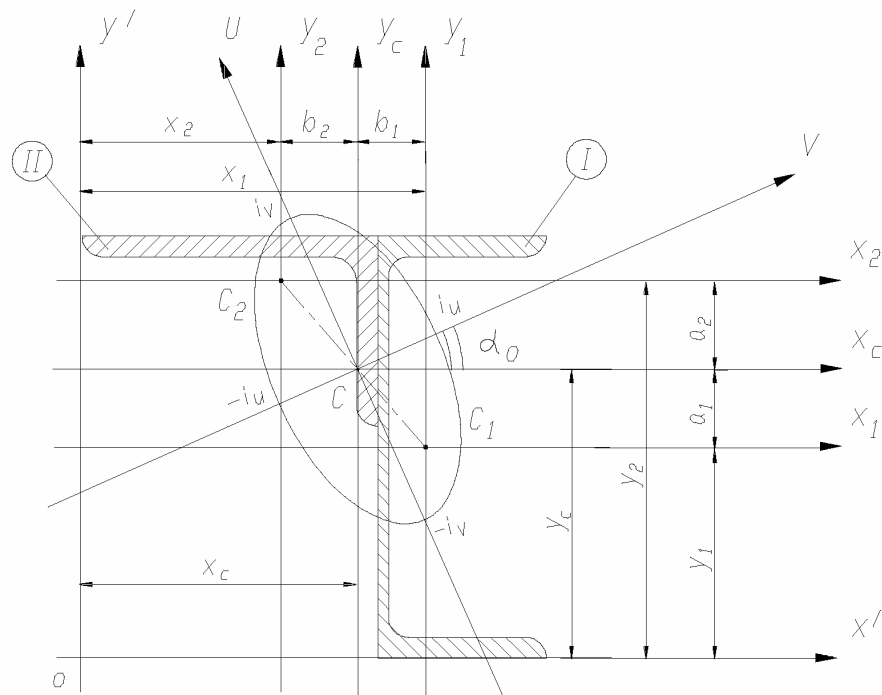


Рис.12

Вычисляем моменты инерции относительно этих осей:

$$J_{x_c} = J_{x_c}^I + J_{x_c}^{II},$$

$$J_{y_c} = J_{y_c}^I + J_{y_c}^{II}.$$

Для вычисления момента инерции швеллера  $J_{x_c}^I$  используем формулу (10):

$$J_{x_c}^I = 1670 + (-3,69)^2 \cdot 25,2 = 2013 \text{ см}^4,$$

где  $J_{x_1} = 1670 \text{ см}^4$  – момент инерции швеллера относительно собственной центральной оси  $x_1$ ;

$A_1 = 25,2 \text{ см}^2$  – площадь сечения швеллера;

$a_1 = 10 - 13,69 = -3,69 \text{ см}$  – координата центра тяжести швеллера по оси  $y_c$ .

Аналогично находим момент инерции уголка

$$J_{x_c}^{II} = 146 + (4,19)^2 \cdot 22,2 = 536 \text{ см}^4,$$

где  $J_{x_2} = 146 \text{ см}^4$  – момент инерции уголка относительно собственной центральной оси  $x_2$ ;

$A_2 = 22,2 \text{ см}^2$  – площадь сечения уголка;

$a_2 = 17,88 - 13,69 = 4,19 \text{ см}$  – координата центра тяжести уголка по оси  $y_c$ .

Суммарный момент инерции сечения относительно оси  $x_c$  равен

$$J_{x_c} = 2013 + 536 = 2549 \text{ см}^4.$$

Точно так же вычисляем момент инерции сечения относительно оси  $y_c$ .

Для швеллера

$$J_{y_c}^I = 139 + (3,21)^2 \cdot 25,2 = 399 \text{ см}^4,$$

где  $b_1 = 16,28 - 13,07 = 3,21 \text{ см}$  – координата центра тяжести швеллера по оси  $x_c$ .

Для уголка

$$J_{y_c}^{II} = 444 + (-3,65)^2 \cdot 22,2 = 740 \text{ см}^4,$$

где  $b_2 = 9,42 - 13,07 = -3,65 \text{ см}$  – координата центра тяжести уголка по оси  $x_c$ .

