

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
АНАЛИЗ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ**  
Методические указания к решению задач

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ.	
ЭПЮРЫ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ .....	5
2. КРУЧЕНИЕ.	
ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ .....	10
3. ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ.	
ЭПЮРЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ .....	14
ЛИТЕРАТУРА .....	26

## ВВЕДЕНИЕ

У студентов, изучающих курс «Сопротивления материалов», наибольшие трудности обычно возникают при решении задач. Данные методические указания облегчат процесс изучения данного курса, помогут овладеть методикой решения некоторых задач и получить необходимый навык в их решении.

Определение внутренних силовых факторов при любом характере нагружения одна из первых и основополагающих задач. Однако этот вопрос в учебной литературе освещен не достаточно подробно [1÷5].

В предлагаемых методических указаниях приведены примеры определения внутренних силовых факторов в стержневых системах. Подробно описаны способы применения метода сечений для определения внутренних силовых факторов. Знакомство студентов с настоящими указаниями существенно упростит выполнение расчетно-проектировочных работ.

# 1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ. ЭПЮРЫ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

**Равнодействующая нормальных сил упругости в поперечном сечении называется продольной силой.** Продольные силы, как и другие внутренние силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты), определяются методом сечений.

Учитывая особую важность метода сечений для всего курса сопротивления материалов, ещё раз повторим содержание четырех основных этапов метода сечений:

1. мысленно рассекают тело плоскостью в том месте, где нужно определить внутренние силы;
2. отбрасывают одну из частей тела;
3. заменяют действие отброшенной части на оставленную внутренними силами;
4. составляют уравнение равновесия для сил, действующих на оставленную часть тела, решая эти уравнения, находят главный вектор и главный момент внутренних сил, возникающих в рассматриваемом сечении.

**Правило знаков:** продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение, и отрицательной, если вызывает сжатие.

**Общая формула** для вычисления продольной силы в произвольном поперечном сечении стержня, имеет следующий вид:

$$N = \sum P + \sum \int q_x dx .$$

Интегрирование производится по длине каждого участка, на который действует распределенная сила, а суммирование – по всем участкам, расположенным по одну сторону от сечения.

Рассмотрим примеры решения типовых задач, включенных в расчетно-проектировочную работу № 1 «Анализ внутренних силовых факторов».

**Задача 1.** Стержень (рис. 1а) нагружен сосредоточенными силами  $P_1=2P$ ,  $P_2=4P$  и  $P_3=5P$ , приложенными в точках А, В, С и направленными вдоль оси Z. Построить эпюру продольных сил.

**Решение.** Механическое действие заделки на данную стержневую систему заменяют реакцией  $R_D$ , приложенной в точке Д (рис. 1а). Для определения реакции  $R_D$  записывают уравнение равновесия стержня:

$\sum Z = 0$ , сумма проекций всех сил на ось Z равна нулю.

$$-R_D + P_3 - P_2 + P_1 = 0, R_D = P_3 - P_2 + P_1 = 5P - 4P + 2P = 3P .$$

Для определения внутренних усилий в поперечных сечениях стержня применяем метод сечений. Разбиваем стержень на участки. Границами участков служат точки приложения внешних сил и места изменения размеров поперечного сечения. Длина участка есть расстояние между точками приложения двух соседних продольных сил или свободным торцом стержня и точкой приложения ближайшей силы. Показанный на рис. 1а стержень состоит из четырех участков. Первый участок имеет длину  $L_1$ , второй  $L_2$  и т. д.

Рассечем первый участок поперечным сечением 1-1 на две части, левую и правую и изобразим их отдельно, указав продольные силу  $N_1$ , направленную от сечения (рис. 1б, в). Продольная сила есть результат действия одной части стержня на другую. Условимся и в дальнейшем неизвестную продольную силу направлять от сечения (растягивающая сила). Если продольная сила имеет знак плюс, то участок стержня подвержен растяжению, а если – минус, то сжатию.

Запишем уравнения равновесия правой и левой частей стержня:

$$\sum Z = 0, \quad -N_1 = 0, \quad -R_{\text{д}} + P_3 - P_2 + P_1 + N_1 = 0,$$

$$N_1 = R_{\text{д}} - P_3 + P_2 - P_1 = 3P - 5P + 4P - 2P = 0.$$

откуда видим, что величина найденной продольной силы не зависит от того, равновесие какой из отсеченных частей рассматривалось. Как и следовало ожидать, найденная сила будет одинаковой как при рассмотрении равновесия правой части стержня, так и левой и в данном примере равна нулю.

Проведя сечение 2-2, сможем определить внутреннюю продольную силу на втором участке  $N_2$ .

Для правой части:  $-N_2 + P_1 = 0, \quad N_2 = P_1 = 2P.$

Для левой части:  $-R_{\text{д}} + P_3 - P_2 + N_2 = 0$ , откуда

$$N_2 = R_{\text{д}} - P_3 + P_2 = 3P - 5P + 4P = 2P.$$

Так как нормальная сила в сечении не зависит от того – рассматривают равновесие левой или правой части стержня, то обычно для уменьшения объема вычислений рассматривают ту часть стержня, на которую меньше действует внешних сил и при этом все силы известны. Проведя поперечное сечение 3-3 и 4-4 можно определить  $N_3$  и  $N_4$ . При этом нет необходимости изображать отдельно отсеченную часть стержня. Ее можно видеть на рис. 1а, мысленно указав в сечении нормальную силу. Так для сечения 3-3 для правой части имеем:

$$-N_3 - P_2 + P_1 = 0, \quad N_3 = -P_2 + P_1 = -4P + 2P = -2P.$$

для сечения 4-4 левой части, получим:

$$-R_{\text{д}} + N_4 = 0, \quad N_4 = R_{\text{д}} = 3P.$$

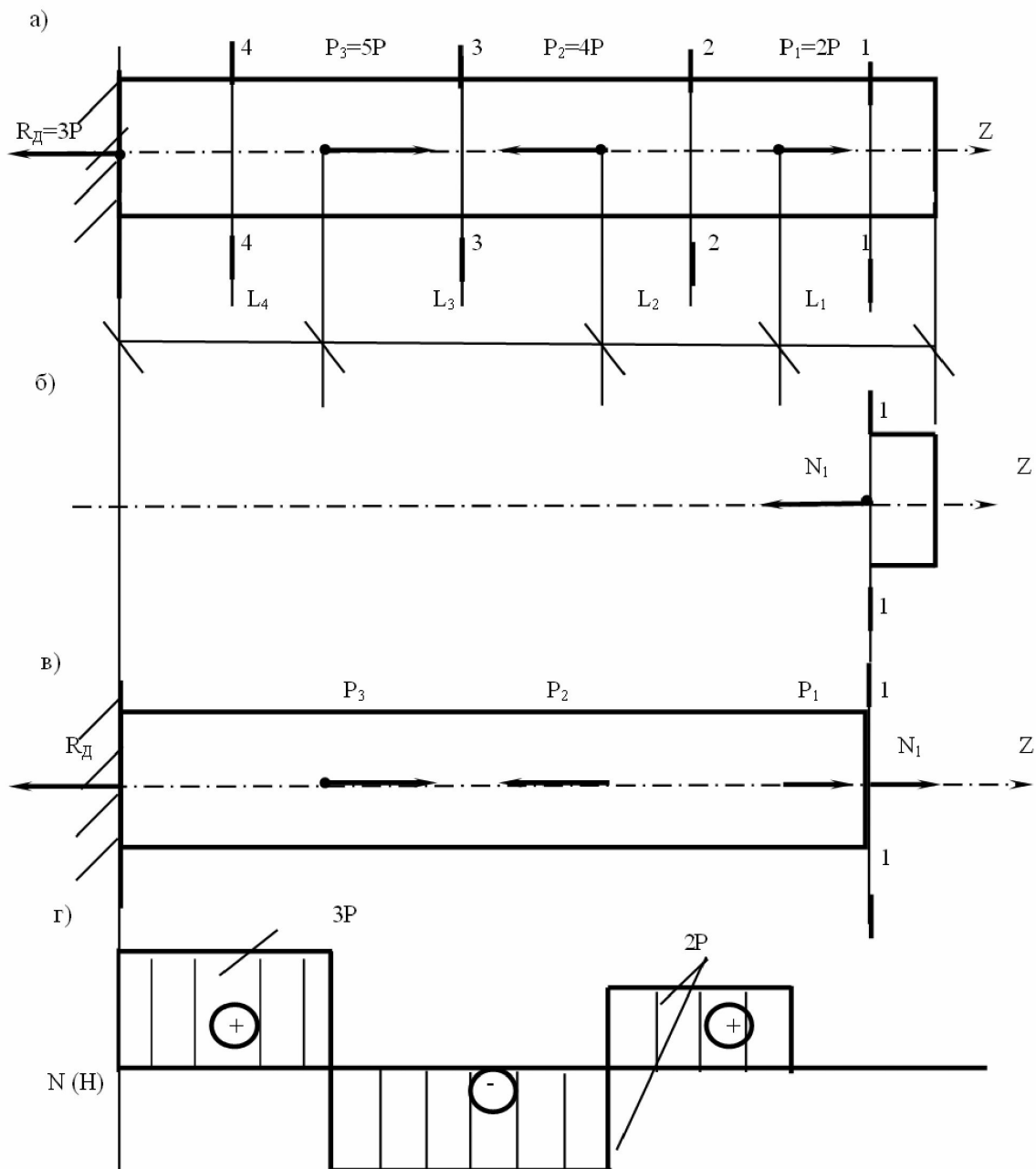


Рис. 1.

Рассматривая полученные выражения нормальных сил, например

$$N_2 = P_1 \text{ и } N_2 = R_d - P_3 + P_2,$$

можно сформулировать правило определения продольной силы в любом поперечном сечении стержня.

Продольная сила в поперечном сечении численно равна сумме проекций всех внешних сил на продольную ось стержня, в том числе и реакций опор,

расположенных по одну сторону от сечения. При этом сила направленная от сечения берется со знаком плюс, к сечению – со знаком минус.

По полученным значениям продольных сил строят график их изменения вдоль оси стержня. Так как продольная сила  $N$  постоянна по длине участка, то графиком будут линии параллельные оси абсцисс. Затем проводят ординаты и указывают их значения (рис. 1г), после этого ставят знак и дают штриховку, которая показывает откладываемые ординаты. **График изменения продольной силы по длине участка называют эпюрой продольных или нормальных сил (рис. 1г).**

По эпюре продольных сил производят проверку правильности решения задачи: в сечениях, где приложены сосредоточенные силы, на эпюре  $N$  имеются скачки на величины равные этим силам. Так в сечении  $A$  на эпюре имеется скачек на величину  $2P$ , равную силе  $P_1$ , а в сечении  $B$  скачек равен  $2P+2P=4P$ , равный силе  $P_2$  и в сечении  $C$  скачек равен  $3P+2P=5P$ , равный силе  $P_3$ .

Рассмотрим следующий пример, когда внешняя нагрузка представлена как сосредоточенными силами, так и распределенной нагрузкой.

**Задача 2.** Стержень (рис. 2а) нагружен сосредоточенными силами  $P_1=2P$ ,  $P_2=3P$ ,  $P_3=4P$ , приложенными в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  и распределенной по длине  $L_2=3L$  и  $L_3=4L$  нагрузкой  $q=2P/L$ . Все силы направлены вдоль оси  $Z$ . Построить эпюру продольных сил.

**Решение.** Применяем метод сечений для определения внутренних силовых факторов. Разобьем стержень на участки. Имеем три участка с длинами  $L_1, L_2, L_3$ . Проведя сечение 1-1, находим, что:

$$N_1=P_1=2P.$$

Проведем сечение 2-2 и его положение определим абсциссой  $L_1 \leq Z \leq L_1 + L_2$ . На этом участке действует как сосредоточенная сила, так и равномерно распределенная нагрузка, которая линейно зависит от длины участка. Продольная сила тогда запишется следующим выражением:

$$N_2 = P_1 + P_2 - q(Z - L_1).$$

Графиком продольной силы будет прямая линия, направленная под углом к оси  $Z$ . Наклонную прямую строим по двум точкам: определяем  $N_2$  при  $Z = L_1$  (начало участка) и при  $Z = L_1 + L_2$  (конец участка).

$$N_2 = P_1 + P_2 - q(L_1 - L_1) = P_1 + P_2 = 2P + 3P = 5P.$$

$$N_2 = P_1 + P_2 - q(L_1 + L_2 - L_1) = 2P + 3P - (2P/L) 3L = -P.$$

Аналогично найдем  $N_3$ , проведя сечение 3-3. Для третьего участка длиной  $L_3$ , абсцисса изменяется  $L_1 + L_2 \leq Z \leq L_1 + L_2 + L_3$ . Тогда продольную силу определим по формуле:

$$N_3 = P_1 + P_2 - q(Z - L_1) - P_3.$$

При  $Z = 5L$

$$N_3 = P_1 + P_2 - q(5L - L_1) - P_3 = 2P + 3P - \frac{2P}{L}(5L - 2L) - 4P = -5P.$$

При  $Z = 9L$

$$N_3 = 2P + 3P - \frac{2P}{L}(9L - 2L) - 4P = -13P.$$

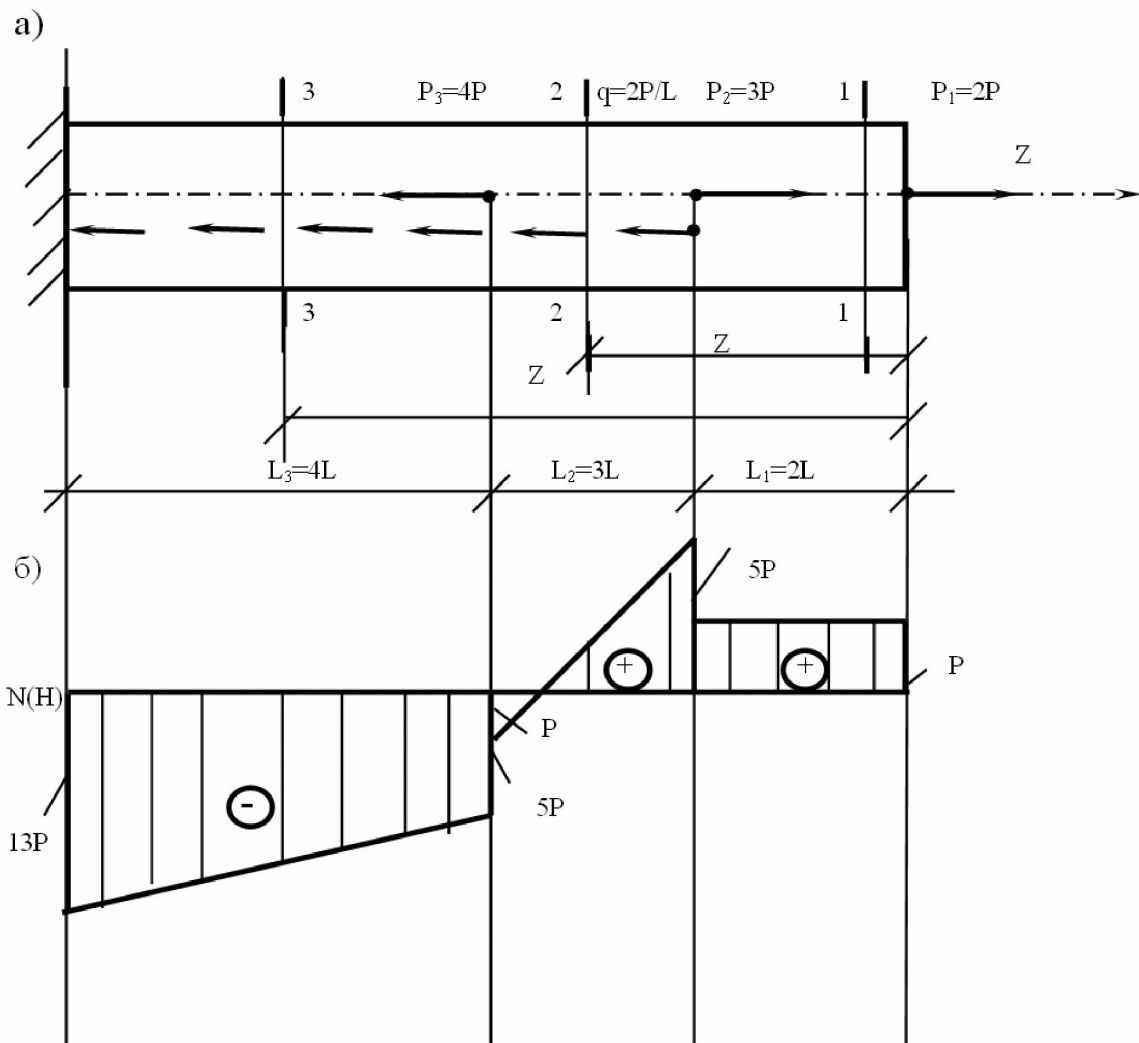


Рис. 2.