Суммарный момент инерции сечения относительно оси  $y_c$  равен

$$J_{y_c} = 399 + 740 = 1139 \text{ см}^4.$$

Вычисляем центробежный момент инерции сечения относительно осей  $x_c$  и  $y_c$ .

Для этого воспользуемся формулой (33). Так как швеллер имеет горизонтальную ось симметрии  $x_1$ , то собственные центральные оси швеллера  $x_1$  и  $y_1$  являются главными осями, и поэтому первое слагаемое в формуле (33) для швеллера равно нулю.

Для уголка собственные центральные оси, параллельные осям  $x_c$  и  $y_c$ , т.е. оси  $x_2$  и  $y_2$ , не являются главными осями, поэтому первое слагаемое в формуле (33) для уголка не равно нулю. Его следует вычислить так же, как это было

сделано в примере 4. Там было получено значение центробежного момента инерции такого же уголка относительно осей  $x$  и  $y$ , равное  $J_{xy} = -146,8 \text{ см}^4$ .

Следовательно, центробежный момент инерции всего сечения будет равен  $J_{x_c y_c} = [0 + (-3,69)(3,21) \cdot 25,2] + [-146,8 + (4,19)(-3,65) \cdot 22,2] = -785 \text{ см}^4$ .

Определяем положение главных центральных осей по формуле (28):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_o = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-785)}{2549 - 1139} = 1,113,$$

$$\alpha_o = 24,03^\circ.$$

Отложим этот угол (против часовой стрелки) и проведем главные центральные оси  $u$  и  $v$ . Если бы  $\alpha_o$  получился со знаком «минус», то главные центральные оси были бы повернуты относительно осей  $x_c$  и  $y_c$  по ходу часовой стрелки.

Вычисляем главные центральные моменты инерции по формуле (29)

$$J_{\frac{max}{min}} = \frac{2549 + 1139}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2549 - 1139)^2 + 4 \cdot (-785)^2} = 1844 \pm 1055.$$

Следовательно,

$$J_v = J_{max} = 2899 \text{ см}^4, \quad J_u = J_{min} = 789 \text{ см}^4.$$

Находим главные радиусы инерции по формулам (31):

$$i_v = i_{max} = \sqrt{\frac{2899}{47,4}} = 7,82 \text{ см}, \quad i_u = i_{min} = \sqrt{\frac{789}{47,4}} = 4,08 \text{ см}.$$

По найденным значениям радиусов инерции строим эллипс инерции (рис. 12).

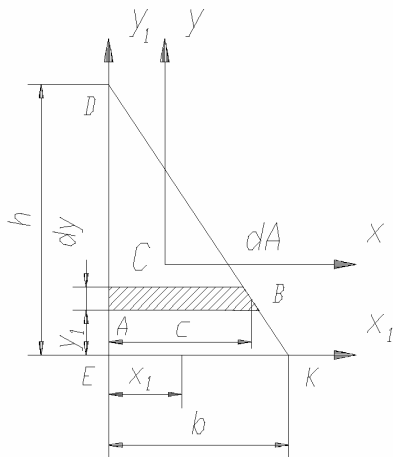


Рис. 13

**Пример 6.** Определить центробежный момент инерции прямоугольного треугольника относительно осей, совпадающих с его катетами (рис. 13).

*Решение.* Центробежный момент вычисляем по формуле

$$J_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA.$$

За элементарную площадь примем площадь полоски  $AB$

$$dA = c \cdot dy.$$

Абсцисса  $x_1$  центра тяжести полоски  $AB$  равна

$$x_1 = \frac{c}{2}.$$

Но из условия подобия треугольников  $DEK$  и  $DAB$  следует

$$c = \frac{b}{h}(h - y_1).$$

Таким образом,

$$J_{x_1y_1} = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h - y_1)^2 y_1 dy = \frac{b^2 h^2}{24}.$$

Для определения центрбежного момента инерции относительно центральных осей воспользуемся формулой (33)

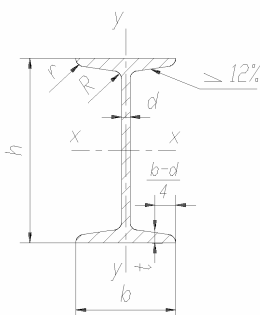
$$J_{xy} = J_{x_1y_1} - A \frac{h}{3} \cdot \frac{b}{3} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$

1. Степин П.А. Сопротивление материалов: Учеб. для немашиностроит. спец. вузов. 8-е изд. М.: Высш. шк., 1988. 367 с.: ил.
2. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. М.: Высш. шк., 1995. 560 с.: ил.
3. Сопротивление материалов / Под ред. акад. АН УССР Писаренко Г.С. 5-е изд. К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. 775 с.

### ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

#### СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

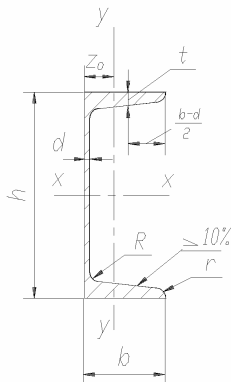


Балки двутавровые (по ГОСТ 8239 – 72)

Обозначения:

$h$  – высота балки;  
 $b$  – ширина полки;  
 $d$  – толщина стенки;  
 $t$  – средняя толщина полки;  
 $J$  – момент инерции;  
 $W$  – момент сопротивления;  
 $i$  – радиус инерции;  
 $S$  – статический момент полусечения.

№ профиля	Размеры, мм				Площадь сечения $A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	Масса 1 м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,0	13,0	71,4	18930	947	16,3	540	666	85,9	3,05	56,1
45	450	160	8,6	14,2	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12	65,2
50	500	170	9,5	15,2	97,8	39290	1570	20,0	905	1040	122	3,26	76,8
55	550	180	10,3	16,5	114	55150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44	89,8
60	600	190	11,1	17,8	132	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60	104
65	650	200	12,0	19,2	153	101400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77	120
70	700	210	13,0	20,8	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94	138
70a	700	210	15,0	24,0	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01	158
706	700	210	17,5	28,2	234	175370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09	184



### Швеллеры (по ГОСТ 8240 – 72)

Обозначения:

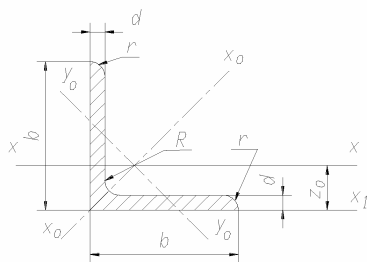
- $h$  – высота швеллера;
- $b$  – ширина полки;
- $d$  – толщина стенки;
- $t$  – средняя толщина полки;
- $z_0$  – расстояние от оси  $y$  до наружной грани стенки.
- $J$  – момент инерции;
- $W$  – момент сопротивления;
- $i$  – радиус инерции;
- $S$  – статический момент полусечения;

№ профиля	Размеры, мм				Площадь сечения $A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	$z_0, \text{см}$	Масса 1 м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$										
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

Уголки равнобокие (по ГОСТ 8509 – 72)

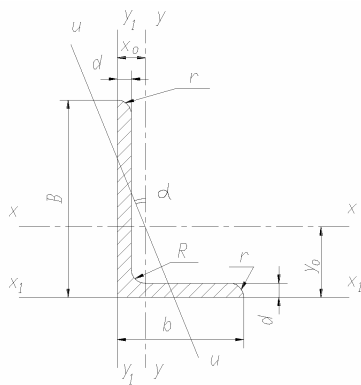
Обозначения:

- $b$  – ширина полки;
- $d$  – толщина полки;
- $J$  – момент инерции;
- $i$  – радиус инерции;
- $z_0$  – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки.