По найденным значениям  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  построена эпюра продольных сил (рис. 2б).

**Проверка.** В сечениях, где приложены сосредоточенные силы, на эпюре  $N$  имеются скачки. Так в сечении В на эпюре имеется скачок на величину  $5P - 2P = 3P$ , равную силе  $P_2$ , а в сечении С по модулю скачок равен  $4P$ , равный силе  $P_3$ .

## 2. КРУЧЕНИЕ. ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

Деформация кручения наиболее распространена в валах. Если нагрузка на прямолинейный стержень (вал) состоит только из моментов, плоскости которых перпендикулярны к оси стержня, то в любом сечении вала возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент. Правило знаков: крутящий внешний момент считается положительным, если он направлен против часовой стрелки. Для построения эпюры крутящих моментов так же пользуемся методом сечений. Внутренний момент  $M_{кр}$  выражается через внешние моменты и в сечении он равен алгебраической сумме внешних моментов расположенных по одну сторону от сечения. Рассмотрим конкретный пример.

**Задача 3.** Стержень (вал) нагружен в точках А, В, С внешними моментами сил относительно оси  $Z$ ;  $m_1=2m$ ,  $m_2=3m$ ,  $m_3=5m$ , расположенными в плоскостях перпендикулярных продольной оси  $Z$  (рис. 3а). Построить эпюру крутящих моментов.

**Решение.** Вал разбиваем на участки, границами которых служат точки приложения внешних сосредоточенных моментов. Выбираем начало координат в крайней правой точке вала. Рассмотрим первый участок, где  $0 \leq Z \leq L_1$ . Проведя произвольное сечение I-I, получаем выражение для внутреннего крутящего момента:

$$M_{кр1} = m_1 = 2m .$$

Для сечения 2-2, участок II, соответственно будем иметь:

$$M_{кр2} = m_1 - m_2 + m_3 = 2m - 3m + 5m = 4m .$$

Для сечения 3-3, участок III:

$$M_{кр3} = m_1 - m_2 + m_3 = 4m .$$



График изменения крутящего момента по длине вала называется эюрой крутящих моментов. По полученным данным строим эюру  $M_k$  (рис. 3б).

**Проверка.** Так же, как и при растяжении, сжатии, при кручении на эюре имеются скачки. Так для сечения В на эюре имеется скачек на величину  $m+2m=3m$ , равный моменту  $m_2$ , а для сечения С скачек  $5m$  равен моменту  $m_3$ .

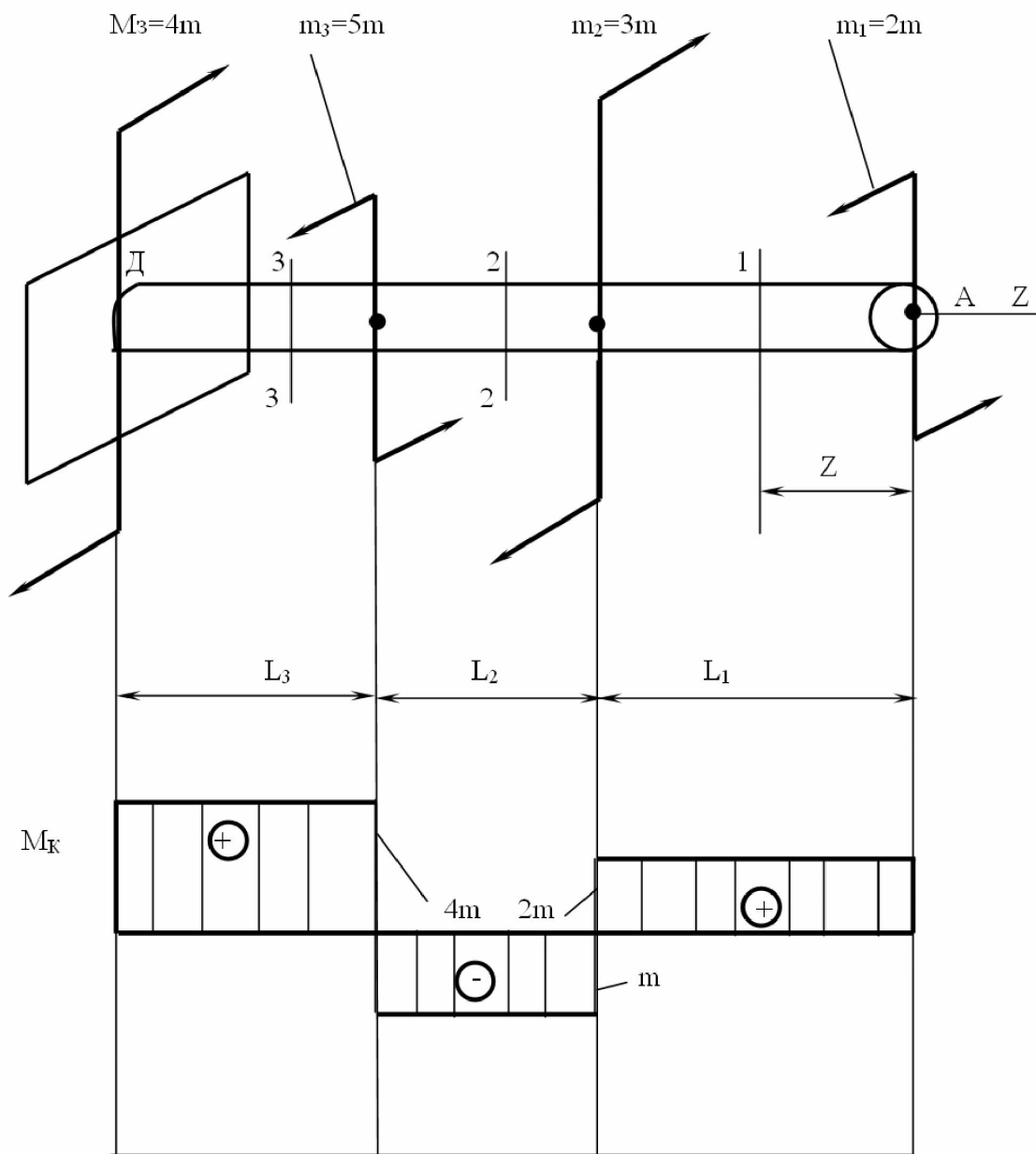


Рис. 3.

Построение эпюр крутящих моментов при действии распределенной нагрузки рассмотрим в задаче 4.

**Задача 4.** Стержень (вал) нагружен в точках А, В и С внешними моментами  $m_1=2m$ ,  $m_2=4m$ ,  $m_3=6m$  и распределенными по длине  $L_1=L$  и  $L_3=3L$  моментами интенсивностью  $q=m/L$ . Все моменты расположены в плоскостях перпендикулярных продольной оси  $Z$  стержня (рис. 4а). Построить эпюру крутящихся моментов.

**Решение.** Решение ведем по аналогии с задачей № 3. Разбиваем вал на участки и помещаем начало координат на крайнем правом конце вала.

Рассмотрим первый участок,  $0 \leq Z \leq L_1$ . В сечении 1-1 крутящийся момент

$$M_{k1} = m_1 = 2m.$$

Внутренний крутящийся момент не зависит от абсциссы  $Z$  и есть величина постоянная по длине всего участка I.

На втором участке наряду с сосредоточенными моментами действует равномерно распределенная моментная нагрузка. В сечении 2-2, участок II, где

$$L_1 \leq Z \leq L_1 + L_2,$$

$$M_{k2} = m_1 - m_2 + q(Z - L_1) = 2m - 4m + \frac{m}{L} \cdot (Z - 2L),$$

$$\text{при } Z = L_1 = 2L, \text{ момент } M_{k2} = -2m,$$

$$\text{при } Z = L_1 + L_2 = 3L, \text{ момент } M_{k2} = -m.$$

В сечении 3-3, участок III, где

$$L_1 + L_2 \leq Z \leq L_1 + L_2 + L_3,$$

$$M_{k3} = m_1 - m_2 + q(Z - L_1) + m_3 = 2m - 4m + \frac{m}{L}(Z - 2L) + 6m = 4m + \frac{m}{L}(Z - 2L),$$

$$\text{при } Z = L_1 + L_2 = 3L, \text{ момент } M_{k3} = 4m + \frac{m}{L}(3L - 2L) = 5m,$$

$$\text{при } Z = L_1 + L_2 + L_3 = 6L, \text{ момент } M_{k3} = 4m + \frac{m}{L}(6L - 2L) = 8m.$$

Эпюра внутренних крутящихся моментов  $M_k$  представлена на рис. 4б. По эпюре проводится проверка правильности решения аналогично задаче 3. В точках приложения сосредоточенных моментов на эпюре моментов скачки равные по величине модулю приложенного внешнего момента.

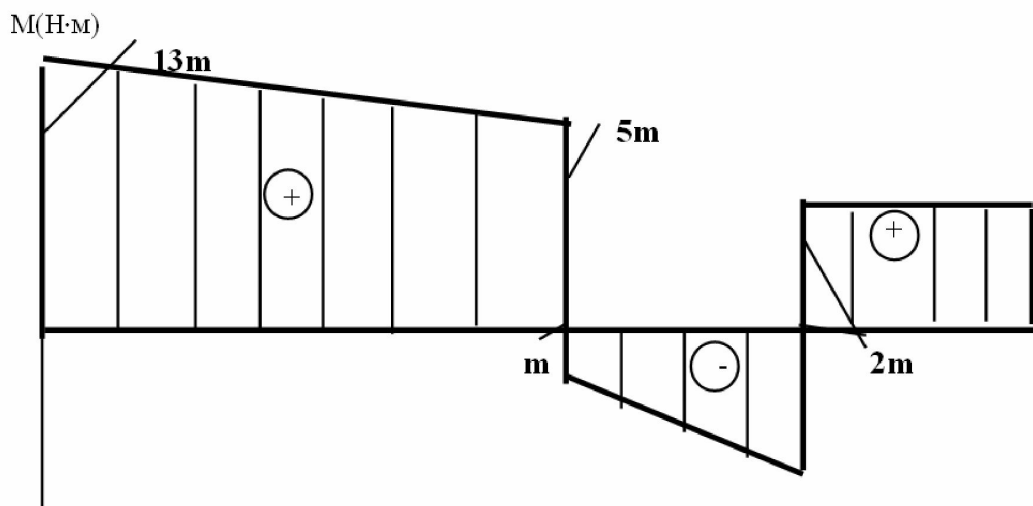
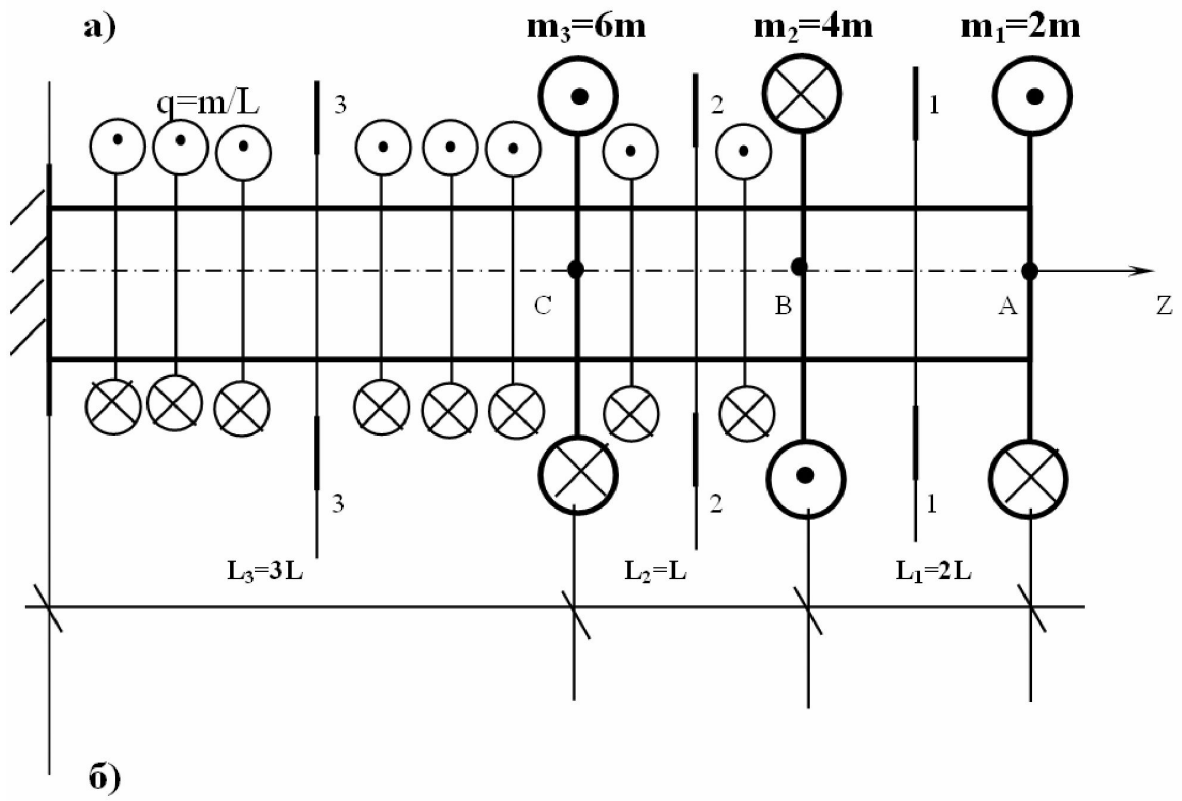


Рис. 4.

### 3. ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ. ЭПЮРЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Прямолинейные стержни, работающие на изгиб, называют балками. Вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникают поперечные силы и изгибающие моменты и плоскость их действия совпадает с одной из главных плоскостей бруса, называют прямым поперечным изгибом. В случае чистого изгиба в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – изгибающий момент. Для того чтобы правильно уметь рассчитывать стержни на изгиб, необходимо научиться определять законы изменения внутренних силовых факторов, научиться строить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. При определении неизвестных внутренних усилий пользуются основным методом – методом сечений. Повторим некоторые основные правила построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов (по характерным точкам). Некоторые из правил являются следствием из дифференциальных зависимостей между  $q$  (распределенной нагрузкой),  $Q_y$  (поперечной силой),  $M_x$  (изгибающим моментом), другие вытекают непосредственно из метода сечений.

1. Поперечная сила  $Q_y$  в произвольном поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных к его отсеченной части.
2. Изгибающий момент  $M_x$  в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных к отсеченной части, относительно той точки продольной оси бруса, через которую проходит рассматриваемое сечение.
3. Если на некотором участке балки отсутствует распределенная нагрузка (рис. 5а), то эпюра  $Q$  представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс (базисной линии),  $Q_y = \text{const}$ , если  $q = 0$  – это вытекает из дифференциальной зависимости  $q = \frac{dQ}{dz}$  (рис. 5б). Эпюра моментов на этом участке есть наклонная прямая, что следует из дифференциальной зависимости  $Q_y = \frac{dM}{dz}$  (рис. 5в). Если на некотором участке балки имеется равномерно распределенная нагрузка, т.е.  $q \neq 0$ , то эпюра  $Q_y$  – наклонная прямая, а эпюра  $M_x$  – парабола, выпуклостью на-

правленная вверх, навстречу распределенной нагрузке, если  $q$  направлена вниз. Для студентов строительных специальностей эпюра  $M_x$  – парабола, выпуклостью направленная вниз, в сторону действия нагрузки, если  $q$  направлена вниз (рис. 6).

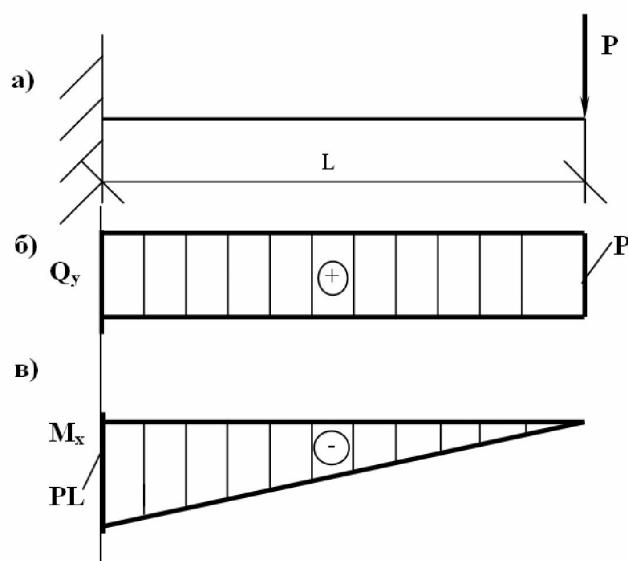


Рис. 5.