№ профиля	Размеры, мм		Площадь сечения $A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_0 \text{ макс.}}, \text{см}^4$	$i_{x_0 \text{ макс.}}, \text{см}$	$J_{y_0 \text{ мин.}}, \text{см}^4$	$i_{y_0 \text{ мин.}}, \text{см}$	$J_{x_1}, \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$	Масса 1 м, кг
	$b$	$d$										
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91
3,6	36	3	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	1,65
		4	2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	2,16
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26	2,73
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	3,05
		5	4,80	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	3,77
5,6	56	3,5	3,86	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50	3,03
		4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	3,44
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	3,90
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	4,81
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78	5,72
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	9,02
		9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	10,1
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	7,36
		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	8,51
		8	12,3	73,4	2,34	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	9,65

№ профиля	Размеры, мм		Площадь сечения <i>A</i> , см <sup>2</sup>	<i>J<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>x</sub></i> , см	<i>J<sub>x<sub>0</sub></sub></i> макс., см <sup>4</sup>	<i>i<sub>x<sub>0</sub></sub></i> макс., см	<i>J<sub>y<sub>0</sub></sub></i> мин., см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y<sub>0</sub></sub></i> мин, см	<i>J<sub>x<sub>1</sub></sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>z<sub>0</sub></i> , см	Масса I м, кг
	<i>b</i>	<i>d</i>										
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	8,33
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	9,64
		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51	10,9
		9	15,6	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55	12,2
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	10,1
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71	10,8
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75	12,2
		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83	15,1
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91	17,9
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99	20,6
		16	29,7	264	2,98	416	3,74	112,0	1,94	542	3,06	23,3
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96	11,9
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00	13,5
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	14753	7,31	111,4



### Углки неравнобокие (по ГОСТ 8510 – 72)

Обозначения:

- $B$  – ширина большей полки;
- $b$  – ширина меньшей полки;
- $d$  – толщина полки;
- $J$  – момент инерции;
- $i$  – радиус инерции;
- $x_0, y_0$  – расстояние от центра тяжести до наружных граней полоч.

№ профиля	Размеры, мм			Площадь сечения $A, \text{см}^2$	$J_{x_1}, \text{см}^4$	$i_{x_1}, \text{см}$	$J_{y_1}, \text{см}^4$	$i_{y_1}, \text{см}$	$J_u, \text{мин.}, \text{см}^4$	$i_u, \text{мин.}, \text{см}$	Угол наклона на оси $u, \text{tg } \alpha$	$J_{x_1}, \text{см}^4$	$J_{y_1}, \text{см}^4$	$x_0, \text{см}$	$y_0, \text{см}$	Масса 1 м, кг
	$B$	$b$	$d$													
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,392	1,56	0,43	0,42	0,86	0,91
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,382	3,26	0,82	0,49	1,08	1,17
			4	1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	0,35	0,43	0,374	4,38	1,12	0,53	1,12	1,52
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,385	6,37	1,58	0,59	1,32	1,48
			4	2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,381	8,53	2,15	0,63	1,37	1,94
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,43	1,32	0,79	0,79	0,61	0,382	9,02	2,20	0,64	1,47	1,68
			4	2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	1,02	0,60	0,379	12,1	2,98	0,68	1,51	2,20
5/3,2	50	32	3	2,42	6,17	1,60	1,99	0,91	1,18	0,70	0,403	12,4	3,26	0,72	1,60	1,90
			4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,401	16,6	4,42	0,76	1,65	2,49
5,6/3,6	56	36	3,5	3,16	10,1	1,79	3,30	1,02	1,95	0,79	0,407	20,3	5,43	0,82	1,80	2,48
			4	3,58	11,4	1,78	3,70	1,02	2,19	0,78	0,406	23,2	6,25	0,84	1,82	2,81
			5	4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,404	29,2	7,91	0,88	1,86	3,46
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,397	33,0	8,51	0,91	2,03	3,17
			5	4,98	19,9	2,00	6,26	1,12	3,73	0,86	0,396	41,4	10,8	0,95	2,08	3,91
			6	5,90	23,3	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,393	49,9	13,1	0,99	2,12	4,63
			8	7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	0,386	66,9	17,9	1,07	2,20	6,03
7/4,5	70	45	4,5	5,07	25,3	2,23	8,25	1,28	4,88	0,98	0,407	51,0	13,6	1,03	2,25	3,98
			5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	0,406	56,7	15,2	1,05	2,28	4,39
7,5/5	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	69,7	20,8	1,17	2,39	4,79
			6	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	0,435	83,9	25,2	1,21	2,44	5,69
			8	9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	10,9	1,07	0,430	112	34,2	1,29	2,52	7,43
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	7,58	1,09	0,387	84,6	20,8	1,13	2,60	4,99
			6	7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	8,88	1,08	0,386	102	25,2	1,17	2,65	5,92
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	0,384	132	32,2	1,26	2,92	6,17
			6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	145	35,2	1,28	2,95	6,70
			8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	0,380	194	47,8	1,36	3,04	8,77
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	3,20	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	198	49,9	1,42	3,23	7,53
			7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	232	58,7	1,46	3,28	8,70
			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	266	67,6	1,50	3,32	9,78
			10	15,5	154	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	0,387	333	85,8	1,58	3,40	12,1
11/7	110	70	6,5	11,4	142	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	0,402	286	74,3	1,58	3,55	8,98
			7	12,3	152	3,52	48,7	1,99	28,8	1,53	0,402	309	80,3	1,60	3,57	9,64
			8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,400	353	92,3	1,64	3,61	10,9
12,5/8	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	452	119	1,80	4,01	11,0
			8	16,0	256	4,00	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	518	137	1,84	4,05	12,5
			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	649	173	1,92	4,14	15,5
			12	23,4	365	3,95	117	2,24	69,5	1,72	0,400	781	210	2,00	4,22	18,3