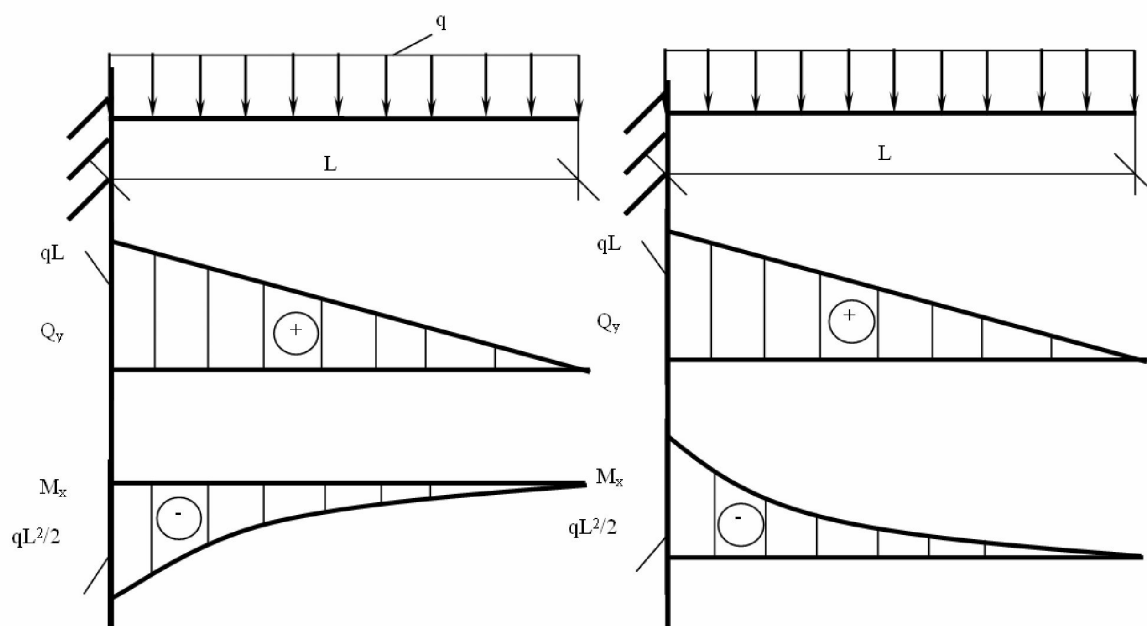


Рис. 6.

4. Если поперечная сила, изменяясь по линейному закону, проходит через нулевое значение, то в соответствующем сечении изгибающий

момент имеет экстремальное значение (минимальное или максимальное).

5. В точке приложения сосредоточенной силы на эпюре поперечных сил имеем скачок равный величине приложенной силы, на эпюре моментов в этом сечении будем иметь излом (резкое изменение угла наклона), направленный в сторону действия силы, для студентов механических специальностей и излом навстречу силе, для студентов строительных специальностей.
6. В точке приложения сосредоточенного момента (пары сил) на эпюре изгибающих моментов имеем скачок равный величине приложенного момента, на эпюре поперечных сил это не отражается.
7. В сечении на свободном или шарнирно опертом конце балки изгибающий момент равен нулю, если там не приложен сосредоточенный момент.
8. В сечении, совпадающем с заделкой,  $Q_y$  и  $M_x$  численно равны соответственно опорной реакции и реактивному моменту.
9. Правило знаков: поперечные силы считаются положительными, если они стремятся повернуть элемент по часовой стрелке (рис. 7а), изгибающий момент считается положительным, если элемент балки изгибается выпуклостью вниз (рис. 7б).

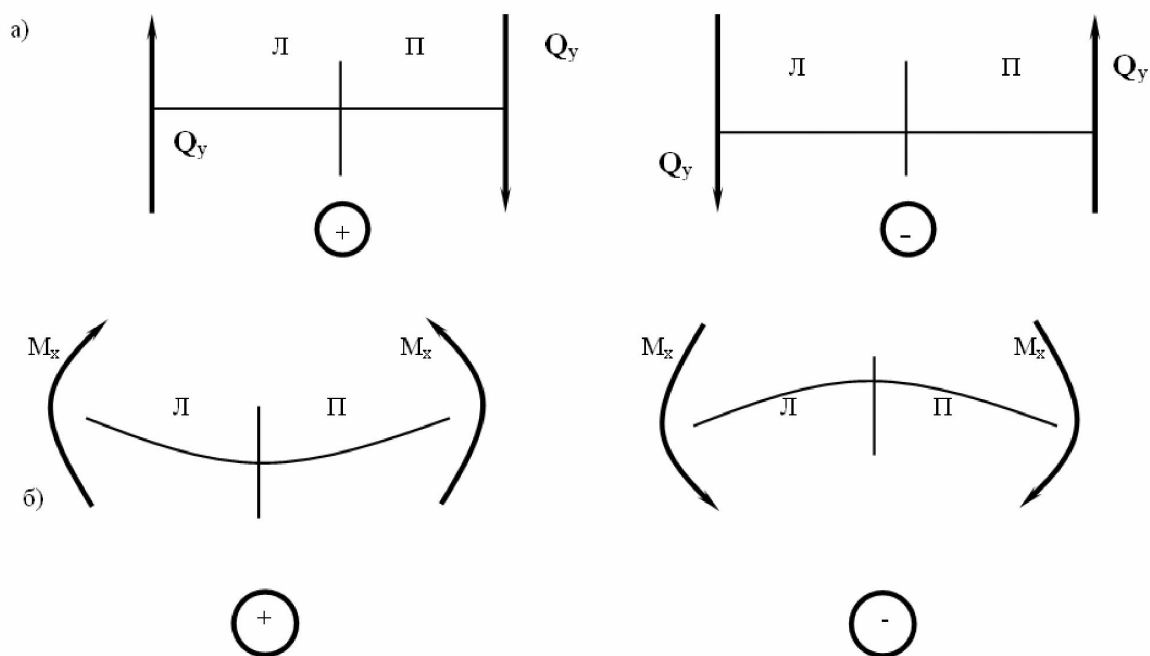


Рис. 7.

Рассмотрим конкретные примеры определения внутренних силовых факторов при поперечном изгибе и построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

**Задача 5.** Для расчетной схемы двухопорной балки (рис. 5а), нагруженной сосредоточенной силой  $P=126$  кН, сосредоточенным моментом  $m=78$  кНм и распределенной нагрузкой  $q=24$  кН/м. построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

**Решение.** Допустим, что балка прямоугольного поперечного сечения (рис. 5б). Внешние силы перпендикулярны продольной оси балки (ось  $Z$ ) и расположены в плоскости, совпадающей с главной осью сечения  $Y$ , в этой же плоскости расположен и сосредоточенный момент  $m$ . Под действием этих сил балка испытывает прямой поперечный изгиб. Решение задачи разобьем на несколько этапов.

**Этап 1.** Определение реакций опор.

Если расчетная схема задана двухопорной балкой, сначала необходимо определить реакции опор. Для этого указываем на расчетной схеме предполагаемое направление реакций  $R_A$  и  $R_B$ , действующих в опорах А и В (рис. 5а). Составляем два уравнения равновесия так, чтобы можно было найти реакции независимо друг от друга. Такими уравнениями являются уравнения выражающие сумму моментов относительно шарниров А и В. Согласно правилу 8 имеем:

$$\sum M_B = 0, R_A \cdot 10 - q \cdot 8 \cdot 5 - m - P \cdot 2 = 0,$$

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 10 - q \cdot 8 \cdot 5 - m - P \cdot 8 = 0.$$

Из этих уравнений находим искомые реакции:

$$R_A = 129 \text{ кН и } R_B = 189 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности решения составляют третье уравнение равновесия – сумма проекций всех сил на ось  $Y$  равна нулю:

$$\sum Y = 0, R_A + R_B - q \cdot 8 - P = 0,$$

$$129 + 189 - 24 \cdot 8 - 126 = 0.$$

Реакции определены правильно. Знак плюс у реакций  $R_A$  и  $R_B$  указывает на то, что их направление совпадает с предполагаемым.

**Этап 2.** Составление выражений для  $Q(z)$  и  $M(z)$ .

Разбиваем балку на участки (рис 5а). Границами участков служат точки приложения нагрузки (Д, Е), точки начала и окончания действия распределен-

ной нагрузки  $q$  (L, K). Таким образом, балка имеет 5 участков. Это участки I (AL), II (LD), III (DE), IV (EK) и V (KB).

Для составления выражений  $Q(z)$  и  $M(z)$  применяем метод сечений. В пределах каждого участка мысленно проводим в произвольном месте по одному сечению. Так для первого участка это сечение 1-1, для второго 2-2 и т.д. Далее рассматриваем равновесие левой отсеченной части балки длиной  $Z$  и началом координат на левой опоре (рис. 5д). Записываем аналитические выражения для внутренних силовых факторов для каждого участка. Заносим эти данные в таблицу № 1.

Таблица № 1.

№ уч-ка	Изменение абсциссы, м	$Q(Z)$ , кН	$M(Z)$ , кН·м
I	$0 \leq Z \leq 1$ при $Z = 0$ при $Z = 1$	$Q_1 = R_A$ $Q_1 = 129$ $Q_1 = 129$	$M_1 = R_A \cdot Z$ $M_1 = 0$ $M_1 = 129$
II	$1 \leq Z \leq 6$ при $Z = 1$ при $Z = 6$	$Q_2 = R_A - q(Z - 1)$ $Q_2 = 129$ $Q_2 = 9$	$M_2 = R_A \cdot Z - q \frac{(Z - 1)^2}{2}$ $M_2 = 129$ $M_2 = 474$
III	$6 \leq Z \leq 8$ при $Z = 6$ при $Z = 8$	$Q_3 = R_A - q(Z - 1)$ $Q_3 = 9$ $Q_3 = -39$	$M_3 = R_A \cdot Z - q \frac{(Z - 1)^2}{2} - m$ $M_3 = 396$ $M_3 = 366$
IV	$8 \leq Z \leq 9$ при $Z = 8$ при $Z = 9$	$Q_4 = R_A - q(Z - 1) - P$ $Q_4 = -165$ $Q_4 = -189$	$M_4 = R_A \cdot Z - q \frac{(Z - 1)^2}{2} - m - P(Z - 8)$ $M_4 = 366$ $M_4 = 189$
V	$9 \leq Z \leq 10$ при $Z = 9$ при $Z = 10$	$Q_5 = R_A - 8q - P$ $Q_5 = -189$ $Q_5 = -189$	$M_5 = R_A \cdot Z - q(Z - 5) - m - P(Z - 8)$ $M_5 = 189$ $M_5 = 0$

В этой таблице в первой вертикальной колонке занесены номера участков балки (рис. 5а). Во второй колонке указаны промежутки изменения абсциссы  $Z$  для каждого участка. Начало координат для каждого участка принято в точке А. В третьей и четвертой колонках приведены выражения  $Q$  и  $M$  для каждого участка балки и их числовые значения при соответствующих  $Z$ .



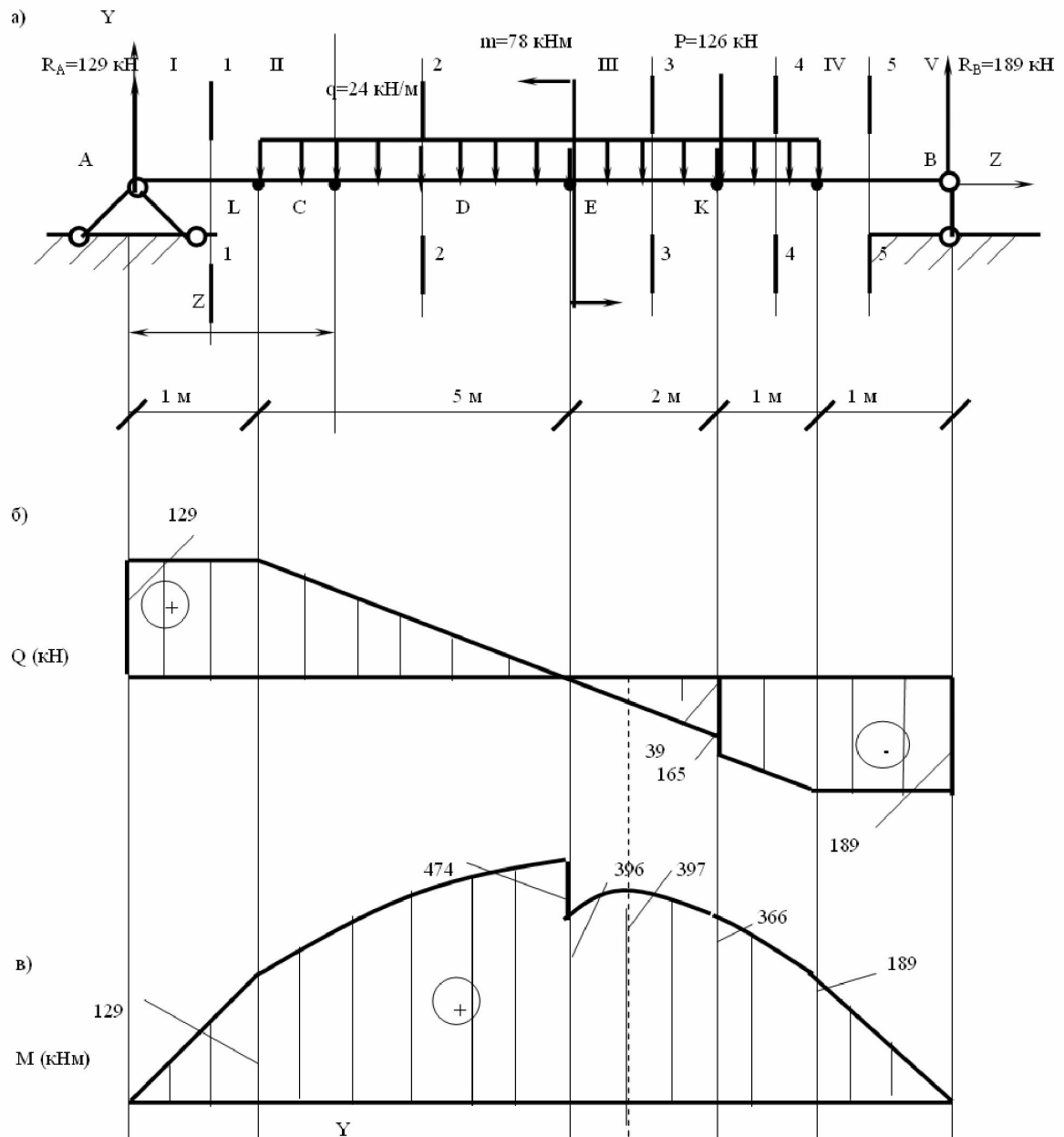


Рис. 8.

При записи  $Q$  и  $M$  рассматривались все время силы расположенные слева от сечения (с иллюстративной целью). А вообще удобнее рассматривать ту часть балки, на которую меньше всего действует сил, с целью уменьшения объема вычислений.

**Этап 3.** Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. По численным значениям  $Q$  и  $M$  и виду их уравнения (прямая, если  $Z$  в уравнении

первой степени или отсутствует и квадратичная парабола, если  $Z$  во второй степени), приведенных в табл. 1, построены эпюры  $Q$  (рис. 5в) и  $M$  (рис. 5г).

При построении эпюр  $Q$  и  $M$  под расчетной схемой проводят базовые линии (нулевые линии) и от них положительные значения  $Q$  и  $M$ , откладывают вверх, а отрицательные – вниз. Однако нужно заметить, что для студентов строительных специальностей принято ординаты эпюры  $M$  откладывать со стороны растянутого волокна. Согласно этому правилу, положительные моменты откладывают вниз, т. к. эти моменты согласно установленному выше правилу знаков  $M$  вызывают растяжение нижних волокон.

Проверка эпюры  $Q$ . Там, где отсутствует распределенная нагрузка  $q$ , это участки  $AL$  и  $KB$ , согласно правилу 3 эпюра  $Q$  очерчена прямыми линиями, параллельными базовой линии, т.е.  $Q_y = \text{const}$ . Там, где действует распределенная нагрузка  $q$ , это участки длиной  $LK$ , эпюра  $Q$  согласно правилу 4 очерчена наклонными прямыми, составляющими некоторый угол с базовой линией, причем  $q < 0$  эти линии слева на право идут вниз, а при  $q > 0$  – вверх. В точках  $B$ ,  $E$ ,  $A$  приложения сосредоточенных сил на эпюре  $Q$  имеются скачки, равные по величине этим силам (правило 6). Так при рассмотрении эпюры  $Q$  слева на право против точки  $A$  имеется скачок на величину  $129$  кН, равный реакции  $R_A$ , причем скачок направлен в направлении  $R_A$  от нуля до  $129$  кН. В точке  $E$  приложена сила  $P = 126$  кН, на эпюре  $Q$  имеется скачок, равный величине приложенной силы:  $165 - 39 = 126$  кН, значение  $Q$  при скачке возрастает с  $39$  кН до  $165$  кН в направлении силы  $P$ . Аналогично, на эпюре  $Q$  против точки  $B$  имеется скачок на величину  $189$  кН, равный реакции  $R_B = 189$  кН и отложен по направлению реакции  $R_B$ .