№ профиля	Размеры, мм			Площадь сечения $A, \text{см}^2$	$J_x,$ $\text{см}^4$	$i_x,$ $\text{см}$	$J_y,$ $\text{см}^4$	$i_y,$ $\text{см}$	$J_n$ $\text{мин.},$ $\text{см}^4$	$i_n$ $\text{мин.},$ $\text{см}$	Угол накло на оси $u, \text{tg } \alpha$	$J_{x_I},$ $\text{см}^4$	$J_{y_I},$ $\text{см}^4$	$x_o,$ $\text{см}$	$y_o,$ $\text{см}$	Масса $1 \text{ м, кг}$
	$B$	$b$	$d$													
14/9	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	727	204	2,03	4,49	14,1
			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	911	245	2,12	4,58	17,5
16/10	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	1221	300	2,23	5,19	18,0
			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	1359	335	2,28	5,23	19,8
			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	1634	405	2,36	5,32	23,6
			14	34,7	897	5,08	272	2,80	162	2,16	0,385	1910	477	2,43	5,40	27,3
18/11	180	110	10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,375	1933	444	2,44	5,88	22,2
			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	2324	537	2,52	5,97	26,4
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	2920	718	2,79	6,50	27,4
			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	3189	786	2,83	6,54	29,7
			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,390	3726	922	2,91	6,62	34,4
			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	4264	1061	2,99	6,71	39,1
25/16	250	160	12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	0,410	6212	1634	3,53	7,97	37,9
			16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,50	0,408	8308	2200	3,69	8,14	49,9
			18	71,1	4545	7,99	1475	4,56	896	3,49	0,407	9358	2487	3,77	8,23	55,8
			20	78,5	4987	7,97	1613	4,53	949	3,48	0,405	10410	2776	3,85	8,31	61,7

Приложение 2

### Коэффициенты уменьшения основного допускаемого напряжения при расчете на устойчивость

Гибкость, $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}}$	Коэффициенты $\phi$				Гибкость, $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}}$	Коэффициенты $\phi$			
	Ст. 2 Ст. 3 Ст. 4	Ст. 5	Чугун	Дерево		Ст. 2 Ст. 3 Ст. 4	Ст. 5	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	110	0,52	0,43	–	0,25
10	0,99	0,98	0,97	0,99	120	0,45	0,36	–	0,22
20	0,96	0,95	0,91	0,97	130	0,40	0,33	–	0,18
30	0,94	0,92	0,81	0,93	140	0,36	0,29	–	0,16
40	0,92	0,89	0,69	0,87	150	0,32	0,26	–	0,14
50	0,89	0,86	0,57	0,80	160	0,29	0,24	–	0,12
60	0,86	0,82	0,44	0,71	170	0,26	0,21	–	0,11
70	0,81	0,76	0,34	0,60	180	0,23	0,19	–	0,10
80	0,75	0,70	0,26	0,48	190	0,21	0,17	–	0,09
90	0,69	0,62	0,20	0,38	200	0,19	0,16	–	0,08
100	0,60	0,51	0,16	0,31					