Проверка эпюры  $M$ . Там, где  $q = 0$ , это участки  $AL$  и  $KB$ , эпюра  $M$  очерчена прямыми линиями, составляющими некоторый угол с базовой линией (правило 3). Там, где имеется нагрузка  $q$ , (участки длиной  $LK$ ) эпюра  $M$  очерчена криволинейными линиями, при этом выпуклость кривой направлена навстречу направлению нагрузки  $q$ . При рассмотрении эпюр  $Q$  и  $M$  слева на право при положительной поперечной силе  $Q$  изгибающий момент  $M$  возрастает, а при отрицательной – убывает, что видно на эпюрах  $Q$  и  $M$ . При  $Q = 0$ , точка  $F$  на эпюре  $Q$ , на эпюре  $M$  в этом сечении изгибающий момент имеет экстремальное значение. В сечении, где приложен сосредоточенный момент  $m = 78$  кН·м (точка  $D$ ), на эпюре  $M$  имеется скачок на величину этого момента  $m$ , т. е.  $474 - 396 = 78$  кН·м (правило 7).

Если приведенные правила проверки эпюр Q и M согласуются с построенными эпюрами Q и M, то последние верны.

**Задача 6.** Для консольной балки изображенной на рис. 9а построить эпюры Q и M.

**Решение.** Балку, имеющую одну опору в виде жесткого защемления в точке A, называют консольной.

**Этап 1.** Определение реакций опор. В опоре возникает вертикальная реакция  $R_A$  и реактивный момент в заделке  $M_A$ . Определим эти реакции, записав уравнение равновесия.

$$\sum Y = 0, R_A - q \cdot 2 + P = 0, R_A = 2 \text{ кН},$$

$$\sum M = 0, M_A + q \cdot 2 \cdot 1.5 - P \cdot 2.5 - m = 0, M_A = 3 \text{ кН}.$$

**Этап 2.** Определение аналитических выражений для Q и M. Балка имеет три участка. Начало координат для первого и второго участков, поместим в точку A, а для третьего в точку B. Проведем мысленно сечение 1-1, 2-2 и 3-3, соответственно на каждом участке и укажем их координату Z (рис. 9а). Аналитические выражения для Q и M и результаты их вычисления для конкретных поперечных сечений представлены в таблице № 2.

Таблица № 2.

№ уч-ка	Изменение абсциссы Z, м	Q (Z), кН	M (Z), кН·м
I	$0 \leq Z \leq 0.5$ при $Z = 0$ при $Z = 0.5$	$Q_1 = R_A$ $Q_1 = 2$ $Q_1 = 2$	$M_1 = M_A + R_A \cdot Z$ $M_1 = 3$ $M_1 = 4$
II	$0.5 \leq Z \leq 2.5$ при $Z = 0.5$ при $Z = 2.5$	$Q_2 = R_A - q(Z - 0.5)$ $Q_2 = 2$ $Q_2 = -4$	$M_2 = M_A + R_A \cdot Z - q \frac{(Z - 0.5)^2}{2}$ $M_2 = 4$ $M_2 = 2$
III	$0 \leq Z \leq 0.4$ при $Z = 0$ при $Z = 0.4$	$Q_3 = 0$ $Q_3 = 0$ $Q_3 = 0$	$M_3 = m$ $M_3 = 2$ $M_3 = 2$

**Этап 3.** Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Для построения эпюры M на втором участке необходимо знать изгибающий момент в сечении, где  $Q_2 = 0$ , т. к. в этом сечении изгибающий момент имеет экстремальное значение (правило 5).

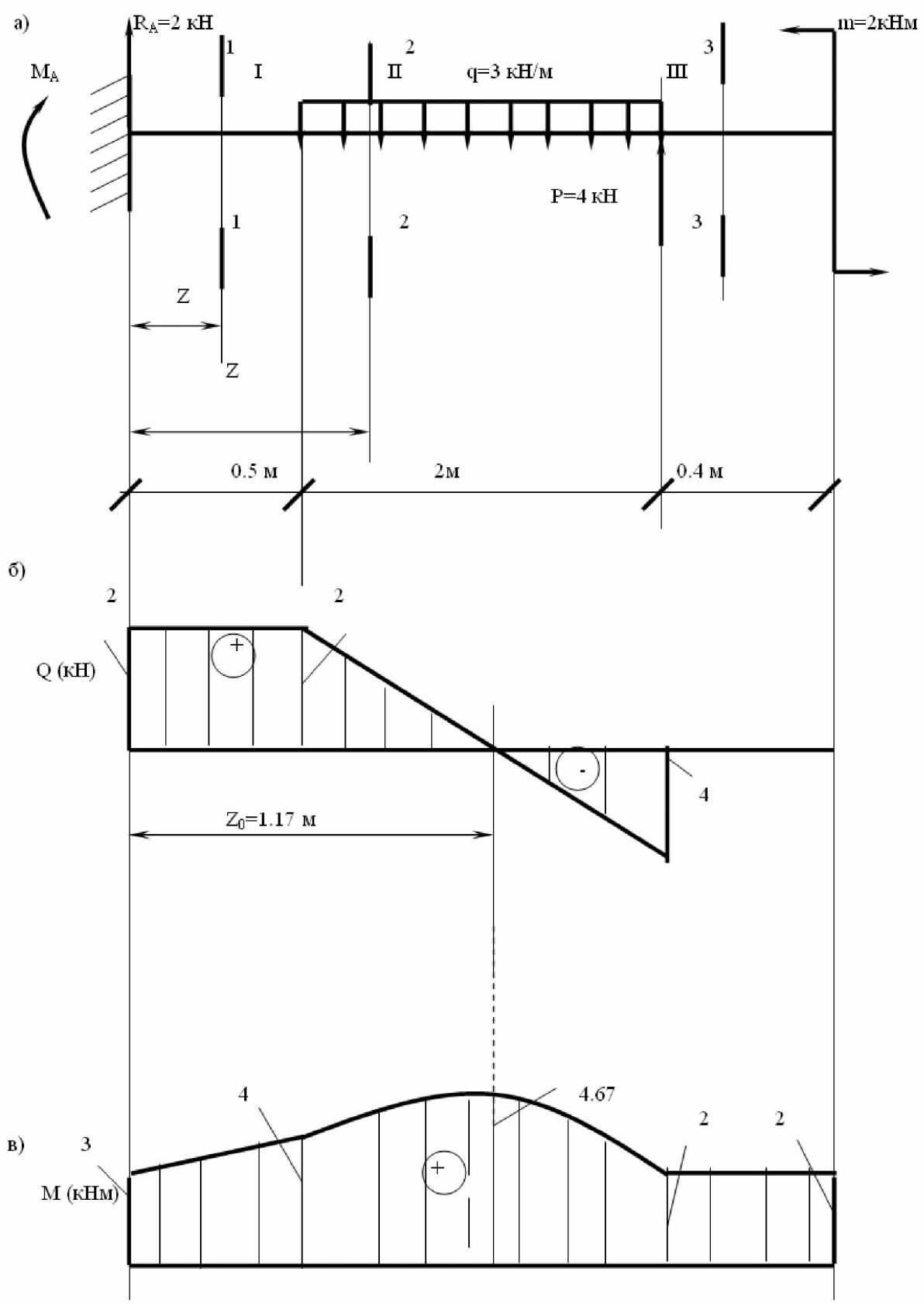


Рис. 9.

Приравняем  $Q_2$  нулю, определяем  $Z_0$ .

$$Q_2 = R_A - q(Z_0 - 0.5) = 0.$$

Откуда

$$Z_0 = \frac{(R_A + q \cdot 0.5)}{q} = 1.17 \text{ м}.$$

Определим изгибающий момент  $M_0$  при  $Z = Z_0 = 1,17$  м.

$$M_2 = M_A + R_A \cdot Z - q \frac{(Z - 0.5)^2}{2} = 4.67 \text{ кНм}.$$

По данным таблицы № 2 и найденным экстремальным значениям изгибающих моментов строим эпюры  $Q$  и  $M$ , представленные на рис. 9б и 9в соответственно.

**Задача 7.** Для консольной балки опертой свободным концом на шарнирно-подвижную опору с промежуточным шарниром в точке В, изображенной на рисунке 10(а) построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .

**Решение.** Проставим предполагаемое направление реакций. В шарнирно-подвижной опоре – это реакция  $R_C$ . В жесткой заделке - это две реакции  $R_A$  и реактивный момент  $M_A$ . Особенностью этой балки является то, что она соединена промежуточным шарниром. При отсутствии промежуточного шарнира балка была бы статически неопределимой, то есть реакции, в которой не могут быть определены только с помощью уравнений равновесия. Действительно неизвестных три реакции  $R_C, R_A, M_A$ . Уравнений равновесия только два (уравнение  $\sum Z = 0$  выпадает, так как горизонтальная реакция в заделке равна нулю)  $\sum Y = 0$  и  $\sum M = 0$ . При наличии промежуточного шарнира балка становится статически определимой. Промежуточный шарнир к двум уравнениям равновесия позволяет составить еще одно дополнительное уравнение, а именно: сумма моментов относительно центра шарнира от всех сил, расположенных по одну сторону от него, равна нулю.

Запишем это дополнительное уравнение:

$$\sum M_B = 0, R_C \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0, \text{ откуда } R_C = 4 \text{ кН}.$$

И еще запишем два уравнения равновесия

$$\sum M_A = 0, -M_A - m + q \cdot 4 \cdot 7 - R_C \cdot 9 = 0, \text{ откуда } M_A = 16 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0, -M_A + R_A \cdot 5 - m = 0, \text{ откуда } R_A = 4 \text{ кН}.$$

Проверкой решения будет являться уравнение статики: сумма проекций всех сил на ось  $Y$  равна нулю  $\sum Y = 0$ ,

$$R_A - q \cdot 4 + R_C = 0 \quad 4 - 2 \cdot 4 + 4 = 0.$$

Реакции найдены правильно.

Зная реакции опор можно записать аналитические выражения для поперечных сил и изгибающих моментов. Балка имеет три участка. Проведем на первом участке сечение 1-1, на втором 2-2 и на третьем 3-3. Начало координат для первого и второго участков поместим в заделку (точка А), а для третьего на опоре (точка С). Запишем выражения  $Q$  и  $M$  для всех трех участков и найдем их численные значения в конкретных сечениях балки.

Первый участок,  $0 \leq Z \leq 2$ :

$$Q_1 = R_A = 4 \text{ кН}, \quad M_1 = -M_A + R_A \cdot Z,$$

при  $Z = 0 \text{ м}$        $Q_1 = 4 \text{ кН}, \quad M_1 = M_A = -16 \text{ кНм},$

при  $Z = 2 \text{ м}$        $Q_1 = 4 \text{ кН}, \quad M_1 = -8 \text{ кНм}$

Второй участок,  $2 \text{ м} \leq Z \leq 5 \text{ м}$ :

$$Q_2 = R_A = 4 \text{ кН}, \quad M_2 = -M_A + R_A \cdot Z - m,$$

при  $Z = 2 \text{ м}$        $M_2 = 12 \text{ кНм},$

при  $Z = 5 \text{ м}$        $M_2 = 0.$

Третий участок,  $0 \leq Z \leq 4 \text{ м}$ :

$$Q_3 = R_C + q \cdot Z, \quad M_3 = R_C \cdot Z - q \frac{Z^2}{2},$$

при  $Z = 0 \text{ м}$        $Q_3 = -4 \text{ кН}, \quad M_3 = 0,$

при  $Z = 4 \text{ м}$        $Q_3 = 4 \text{ кН}, \quad M_3 = 0.$

Так как поперечная сила, на третьем участке изменяясь по линейному закону, проходит через нулевое значение, то необходимо в этом сечении определить экстремальное значение момента.

Определим абсциссу  $Z_0$ , при которой  $Q_3 = 0$ :

$$Q_3 = R_C + q \cdot Z_0 = 0,$$

откуда       $Z_0 = 2 \text{ м}.$

Изгибающий момент при  $Z = Z_0 = 2 \text{ м}$  равен

$$M_0 = R_C \cdot Z - q \frac{Z^2}{2},$$

откуда       $M_0 = 4 \text{ кНм}.$

На рис. 10б и 10в построены эпюры  $Q$  и  $M$ .

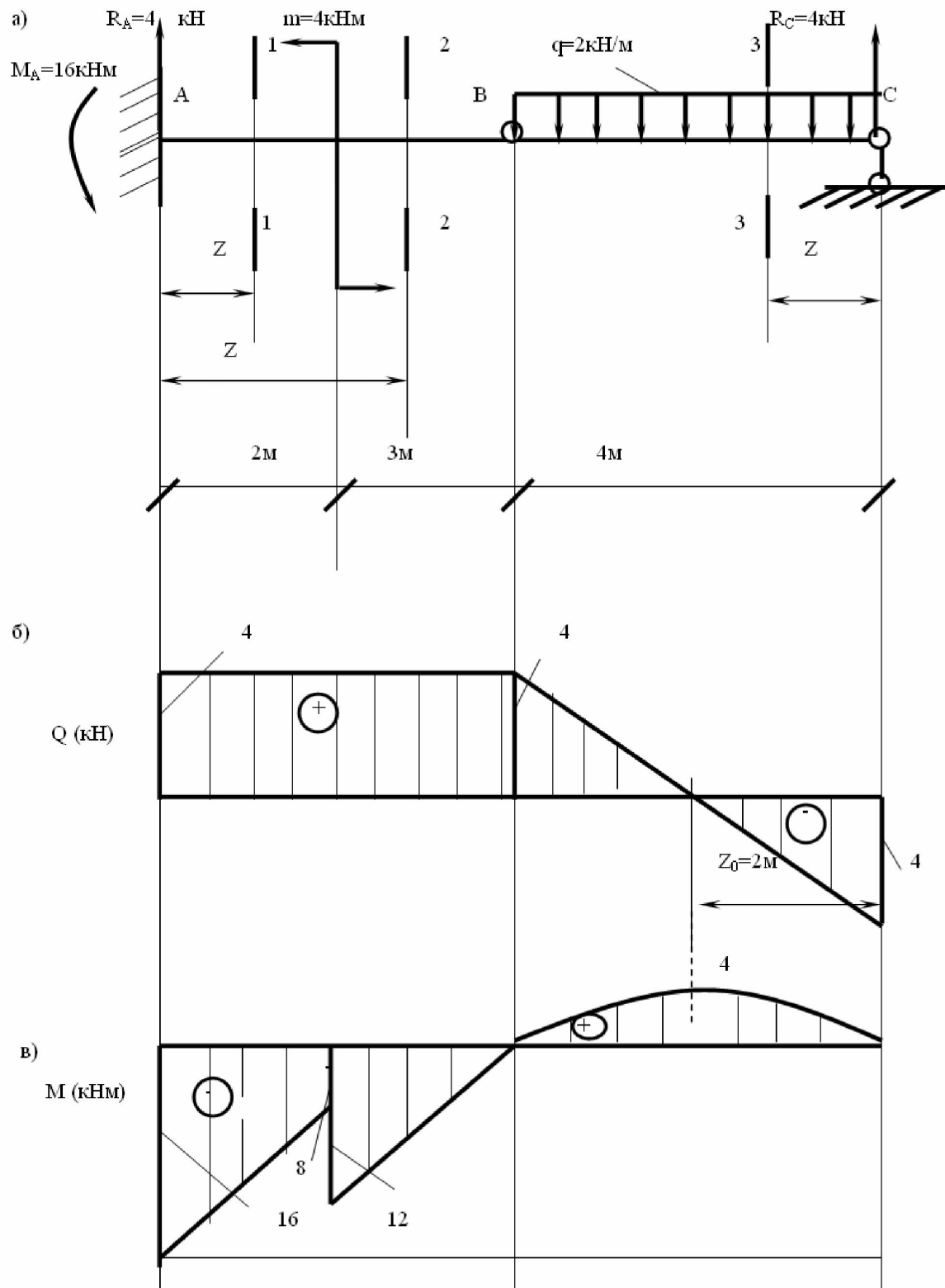


Рис. 10.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко Г. С., Агарев В. А. и др. Сопротивление материалов. Учебник М.: Головное издательство издательского объединения “Высшая школа” 1986. - 775 с., ил.
2. Смирнов А. Ф., Александров А. В. и др. Сопротивление материалов. Учебник М.: Издательство “Высшая школа” 1975. - 475 с., ил.
3. Федосеев В. И. Сопротивление материалов. Учебник М.: Москва “Наука” главная редакция физико-математической литературы. 1986 - 511 с., ил.
4. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. Учебник. Москва “Высшая школа” 1975. - 649 с., ил.
5. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Учебник. Издательство “Наука” главная редакция физико-математической литературы. Москва 1976. - 607 с., ил.